

Superfluide Eigenschaften von Anyonen in einem eindimensionalen Gitter

Bachelorarbeit

in Physik
von

Simon Becker

Betreuer: PD. Dr. Axel Pelster

Zweitgutachter: Prof. Dr. James Anglin



durchgeführt am
Fachbereich Physik
der Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität Kaiserslautern-Landau

24. Februar 2026

Inhalt

In dieser Bachelorarbeit wird das Verhalten von Anyonen in eindimensionalen Gittern untersucht. Hierfür wird zunächst das Anyon-Hubbard-Modell (AHM) für ein kanonisches Ensemble eingeführt, um dieses anschließend mithilfe einer fraktionalen Jordan-Wigner-Transformation durch ein bosonisches Modell auszudrücken. Da durch die Transformation eine lokale Peierls Phase entsteht, wird diese durch eine weitere lokale Eichung in eine globale Peierls Phase umgewandelt, um die globale periodische Randbedingung zurückzugewinnen. Anschließend wird die Bogoljubov-Transformation eingeführt und für ein zuvor hergeleitetes schwach wechselwirkendes Bose-Gas angewendet. Dann wird eine Bogoljubov-Transformation für das AHM durchgeführt, um eine Energiedispersion zu erhalten. Mithilfe dieser können zwei Schallgeschwindigkeiten bestimmt werden, eine propagiert nach links und die andere nach rechts. Ursache für die beiden Geschwindigkeiten ist die Paritätsbrechung der Anyonen-Algebra. Zum Schluss wird untersucht, inwiefern die Bogoljubov-Transformation Aussagen über die Grundzustandsentleerung treffen kann, bzw. welche weiteren Berechnungen durchgeführt werden können, um die Näherung durch die Bogoljubov-Transformation zu verbessern.

Abstract

In this thesis, the behavior of anyons in one-dimensional lattices is investigated. Therefore, the Anyon-Hubbard Model for a canonical ensemble is introduced, which is then expressed through a fractional Jordan-Wigner transformation in a bosonic model. Since a local Peierls phase arises through the transformation, this is transformed into a global Peierls phase through a further local gauge, in order to regain the global periodic boundary condition. Subsequently, the Bogoljubov transformation is introduced and applied to a previously derived weakly interacting Bose gas. Then, a Bogoljubov transformation is performed for the AHM to obtain an energy dispersion. Using this dispersion, two sound velocities can be determined, one for right- and one for left-wise propagation, which arise due to the parity breaking of the anyon Algebra. Finally, it is investigated to what extent the Bogoljubov transformation can make statements about the ground-state depletion, or which further calculations can be carried out to improve the approximation by the Bogoljubov transformation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Beschreibung von Anyonen	3
2.1	Anyonen in zwei räumlichen Dimensionen	3
2.2	Anyon-Hubbard-Modell	4
2.2.1	Verallgemeinerte Jordan-Wigner-Transformation	6
2.2.2	Homogenisierung der periodischen Randbedingung	9
3	Bosonische Bogoljubov-Transformation	13
3.1	Schwach Wechselwirkendes Bose-Gas	13
3.2	Bogoljubov-Transformation	16
3.2.1	Eigenschaften der Bogoljubov-Transformation	16
3.2.2	Implementierung der Bogoljubov-Transformation	19
3.3	Bogoljubov-Transformation für das schwach wechselwirkende Bose-Gas . .	23
4	Bogoljubov Theorie für Anyonen	27
4.1	Normalordnung des Anyon-Hubbard-Modells	27
4.2	Fourier-Transformation des Anyon-Hubbard-Modells	28
4.3	Eigenschaften des Grundzustands	34
4.4	Bogoljubov-Transformation des Anyon-Hubbard-Modells	35
5	Entleerung des Grundzustands	41
5.1	Bogoljubov-Näherung	41
5.2	Popov-Näherung	46
6	Zusammenfassung und Ausblick	51
	Literaturverzeichnis	55

1 Einleitung

Ununterscheidbare Teilchen in drei Dimensionen sind entweder Bosonen oder Fermionen, was unmittelbar aus dem Spin-Statistik-Theorem folgt [1]. Der Unterschied zwischen den beiden ist der Spin. In zwei oder einer Dimension können jedoch Teilchen existieren, die weder Bosonen noch Fermionen sind. Diese Teilchen werden Anyonen genannt und sie unterscheiden sich bspw. dadurch, dass sie kein eindeutiges Verhalten unter Vertauschung von zwei Teilchen haben. So ist die Wellenfunktion von Fermionen antisymmetrisch und erhält somit einen negativen Vorfaktor, bei Bosonen ist sie symmetrisch und ist somit invariant unter der Vertauschung [2]. Anyonen hingegen erhalten eine für Anyonen charakteristische Phase θ , abhängig von dieser Phase können sich weitere spezielle Eigenschaften ergeben.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Anyonen, experimentell zu realisieren [1]. Da diese Arbeit über Anyonen in 1D Gittern handelt, wird auf die Realisierung durch speziell konstruierte Gittersysteme genauer eingegangen. Hierfür wird ein Mott-Isolator aus ultrakalten Atomen bspw. ^{87}Rb verwendet [3].

Ein Mott-Isolator ist generell ein Material, welches laut dem Bändermodell metallisch leitend ist [4]. Die isolierende Charakteristik entsteht dadurch, dass die Ladungsträger lokal isoliert sind, bzw. sie sich nicht frei bewegen können. Aufgrund dessen, dass sich ultrakalte Atome in einem tiefen optischen Gitter auch nicht frei bewegen können, sondern an die Gitterplätze gebunden sind, bezeichnet man diese auch als Mott-Isolatoren. Dies gilt auch wenn die Atome neutral sind und es sich somit nicht um Ladungsträger im klassischen Sinne handelt.

Nun wird ein 1D Gitter in diesem Mott-Isolator betrachtet, bei dem ein dauerhafter Energieoffset E pro Gitterplatz eingebracht wird, um die Tunnelamplituden zu senken. Durch eine zeitabhängige Modulation δV , welche aus 3 Komponenten besteht, wird im zeitlichen Mittel eine Phase θ realisiert, wenn ein Teilchen auf eine besetzte Gitterstelle tunnelt. Die Komponenten sind die verschiedenen Offsets: $E, E + U_0, E - U_0$, sie treten bei den unterschiedlichen Tunnelvorgängen auf. Im Grenzfall geringer Dichten sind dies: einzeln besetzt zu unbesetzt, einzeln besetzt zu einzeln besetzt und doppelt besetzt zu unbesetzt. All diese Offsets werden dann in ihrer Intensität zeitlich mit einer Kosinusfunktion moduliert, wobei die zweite Modulation zusätzlich eine Phasenverschiebung von θ erhält. Durch die Überlagerung dieser 3 Offsets ergibt sich dann im zeitlichen Mittel die Phase θ , für den Tunnelvorgang an eine bereits besetzte Gitterstelle [3, 5]. Dies ist in Abbildung 1.1 grafisch veranschaulicht, dabei sind unten die Offsets dargestellt und oben die Phase.

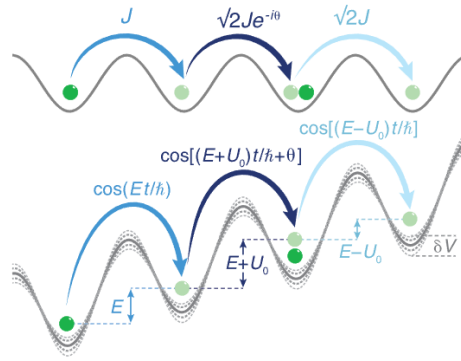


Abbildung 1.1: Grafische Darstellung des modulierten Gitters zur Realisierung von Anyonen [3].

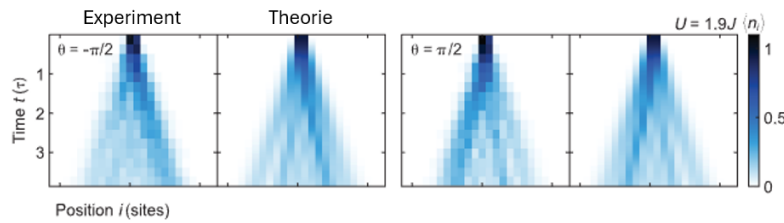


Abbildung 1.2: Ergebnisse bzgl. des antisymmetrischen Teilchentransports [3].

Es kann des Weiteren ein antisymmetrischer Teilchentransport beobachtet werden, welcher auftritt, wenn ein abstoßendes Potenzial aktiv ist [3].

In Abbildung 1.2 sind 4 Graphen zu erkennen, auf den x -Achsen sind jeweils die Gitterplätze dargestellt, auf den y -Achsen befindet sich eine Zeitskala. Mit der Intensität der Farbe wird die Besetzungsdichte des jeweiligen Gitterplatzes dargestellt. Zudem wird das experimentelle Ergebnis mit der theoretischen Vorhersage gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, dass die Besetzungsdichten für beide Fälle $\theta = -\frac{\pi}{2}$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ antisymmetrisch entlang der Zeitachse um die Mitte des Gitters sind, welche ursprünglich bei $t = 0$ s an zwei benachbarten Gitterplätzen mit jeweils einem Teilchen besetzt war. Dies bedeutet, dass Teilchen abhängig von ihrer Phase θ es bevorzugen, in eine bestimmte Richtung zu tunneln. Für den Fall $\theta = -\frac{\pi}{2}$ tunneln die Teilchen bevorzugt nach rechts, für $\theta = \frac{\pi}{2}$ bevorzugt nach links, was einen antisymmetrischen Teilchentransport darstellt. Dies ist eine spezielle Eigenschaft von Anyonen, welche theoretisch und experimentell gezeigt werden konnte [1, 3].

Dieser Arbeit geht bereits eine ähnliche Rechnung von B. H. Tang [6] im großkanonischen Ensemble voraus. Auf Basis dieser war das Ziel der vorliegenden Arbeit zunächst, die Berechnung im kanonischen Ensemble durchzuführen. Hierfür wird zunächst das Anyon-Hubbard-Modell im kanonischen Ensemble betrachtet, um anschließend eine Bogoljubov-Transformation durchzuführen, und die resultierende Energiedispersion der nichtwechselwirkenden Quasiteilchen zu erhalten. Anschließend wird untersucht, inwiefern die Dispersionen der beiden Ensembles übereinstimmen. Zum Schluss wird zum einen untersucht, inwiefern die Bogoljubov-Transformation Aussagen über die Grundzustandsentleerung treffen kann. Zum anderen wird ein Ausblick gegeben, welche weiteren Berechnungen durchgeführt werden können, um die Näherung durch die Bogoljubov-Transformation zu verbessern.

2 Theoretische Beschreibung von Anyonen

In diesem Kapitel werden Anyonen, deren statistische Eigenschaften in dieser Arbeit genauer untersucht werden, eingeführt. Zuerst wird die Historie der Anyonen e bevor anschließend das Anyon-Hubbard-Modell eingeführt wird.

2.1 Anyonen in zwei räumlichen Dimensionen

Ursprünglich wurde angenommen, dass es nur zwei Gruppen von ununterscheidbaren Teilchen gibt: Bosonen und Fermionen. Der Unterschied zwischen diesen besteht darin, wie sich die Symmetrie der Wellenfunktion unter Vertauschung zweier identischer Teilchen verhält. Bei Bosonen ist die Wellenfunktion symmetrisch, bleibt somit invariant unter Vertauschung. Bei Fermionen ist sie antisymmetrisch und nimmt somit eine Phase π auf. Diese Annahme basiert zum Beispiel auf dem Spin-Statistik-Theorem [7], was ursprünglich von Wolfgang Pauli 1940 eingeführt wurde [8]. Dieses besagt, dass in drei räumlichen Dimensionen Teilchen entweder ganz- oder halbzahligen Spin haben. Je nach dem Spin des Teilchens erhält die Wellenfunktion eine Phase π oder 2π .

Ein Argument hierfür sind die Kommutatorrelationen der Komponenten des Spinoperators, welche folgendermaßen definiert sind [1]:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}S_k. \quad (2.1)$$

wobei

$$[A, B] = AB - BA, \quad (2.2)$$

den Kommutators zwischen zwei Operatoren A und B darstellt.

Diese gehören der $su(2)$ Algebra an, aus welcher in drei Dimensionen (3D) folgt, dass es nur Bosonen und Fermionen geben kann [7]. In zwei Dimensionen (2D) existiert nur ein einzelner kontinuierlicher Drehimpuls. Dies ermöglicht in 2D die Existenz einer kontinuierlichen Familie von Teilchen, die weder Fermionen noch Bosonen sind, was in 3D ausgeschlossen ist [1].

Genau damit haben sich Leinaas und Myrheim 1977 in ihrer Arbeit "On the theory of identical particles" [9] beschäftigt. Sie erklärten, dass nicht die Wellenfunktion der Teilchen, sondern die Amplituden der Pfade zwischen zwei topologisch verschiedenen Konfigurationen entscheidend ist. Diese sind nur durch das Unitäritäts- und das Kompositionsprinzip eingeschränkt [1, 10]. In 2D wird dadurch die Windungszahl relevant. Dies ist ein wesentlicher

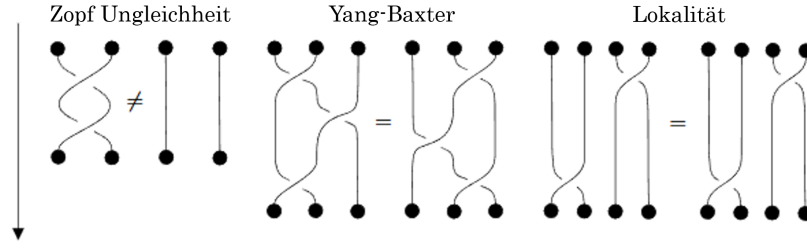


Abbildung 2.1: Grafische Darstellung der Zopfgruppenrelationen [6].

Unterschied zum 3D Fall, denn dort kann jede Windung einfach kontinuierlich aufgelöst werden. Zudem ist nicht mehr die Permutationsgruppe S_N sondern die Zopfgruppe B_N relevant. Sie enthält alle Pfade, die benötigt werden, um N Teilchen zu vertauschen. Sie kann durch $N - 1$ Vertauschungsoperatoren T_i generiert werden, die das linksdrehende Vertauschen zweier Teilchen beschreiben [1]. Die zugrunde liegende Algebra der Zopfgruppe ist durch folgende Axiome definiert [1]:

$$\text{Zopf Ungleichheit:} \quad T_i^{-1} \neq T_i, \quad \text{bzw. } T_i^2 \neq 1, \quad (2.3)$$

$$\text{Lokalität:} \quad T_i T_j = T_j T_i, \quad |i - j| > 1, \quad (2.4)$$

$$\text{Yang-Baxter:} \quad T_i T_j T_i = T_j T_i T_j, \quad |i - j| = 1. \quad (2.5)$$

Diese Relationen können durch Abbildung 2.1 grafisch dargestellt werden, was das Verständnis erleichtert.

Die eindimensionale Darstellung von B_N auf $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch [1]:

$$T_j = e^{i\theta} \quad \text{mit } \theta \in]-\pi, \pi] \quad (2.6)$$

wobei $\theta = 0$ den Bosonen und $\theta = \pi$ den Fermionen entspricht. Für andere Werte ergibt sich ein Phasenfaktor $e^{i\theta}$, welcher beliebig ist. Für diese Teilchen führte Frank Wilczek 1982 in der Arbeit "Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles" den Namen Anyonen ein. Darin ging es aber nicht um Anyonen, sondern um infinitesimale Flussröhren, in denen geladene Teilchen einen Drehimpuls besitzen. Beim Vertauschen von zwei Teilchen ergibt sich auch eine beliebige Phase. Dies legt einen möglichen experimentellen Nachweis von Anyonen nahe [11].

2.2 Anyon-Hubbard-Modell

Das Anyon-Hubbard-Modell (AHM) ist im Wesentlichen das Bose-Hubbard-Modell, wobei jedoch die bosonischen Operatoren durch ihr anyonisches Pendant ersetzt wurden [5]. Im Bose-Hubbard-Modell wird der Hamilton-Operator durch die Tunnelwahrscheinlichkeit J zwischen zwei benachbarten Gitterplätzen, dem chemischen Potenzial μ , sowie der Wechselwirkungsenergie U zwischen zwei Teilchen ausgedrückt. Im 2D Fall wird über alle

benachbarten Gitterplätze summiert [12], im 1D Fall zerfällt dies jedoch in eine Summe über alle Sites j , wobei die Operatoren, die die benachbarten Gitterplätze darstellen, zu $j + 1$ werden [13]:

$$H_{\text{BH}} = -J \sum_i (b_i^\dagger b_{i+1} + b_i b_{i+1}^\dagger) + \frac{U}{2} \sum_i n_i (n_i - 1) - \mu \sum_i n_i. \quad (2.7)$$

Hierbei sind $b_i^\dagger$ und b_i die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und $n_i = b_i^\dagger b_i$ bezeichnet den Besetzungsoperator für Bosonen an der Gitterstelle i . Sie sind durch folgende Vertauschungsrelationen definiert [14]:

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad (2.8)$$

$$[b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0. \quad (2.9)$$

Ob der Term des chemischen Potentials μ relevant ist, hängt von der Wahl des statistischen Ensembles ab. Wird ein großkanonisches Ensemble betrachtet, so ist μ relevant, da die Gesamtzahl der Teilchen nicht festgelegt ist und somit eine Energie durch das Hinzufügen oder Entfernen von Teilchen auftritt. Beim kanonischen Ensemble ist hingegen die Gesamtzahl der Teilchen festgelegt. Dann wird kein chemisches Potential μ benötigt, da es keine Energieänderung durch die Zahl von Teilchen gibt [15].

Zudem werden die bosonischen Operatoren durch anyonische ersetzt, welche durch folgende Vertauschungsrelationen definiert sind [5]

$$a_j a_k^\dagger - e^{-i\theta \text{sgn}(j-k)} a_k^\dagger a_j = \delta_{jk}, \quad (2.10)$$

$$a_j a_k = e^{i\theta \text{sgn}(j-k)} a_k a_j, \quad (2.11)$$

Hierbei ist die Signumfunktion $\text{sgn}(j - k)$ wie folgt definiert:

$$\text{sgn}(j - k) = \begin{cases} -1, & j < k \\ 0, & j = k \\ 1, & j > k \end{cases}. \quad (2.12)$$

Diese Vertauschungsrelationen repräsentieren im Wesentlichen die eindimensionale Darstellung der Zopfgruppe. Hierbei erzeugt die Exponentialfunktion zusammen mit der Signumfunktion den Phasenfaktor, welcher bei Vertauschung zweier Teilchen auftritt [16]. Zudem folgen aus ihr im bosonischen Fall $\theta = 0$ unmittelbar die Kommutatorrelationen für Bosonen, sowie im fermionischen $\theta = \pi$ die bekannten Antikommutatorrelationen [14], letzteres jedoch nur Falls $k \neq j$.

$$a_j a_k^\dagger - e^{-i\theta \text{sgn}(j-k)} a_k^\dagger a_j = \delta_{jk} \xrightarrow{\theta=0} a_j a_k^\dagger - a_k^\dagger a_j = \delta_{jk} = [b_i, b_j^\dagger], \quad (2.13)$$

$$\xrightarrow{\theta=\pi} a_j a_k^\dagger + a_k^\dagger a_j = \delta_{jk} = [f_i, f_j^\dagger]_+, \text{ wenn } j \neq k, \quad (2.14)$$

$$a_j a_k - e^{i\theta \text{sgn}(j-k)} a_k a_j = 0 \xrightarrow{\theta=0} a_j a_k - a_k a_j = 0 = [b_i, b_j], \quad (2.15)$$

$$\xrightarrow{\theta=\pi} a_j a_k + a_k a_j = 0 = [f_i, f_j]_+, \text{ wenn } j \neq k, \quad (2.16)$$

$$a_j^\dagger a_k^\dagger - e^{-i\theta \text{sgn}(j-k)} a_k^\dagger a_j^\dagger = 0 \xrightarrow{\theta=0} a_j^\dagger a_k^\dagger - a_k^\dagger a_j^\dagger = 0 = [b_i^\dagger, b_j^\dagger], \quad (2.17)$$

$$\xrightarrow{\theta=\pi} a_j^\dagger a_k^\dagger + a_k^\dagger a_j^\dagger = 0 = [f_i^\dagger, f_j^\dagger]_+, \text{ wenn } j \neq k. \quad (2.18)$$

Eine Besonderheit im fermionischen Fall ist, dass die Vertauschungsrelationen (2.8) für $j = k$ mit den bosonischen übereinstimmen. Dies ist eine Verletzung des Pauli-Prinzips, weshalb dieser Fall im Kontext der Anyonen auch als pseudofermionisch bezeichnet wird [5].

Der Hamilton-Operator des Anyon-Hubbard-Modells ergibt sich somit nach [5] zu:

$$H_{\text{AHM}} = -J \sum_i \left\{ (a_i^\dagger a_{i+1} + \text{h.c.}) + \frac{U}{2} n_i (n_i - 1) \right\}. \quad (2.19)$$

2.2.1 Verallgemeinerte Jordan-Wigner-Transformation

Als Nächstes wird die verallgemeinerte Jordan-Wigner-Transformation (JWT) verwendet, um die anyonischen Operatoren in mit Hilfe von bosonischen auszudrücken. Die JWT wurde ursprünglich verwendet, um Spin 1/2 Operatoren in spinlose fermionische Operatoren umzuwandeln. Diese werden dann zum Beispiel im 1D Ising bzw. Heisenberg-Modell verwendet [17, 18]. Explizit ist sie wie folgt definiert [18]. Der Ausgangspunkt sind Spin 1/2 Operatoren

$$\mathbf{S}_i = (c_n^\dagger, c_n) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} c_n \\ c_n^\dagger \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen sowie $c_n^\dagger$ und c_n die fermionischen Operatoren darstellen. Betrachtet man die Komponenten des Operators

$$s_n^\pm = s_{xn} \pm i s_{yn}, \quad (2.21)$$

so ergibt sich:

$$s_n^+ = c_n^\dagger \exp \left(-i\pi \sum_{j < n} c_j^\dagger c_j \right), \quad (2.22)$$

$$s_n^- = \exp \left(i\pi \sum_{j < n} c_j^\dagger c_j \right) c_n. \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

In analogie dazu wird die verallgemeinerte JWT für Anyonen wie folgt definiert [5]:

$$a_j = b_j \exp \left(i\theta \sum_{i < j} n_i \right). \quad (2.25)$$

Mithilfe dieser Transformation können die anyonischen Operatoren in Form von bosonischen ausgedrückt werden. Eine wichtige Eigenschaft ist die Phase, welche abhängig vom Gitterplätze ist. Sie hängt nämlich unmittelbar von der Summe der Besetzung der vorherigen Gitterplätze und somit vom betrachteten Gitterplätze ab. Dies zeigt somit unmittelbar, dass Anyonen nichtlokale Quasiteilchen sind [5].

Für den anyonischen Besetzungsoperator folgt durch Verwendung von Gleichung (2.25)

$$n_j = a_j^\dagger a_j = \exp \left(-i\theta \sum_{i < j} n_i \right) b_j^\dagger b_j \exp \left(i\theta \sum_{i < j} n_i \right), \quad (2.26)$$

Da $i < j$ gilt und somit die Operatoren $b_j b_j^\dagger$ mit $b_j^\dagger b_j$ nach Gleichung (2.8) miteinander vertauschen, folgt

$$n_j = b_j^\dagger b_j \exp \left(-i\theta \sum_{i < j} n_i \right) \exp \left(i\theta \sum_{i < j} n_i \right) = b_j^\dagger b_j. \quad (2.27)$$

Damit ist der Besetzungsoperator unter der Transformation invariant.

Damit die verallgemeinerte JWT (2.25) konsistent ist, muss sie die anyonischen Vertauschungsrelationen Gleichung (2.10), (2.11) erfüllen, wenn die bosonischen Operatoren b_i und $b_j^\dagger$ den Vertauschungsrelationen (2.8), (2.9) genügen.

Zum Beweis wird im Folgenden $i < j$ angenommen. Die Verwendung von Gleichung (2.25) führt zu:

$$a_i a_j^\dagger = b_i e^{i\theta \sum_{l < i} n_l} e^{-i\theta \sum_{l' < j} n_{l'}} b_j^\dagger. \quad (2.28)$$

Da die Teilchenzahloperatoren $n_l, n_{l'}$ für verschiedene Gitterplätze l, l' vertauschen, kann folgendermaßen vereinfacht werden:

$$a_i a_j^\dagger = b_i e^{-i\theta \sum_{i \leq l < j} n_l} b_j^\dagger. \quad (2.29)$$

Dies lässt sich auch schreiben als:

$$a_i a_j^\dagger = e^{-i\theta \sum_{i < l < j} n_l} b_i b_j^\dagger e^{-i\theta n_i}. \quad (2.30)$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.25) ergibt sich für das komplex Konjugierte:

$$a_i^\dagger a_j = e^{-i\theta \sum_{l < j} n_l} b_j^\dagger b_i e^{i\theta \sum_{l' < i} n_{l'}}. \quad (2.31)$$

Wieder kann aufgrund der Vertauschbarkeit von $n_l, n_{l'}$ folgendermaßen vereinfacht werden:

$$a_i^\dagger a_j = e^{-i\theta \sum_{i \leq l < j} n_l} b_j^\dagger b_i. \quad (2.32)$$

Nun wird folgende Nebenrechnung durchgeführt, um eine nützliche Vertauschungsrelation herzuleiten. Hierfür wird zunächst die Operatoridentität [19]

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} [A, [A, \dots, [A, B]] \dots], \quad (2.33)$$

sowie die Vertauschungsrelationen

$$[n_j, b_j] = n_j b_j - b_j n_j = b_j (b_j^\dagger b_j - b_j b_j^\dagger) = -b_j [b_j, b_j^\dagger] = -b_j, \quad (2.34)$$

verwendet. Beide werden dann kombiniert zu

$$e^{i\theta n_j} b_j e^{-i\theta n_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} (-1)^k b_j = e^{-i\theta} b_j, \quad (2.35)$$

Hieraus folgt schließlich:

$$b_j e^{-i\theta n_j} = e^{-i\theta(n_j+1)} b_j. \quad (2.36)$$

Aus Gleichung (2.30), (2.31) und der hergeleiteten Relation (2.36) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} a_i a_j^\dagger - e^{-i\theta} a_i^\dagger a_j &= e^{-i\theta \sum_{i < l < j} n_l} (b_i b_j^\dagger e^{-i\theta n_i} - e^{-i\theta(n_i+1)} b_j^\dagger b_i) \\ &= e^{-i\theta \sum_{i < l < j} n_l} (e^{-i\theta(n_i+1)} b_i b_j^\dagger - e^{-i\theta(n_i+1)} b_j^\dagger b_i). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Somit ergibt sich die gewünschte Vertauschungsrelation Gleichung (2.10) für $i < j$:

$$a_i a_j^\dagger - e^{-i\theta} a_i^\dagger a_j = e^{-i\theta \sum_{i < l < j} n_l} e^{-i\theta(n_i+1)} [b_i, b_j^\dagger] = 0. \quad (2.38)$$

Analog lässt sich dies auch für $i > j$ herleiten. Im Fall $i = j$ ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned}
a_i a_i^\dagger - a_i^\dagger a_i &= b_i e^{i\theta \sum_{l<i} n_l} e^{-i\theta \sum_{l<i} n_l} b_i^\dagger - e^{-i\theta \sum_{l<i} n_l} b_i^\dagger b_i e^{i\theta \sum_{l<i} n_l} \\
&= (b_i b_i^\dagger - b_i^\dagger b_i) e^{-i\theta \sum_{l<i} n_l} e^{i\theta \sum_{l<i} n_l} = [b_i, b_i^\dagger] = 1.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Somit erfüllt die verallgemeinerte JWT die anyonischen Vertauschungsrelationen und es ist eine konsistente Möglichkeit, die anyonischen Operatoren in Form von bosonischen Operatoren darzustellen. Woraus folgt, dass sich Anyonen durch bosonische Atome simulieren lassen können. Dies wurde kürzlich in den Experimenten [3, 20] ausgenutzt.

2.2.2 Homogenisierung der periodischen Randbedingung

Um einen unendlichen Raum durch ein endliches Gitter beschreiben zu können, wird eine periodische Randbedingung eingeführt. Die zugrunde liegende Idee ist, dass durch eine beliebige Aneinanderreihung von endlichen Gittern ein unendlicher Raum abgedeckt wird. Die periodische Randbedingung lautet:

$$a_{L+1} = a_1, \tag{2.40}$$

wobei L die Zahl der Gitterplätze bezeichnet. Hierbei besagt (2.40), dass der Operator am Gitterplatz $L + 1$ mit dem am Platz 1 identisch sein muss, da es sich aufgrund der Periodizität um denselben Gitterplatz handelt.

Aus der verallgemeinerten JWT (2.25) folgt dann mit der Randbedingung (2.40):

$$b_{L+1} e^{i\theta \sum_{i=1}^L n_i} = b_1. \tag{2.41}$$

Hieraus ergibt sich die folgende Randbedingung für die bosonischen Operatoren

$$b_{L+1} e^{i\theta N} = b_1, \tag{2.42}$$

hierbei bezeichnet N

$$N = \sum_{i=1}^L n_i, \tag{2.43}$$

den Teilchenzahloperator für ein bosonisches Gittermodell. Das Interessante hierbei ist, dass die bosonischen Operatoren eine lokale von der Besetzung abhängige Phase erhalten. Diese wird auch als dichteabhängige Peierls-Phase bezeichnet.

Wenn nun die verallgemeinerte JWT für Anyonen in den Hamilton-Operator des AHM (2.19) eingesetzt wird, ergibt sich:

$$H_{\text{AHM}} = -J \sum_j^L \left(e^{-i\theta \sum_{l<j} n_l} b_j^\dagger b_{j+1} e^{i\theta \sum_{l<j+1} n_l} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_j^L b_j^\dagger b_j (b_j^\dagger b_j - 1). \tag{2.44}$$

Da n_l mit b_{l+1} und sich selbst vertauscht, kann der erste Summand weiter vereinfacht werden. Zudem wird der letzte Summand isoliert, da dieser dann eine zusätzliche Phase enthält:

$$H_{\text{AHM}} = -J \sum_j^{L-1} \left(b_j^\dagger e^{i\theta n_j} b_{j+1} + \text{h.c.} \right) - J \left(b_L^\dagger e^{i\theta n_L} b_1 e^{-i\theta N} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_j^L b_j^\dagger b_j (b_j^\dagger b_j - 1). \quad (2.45)$$

Dieser zusätzliche Term für den Phasenshift kann vermieden werden, wenn die Verschiebung über alle Gitterplätze gleichmäßig verteilt und damit homogenisiert wird. Hierfür wird die folgende lokale Eichung eingeführt [6].

$$b_j = e^{-ia\beta j} d_j, \quad (2.46)$$

wobei a den Gitterabstand bezeichnet und die geeignete Eichung β noch zu bestimmen ist. Ziel der Eichung ist es eine globale periodische Randbedingung für den neu definierten bosonischen Operator d_j zu erhalten. Wird (2.46) auf den Hamilton-Operator (2.45) angewendet, ergibt sich:

$$\begin{aligned} H_{\text{AHM}} = & -J \sum_j^{L-1} \left(b_j^\dagger e^{ia\beta j} e^{i\theta n_j} e^{-ia\beta(j+1)} b_{j+1} + \text{h.c.} \right) - J \left(b_L^\dagger e^{ia\beta L} e^{i\theta n_L} e^{-ia\beta(L+1)} b_1 e^{i(La\beta - \theta N)} + \text{h.c.} \right) \\ & + \frac{U}{2} \sum_j^L b_j^\dagger b_j (b_j^\dagger b_j - 1). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Nun kann die Eichung β so gewählt werden, dass die Phase $La\beta - \theta N$ im zweiten Term verschwindet. Die Eichung lautet dann wie folgt

$$\beta = \frac{\theta N}{La}. \quad (2.48)$$

Diese wird nun in den Hamilton-Operator (2.45) eingesetzt, wobei aufgrund des kanonischen Ensembles N , was für beliebige Systeme der Teilchenzahl sein müsste, durch die Gesamtzahl der Teilchen N ersetzt werden kann, da diese festgelegt ist. Der homogenisierten Hamiltonion lautet dann folgendermaßen:

$$H_{\text{AHM}} = -J \sum_j^L \left(d_j^\dagger e^{i\theta n_j} e^{i\frac{\theta N}{L}} d_{j+1} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_j^L d_j^\dagger d_j (d_j^\dagger d_j - 1). \quad (2.49)$$

Somit konnte durch eine geeignete lokale Eichung die lokale Phase in eine globale überführt werden. Die Kombination von (2.42)

$$b_{L+1} e^{i\theta N} = b_1, \quad (2.50)$$

und (2.46) zeigt:

$$\begin{aligned}
e^{-ia\beta(L+1)}d_{L+1}e^{i\theta N} &= e^{-ia\beta}d_1 \\
e^{-ia\beta}d_{L+1} &= e^{-ia\beta}d_1,
\end{aligned}
\tag{2.51}$$

Wodurch die ursprüngliche periodische Randbedingung der bosonischen Operatoren, also jene ohne Peierls-Phase

$$d_{L+1} = d_1, \tag{2.52}$$

wiederhergestellt ist.

3 Bosonische Bogoljubov-Transformation

In diesem Kapitel wird zunächst der Hamilton-Operator für ein schwach wechselwirkendes Bose-Gas in Gittern vom Orts- in den Fourier-Raum überführt. Anschließend werden die allgemeinen Eigenschaften der Bogoljubov-Transformation diskutiert. Sie ermöglicht es, ein System von wechselwirkenden Teilchen näherungsweise durch ein System von nicht-wechselwirkenden Quasiteilchen zu beschreiben [21, 22]. Zum Schluss wird diese Bogoljubov-Transformationen für den zuvor hergeleiteten Hamilton-Operator angewendet.

3.1 Schwach Wechselwirkendes Bose-Gas

Im kanonischen Ensemble eines bosonischen Systems lautet der Hamilton-Operator für freie Teilchen nach [23]:

$$H_0 = \int d^3x \quad b_x^\dagger \left(\frac{1}{2M} \hat{\mathbf{p}}^2 \right) b_x. \quad (3.1)$$

Hierbei sind $b_x^\dagger, b_x$ die bosonischen Vernichtungs- bzw. Erzeugungs-Operatoren, d.h. sie erzeugen bzw. vernichten Bosonen mit Masse M am Ort $\mathbf{x}$. Sie sind durch ihre Vertauschungsrelationen definiert [23]:

$$[b_x, b_{x'}^\dagger] = \delta_{x,x'}, \quad (3.2)$$

$$[b_x, b_{x'}] = 0, \quad (3.3)$$

$$[b_x^\dagger, b_{x'}^\dagger] = 0. \quad (3.4)$$

Und der Impuls Operator $\hat{\mathbf{p}}$ ist wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla. \quad (3.5)$$

Um den Hamilton-Operator für die Wechselwirkung zu erhalten, ist es zunächst notwendig, ein geeignetes Potenzial zu finden, welches die Wechselwirkung beschreibt. Da eine Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen an den Orten $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ betrachtet wird, ist es notwendig, dass das Potenzial $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ von diesen abhängig ist. Falls nun beachtet wird, dass nach Newton jede Zwei-Teilchenwechselwirkung betragsmäßig identische und entgegengesetzte Kräfte hervorruft, so muss das Potenzial von der Differenz der Orte abhängig sein [2]:

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = U(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.6)$$

Der Hamilton-Operator für die Wechselwirkung mit einem Potenzial $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ lautet somit [23]:

$$H_{\text{WW}} = \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' \quad b_{\mathbf{x}}^\dagger b_{\mathbf{x}'}^\dagger U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') b_{\mathbf{x}'} b_{\mathbf{x}}. \quad (3.7)$$

Wir beschreiben ein unendlich großes System durch ein beschränktes Volumen $V = L^3$ und folgender periodischen Randbedingung:

$$b_{\mathbf{x}} = b_{\mathbf{x} + L\mathbf{e}_i} \quad , i = 1, 2, 3. \quad (3.8)$$

Mit einer Fourier-Transformation ergibt sich für die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Ortsraum [23]:

$$b_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.9)$$

Hierbei sind $\mathbf{k}$ die Wellenvektoren im reziproken Raum und $b_{\mathbf{k}}$ beschreiben Operatoren, die Bosonen mit entsprechenden Wellenvektoren vernichten.

Wird die Fourier-Transformation auf die periodische Randbedingung (3.8) angewendet, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} + L\mathbf{e}_i)}. \quad (3.10)$$

Hieraus folgt, dass die Wellenvektoren im reziproken Raum durch die diskreten Gitterpunkte gegeben sind:

$$\mathbf{k} = (k_i), \quad k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

Diese Form des Operators wird in Gleichung (3.1) eingesetzt und H_0 ergibt sich zu

$$H_0 = \int d^3x \quad \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{x}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \epsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}, \quad (3.12)$$

wobei die kinetische Energie gegeben ist durch:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2M}. \quad (3.13)$$

Das Integral über den Ortsraum in (3.12) führt zu einem Kronecker-Symbol:

$$\int d^3x \quad e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.14)$$

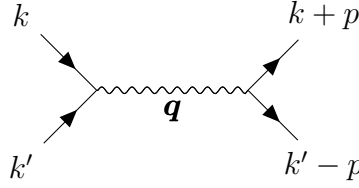


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramm für die Wechselwirkung.

Damit ergibt sich (3.12) zu:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \epsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}. \quad (3.15)$$

Nun wird auch der Hamilton-Operator für die Wechselwirkung in den Fourier-Raum überführt. Das Potenzial der Wechselwirkung lautet [23]:

$$U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} U(\mathbf{k}). \quad (3.16)$$

Dies kann nun zusammen mit (3.9) in Gleichung (3.7) eingesetzt werden:

$$H_{\text{WW}} = \frac{1}{2V^3} \int d^3x \int d^3x' \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} e^{i(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1)\mathbf{x}} e^{i(\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_2)\mathbf{x}'} U(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}. \quad (3.17)$$

Die beiden Ortsintegrale ergeben analog zu (3.14) zwei Kronecker-Symbole:

$$H_{\text{WW}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}, \mathbf{k}_2} U(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}_1}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_2}^{\dagger} b_{\mathbf{k}_3} b_{\mathbf{k}_4}. \quad (3.18)$$

Durch die beiden Kronecker-Symbole reduzieren sich die 5 Reihen schließlich auf 3:

$$H_{\text{WW}} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} U(\mathbf{q}) b_{\mathbf{k} + \mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}' - \mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}. \quad (3.19)$$

Der Hamilton-Operator in (3.19) kann als Feynman-Diagramm interpretiert werden, siehe Abbildung 3.1. Bei tiefen Temperaturen haben die Bosonen so geringe Energien, dass sie nur auf einem Raumpunkt miteinander wechselwirken. Das Wechselwirkungspotenzial kann dann durch eine Kontaktwechselwirkung vereinfacht werden [2, 23].

$$U(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = g \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.20)$$

Hierbei gilt für die Wechselwirkungsstärke:

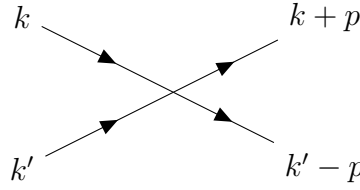


Abbildung 3.2: Vereinfachtes Feynman-Diagramm für die Kontaktwechselwirkung.

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{M}, \quad (3.21)$$

wobei a die s-Wellenstreuungslänge bezeichnet. Dieses Potenzial (3.20) kann nun in den Hamilton-Operator für Wechselwirkungen (3.19) eingesetzt werden, dieser lautet somit:

$$H_{\text{WW}} = \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}. \quad (3.22)$$

Der Hamilton-Operator in (3.22) kann gemäß Abbildung 3.2 auch als vereinfachtes Feynman-Diagramm von Abbildung 3.1 interpretiert werden. Kombiniert man nun den Hamilton-Operator eines freien Teilchens (3.15) und den Hamilton-Operator für die Wechselwirkung (3.22), so ergibt sich der folgende Hamilton-Operator für ein schwach wechselwirkendes Bose-Gas:

$$H_{\text{Bose}} = \sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger \epsilon_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} b_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}. \quad (3.23)$$

3.2 Bogoljubov-Transformation

Die Grundidee der Bogoljubov-Transformation besteht darin, ein Gas aus wechselwirkenden Bosonen näherungsweise, durch ein Gas von nicht-wechselwirkenden Quasiteilchen zu approximieren [21, 22]. Dies geschieht durch eine lineare Transformation der ursprünglichen bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$ auf neue bosonische Operatoren $B_{\mathbf{k}}$ und $B_{\mathbf{k}}^\dagger$, die Quasiteilchen vernichten und erzeugen. Da die Quasiteilchen nicht wechselwirken, wird die lineare Transformation dadurch festgelegt, dass der neuen Hamilton-Operator diagonal wird, d.h. nur noch Terme der Form $B_{\mathbf{k}}^\dagger B_{\mathbf{k}}$ enthält [22, 23].

3.2.1 Eigenschaften der Bogoljubov-Transformation

Die Bogoljubov-Operatoren der Quasiteilchen sind wie folgt definiert [22, 23]:

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, \\ B_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die entsprechend invertierte Transformation lautet:

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= \left(u_{-\mathbf{k}}^* B_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} B_{-\mathbf{k}}^{\dagger} \right) \frac{1}{v_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}}^* - u_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}^*}, \\ b_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= \left(u_{-\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}^* B_{-\mathbf{k}} \right) \frac{1}{v_{\mathbf{k}}^* v_{-\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}}^* u_{-\mathbf{k}}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

wobei $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ komplexe Koeffizienten sind. Um deren Eigenschaften dieser bestimmen zu können, werden die standardmäßigen bosonischen Vertauschungsrelationen auch für die Operatoren der Quasiteilchen verwendet [22, 23]:

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{p}}, \quad (3.26)$$

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{p}}] = 0, \quad (3.27)$$

$$[B_{\mathbf{k}}^{\dagger}, B_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = 0. \quad (3.28)$$

Zunächst wird Gleichung (3.24) in (3.27) eingesetzt. Dadurch ergibt sich unter Verwendung der Bilinearität des Kommutators:

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}] = 0 = (u_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}. \quad (3.29)$$

Entsprechenden folgt aus (3.26):

$$[B_{\mathbf{k}}, B_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = (u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'}^* - v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^*) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (3.30)$$

Zudem wird Gleichung (3.25) in dieselbe Kommutatorrelation, für die ursprünglichen Operatoren eingesetzt und (3.3) verwendet:

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = 0 = \frac{v_{-\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}^* - u_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}}}{(v_{\mathbf{k}} v_{-\mathbf{k}}^* - u_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}^*)(v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}} - u_{\mathbf{k}}^* u_{-\mathbf{k}})} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'}. \quad (3.31)$$

Somit gilt zunächst:

$$u_{\mathbf{k}} u_{-\mathbf{k}}^* - v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \neq 0. \quad (3.32)$$

Aus den hergeleiteten Relationen folgt unmittelbar:

$$(3.29) \Rightarrow \frac{u_{\mathbf{k}}}{u_{-\mathbf{k}}} = -\frac{v_{\mathbf{k}}}{v_{-\mathbf{k}}}, \quad (3.33)$$

$$(3.30) \Rightarrow |u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1, \quad (3.34)$$

$$(3.31) \Rightarrow \frac{u_{\mathbf{k}}^*}{u_{-\mathbf{k}}^*} = \frac{v_{-\mathbf{k}}}{v_{\mathbf{k}}}. \quad (3.35)$$

Da die Gleichung (3.34) der trigonometrischen Identität der Hyperbelfunktionen entspricht, wird die folgende Substitution vorgeschlagen:

$$u_{\mathbf{k}} = \cosh(\Phi_{\mathbf{k}}), \quad (3.36)$$

$$v_{\mathbf{k}} = \sinh(\Phi_{\mathbf{k}}). \quad (3.37)$$

Der Winkel $\Phi_{\mathbf{k}}$ ist hierbei ein Parameter, mit welchem die Diagonalisierung des Hamilton-Operator realisiert werden, kann [21, 22]. Damit diese Substitution ohne Einschränkung der Allgemeinheit konsistent ist, müssen die Relationen (3.33), (3.35) erfüllt sein. So ergibt sich für die erste Relation (3.33) mit der Definition der Hyperbelfunktionen [24]

$$\frac{\cosh(\Phi_{\mathbf{k}})}{\cosh(\Phi_{-\mathbf{k}})} = -\frac{\sinh(\Phi_{\mathbf{k}})}{\sinh(\Phi_{-\mathbf{k}})}, \quad (3.38)$$

somit folgt zunächst, da $\sinh(0) = 0$:

$$\Phi_{\mathbf{k}} \neq 0, \text{ für alle } \mathbf{k}. \quad (3.39)$$

Wird Gleichung (3.38) ausmultipliziert

$$\sinh(\Phi_{-\mathbf{k}}) \cosh(\Phi_{\mathbf{k}}) + \sinh(\Phi_{\mathbf{k}}) \cosh(\Phi_{-\mathbf{k}}) = 0, \quad (3.40)$$

so können nun die Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen [24] verwendet werden, es ergibt sich:

$$\sinh(\Phi_{-\mathbf{k}} + \Phi_{\mathbf{k}}) = 0. \quad (3.41)$$

Woraus die Asymmetrie des Bogoljubov-Winkels in $\mathbf{k}$

$$\Phi_{\mathbf{k}} = -\Phi_{-\mathbf{k}}, \quad (3.42)$$

folgt. Aufgrund von (3.36) und (3.42) gilt:

$$u_{-\mathbf{k}} = \cosh(\Phi_{-\mathbf{k}}) = \cosh(-\Phi_{\mathbf{k}}) = \cosh(\Phi_{\mathbf{k}}) = u_{\mathbf{k}}. \quad (3.43)$$

Werden (3.33) und (3.35) kombiniert, so ergibt sich aufgrund von (3.43):

$$\frac{u_{\mathbf{k}}^*}{u_{-\mathbf{k}}^*} = -\frac{u_{-\mathbf{k}}}{u_{\mathbf{k}}} = -1. \quad (3.44)$$

Dies ist äquivalent zu:

$$u_{\mathbf{k}}^* = -u_{-\mathbf{k}}^*. \quad (3.45)$$

Analog ergibt sich aufgrund von (3.35):

$$v_{\mathbf{k}}^* = -v_{-\mathbf{k}}^*. \quad (3.46)$$

Wird (3.45) und (3.46) in den Faktor der inversen Transformation (3.25) eingesetzt, so ergibt sich unter Verwendung von (3.34):

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{k}}v_{-\mathbf{k}}^* - u_{\mathbf{k}}u_{-\mathbf{k}}^* &= u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}}^* - v_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}^* \\ &= |u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Somit können die Bogoljubov-Koeffizienten ohne Einschränkung der Allgemeinheit mit den Hyperbelfunktionen ausgedrückt werden. Zudem vereinfacht sich die inverse Bogoljubov-Transformation (3.25) aufgrund von (3.47) und (3.45) zu:

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}B_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}B_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, \\ b_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= u_{\mathbf{k}}B_{\mathbf{k}}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}B_{-\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.2.2 Implementierung der Bogoljubov-Transformation

Da in dieser Arbeit verschiedene Hamilton-Operatoren betrachtet werden, auf die eine Bogoljubov-Transformation angewendet wird, wird im Folgenden eine Transformation für einen generalisierten Hamilton-Operator durchgeführt. Hierzu wird die Bogoljubov-Transformation zunächst für die folgenden Operatoren mithilfe von Gleichung (3.48) bereitgestellt:

$$b_q^\dagger b_q = (u_q \hat{B}_q^\dagger - v_q \hat{B}_{-q}) (u_q \hat{B}_q - v_q \hat{B}_{-q}^\dagger) \quad (3.49)$$

$$= u_q^2 \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q + v_q^2 \hat{B}_{-q} \hat{B}_{-q}^\dagger - u_q v_q \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_{-q}^\dagger - u_q v_q \hat{B}_{-q} \hat{B}_q, \quad (3.50)$$

$$b_{-q} b_q^\dagger = (u_q \hat{B}_{-q} - v_q \hat{B}_q^\dagger) (u_q \hat{B}_{-q}^\dagger - v_q \hat{B}_q) \quad (3.51)$$

$$= u_q^2 \hat{B}_{-q} \hat{B}_{-q}^\dagger + v_q^2 \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q - u_q v_q \hat{B}_{-q} \hat{B}_q - u_q v_q \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_{-q}^\dagger, \quad (3.52)$$

$$b_q^\dagger b_{-q}^\dagger = (u_q \hat{B}_q^\dagger - v_q \hat{B}_{-q}) (u_q \hat{B}_{-q}^\dagger - v_q \hat{B}_q) \quad (3.53)$$

$$= u_q^2 \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_{-q}^\dagger + v_q^2 \hat{B}_{-q} \hat{B}_q - u_q v_q \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q - u_q v_q \hat{B}_{-q} \hat{B}_{-q}^\dagger. \quad (3.54)$$

Die Grundidee ist die folgende. Die meisten Hamilton Operatoren, auf die die Bogoljubov-Transformation angewendet wird, haben die Form

$$H_{\text{Gen}} = H_{\text{Gen},0} + \sum_{q \neq 0} (A_q b_q^\dagger b_q + B_q^* b_q b_{-q} + B_{-q} b_q^\dagger b_{-q}^\dagger), \quad (3.55)$$

wobei A_q und B_q Koeffizienten sind, welche vom beschriebenen System abhängen. Aus der Unitarität des Hamilton-Operator

$$H_{\text{Gen}} = H_{\text{Gen}}^\dagger, \quad (3.56)$$

ergeben sich folgende Eigenschaften der Koeffizienten:

$$A_q = A_q^*, \quad (3.57)$$

$$B_q = B_{-q}^*. \quad (3.58)$$

Da die Summanden in (3.55) nicht symmetrisch sind, ist es vorteilhaft, diese zu symmetrisieren. Hierfür wird folgende mathematische Identität verwendet:

$$\sum_x f(x) = \frac{1}{2} \sum_x [f(x) + f(-x)]. \quad (3.59)$$

Wird dies auf den generellen Hamilton-Operator Gleichung (3.55) unter Berücksichtigung von (3.57), (3.58) angewendet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} H_{\text{Gen}} = H_{\text{Gen},0} - \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} A_{-q} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} (A_q b_q^\dagger b_q + A_{-q} b_{-q} b_{-q}^\dagger) \\ + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} [(B_q + B_{-q}) (b_q b_{-q} + b_q^\dagger b_{-q}^\dagger) + \text{h.c.}], \end{aligned} \quad (3.60)$$

wobei die bosonischen Kommutatorrelationen verwendet wurden. Wird die zuvor hergeleitete Transformation der Operatoren (3.50), (3.52), (3.54) in diesen Hamilton-Operator eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Gen, Bogo}} = H_{\text{Gen,0}} + \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \bigg\{ & -A_{-q} \\
& + \left[A_q u_q^2 + A_{-q} v_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q \right] \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q \\
& + \left[A_q v_q^2 + A_{-q} u_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q \right] \hat{B}_{-q} \hat{B}_{-q}^\dagger \\
& + \left[-(A_q + A_{-q}) u_q v_q + (B_q + B_{-q}) u_q^2 + (B_q^* + B_{-q}^*) v_q^2 \right] \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_{-q}^\dagger \\
& + \left[-(A_q + A_{-q}) u_q v_q + (B_q^* + B_{-q}^*) u_q^2 + (B_q + B_{-q}) v_q^2 \right] \hat{B}_{-q} \hat{B}_q \bigg\}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Die Idee der Bogoljubov-Transformation besteht darin, dass der transformierte Hamilton-Operator diagonal wird. Deshalb müssen die Koeffizienten der nicht-diagonalen Terme $\hat{B}_{-q} \hat{B}_q$, $\hat{B}_q^\dagger \hat{B}_{-q}^\dagger$ verschwinden. Dies führt zu folgenden Gleichungen

$$(B_q + B_{-q}) u_q^2 + (B_q^* + B_{-q}^*) v_q^2 - (A_q + A_{-q}) u_q v_q = 0, \tag{3.62}$$

$$(B_q^* + B_{-q}^*) u_q^2 + (B_q + B_{-q}) v_q^2 - (A_q + A_{-q}) u_q v_q = 0. \tag{3.63}$$

Werden beide Gleichungen kombiniert, resultiert folgendes:

$$2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q}) (u_q^2 + v_q^2) = 2 (A_q + A_{-q}) u_q v_q. \tag{3.64}$$

Nun können die hyperbolischen Funktionen in (3.36) verwendet werden, um die Koeffizienten u_q und v_q zu eliminieren und nur eine Abhängigkeit von Φ_q zu erhalten. Auch können die Additionstheoreme für die hyperbolischen Funktionen [24] verwendet werden:

$$\frac{2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})}{A_q + A_{-q}} = \frac{u_q v_q}{u_q^2 + v_q^2} = \frac{2 \cosh \Phi_q \sinh \Phi_q}{\cosh^2 \Phi_q + \sinh^2 \Phi_q} = \tanh 2\Phi_q. \tag{3.65}$$

Nun können weitere Additionstheoreme verwendet werden [24], um folgende Ausdrücke für die Koeffizienten zu erhalten:

$$u_q^2 = \cosh^2 \Phi_q = \frac{1}{2} [\cosh (2\Phi_q) + 1] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 (2\Phi_q)}} + 1 \right] \quad (3.66)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{A_q + A_{-q}}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}} + 1 \right], \quad (3.67)$$

$$v_q^2 = \sinh^2 \Phi_q = \frac{1}{2} \left[\frac{A_q + A_{-q}}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}} - 1 \right], \quad (3.68)$$

$$u_q v_q = \cosh \Phi_q \sinh \Phi_q = \frac{1}{2} \sinh 2\Phi_q = \frac{1}{2} \frac{\tanh 2\Phi_q}{\sqrt{1 - \tanh^2 2\Phi_q}} \quad (3.69)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}}. \quad (3.70)$$

$$(3.71)$$

Wenn nun diese Koeffizienten in den diagonalisierten Hamilton-Operator (5.20) eingesetzt werden, folgt:

$$\begin{aligned} H_{\text{Gen, Bogo}} = H_{\text{Gen,0}} &+ \frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} \left\{ [A_q u_q^2 + A_{-q} v_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q] \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q \right. \\ &\left. + [A_q v_q^2 + A_{-q} u_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q] (\hat{B}_{-q}^\dagger \hat{B}_{-q} - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Mithilfe folgender Nebenrechnung

$$\begin{aligned} A_q u_q^2 + A_{-q} v_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q &= A_q v_q^2 + A_{-q} u_q^2 - (B_q + B_q^*) u_q v_q \\ &= \frac{1}{2} \frac{(A_q + A_{-q})^2}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}} + \frac{1}{2} (A_q - A_{-q}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})^2}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2} + (A_q - A_{-q}) \right\} = E_q, \end{aligned} \quad (3.73)$$

hierbei wird die Bogoljubov Dispersion E_q definiert als:

$$E_q = \frac{1}{2} (A_q - A_{-q}) + \frac{1}{2} \sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re} (B_q + B_{-q})]^2}. \quad (3.74)$$

Mithilfe dieser kann nun der diagonalisierte Hamilton-Operator geschrieben werden als:

$$H_{\text{Gen, diag}} = H_{\text{Gen,0}} + \sum_{q \neq 0} \frac{1}{2} (E_q - A_q) + E_q \hat{B}_q^\dagger \hat{B}_q. \quad (3.75)$$

Dieser Hamilton-Operator beschreibt jetzt ein System nicht-wechselwirkender Teilchen die mit $B_q^{(\dagger)}$ erzeugt bzw. vernichtet werden, sowie deren Dispersion E_q . Hierbei ist zu beachten, dass diese Quasiteilchen gemäß (3.24) eine Superposition der ursprünglichen Teilchen $b_q^{(\dagger)}$ sind.

Der resultierende Hamilton-Operator besteht aus den drei Komponenten des Grundzustand Hamilton-Operators $H_{\text{Gen},0}$, einer weiteren Energieverschiebung aufgrund von Quantenfluktuationen $\frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} (E_q - A_q)$ und dem Term, der thermische Fluktuationen beschreibt.

3.3 Bogoljubov-Transformation für das schwach wechselwirkende Bose-Gas

Um die Bogoljubov-Transformation durchzuführen, wird zunächst die makroskopische Besetzung von $p = 0$ berücksichtigt. Dies hat zwei Effekte auf den Hamilton-Operator Gleichung (3.23). Zum einen können die Grundzustandsoperatoren isoliert und aus der Summe separiert werden. Der zweite Effekt ist, dass aufgrund der geringen Besetzung, Anregungen höherer Ordnung $(b_{k \neq k_0}^{(\dagger)})^3$ vernachlässigt werden können.

Die Berechnung wird für den vorliegenden kanonischen Fall (3.23) durchgeführt. Zudem gilt aufgrund der Impulserhaltung folgendes für den Wechselwirkungsterm:

$p + q$	$p' - q$	p'	p
0	0	q	$-q$
q	$-q$	0	0
p	0	0	p
0	p'	p'	0
0	$-q$	0	$-q$
q	0	q	0
0	0	0	0

Tabelle 3.1: Impulse der Operatoren im Wechselwirkungsterm des bosonischen Hamilton-Operator

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Bogoljubov-Transformation ist, dass der ursprüngliche Vakuumzustand $p = 0$ makroskopisch besetzt ist [21, 22]. Deshalb können die Operatoren für diesen Zustand näherungsweise durch Ihre c-Zahl ersetzt werden $b_0^\dagger b_0 = N_0$. Die Wurzel ergibt dann $b_0 \approx b_0^\dagger \approx \sqrt{N_0}$.

Eine weitere Folge ist, dass die Operatoren nun miteinander vertauschen, denn:

$$[b_0, b_0^\dagger] \approx [\sqrt{N_0}, \sqrt{N_0}] = 0. \quad (3.76)$$

Wendet man die Eigenschaften der Impulse aus Tab. 3.1 auf den Hamilton-Operator (3.23) an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
H_{\text{Bose}} &= \epsilon_0 b_0^\dagger b_0 + \sum_{p \neq 0} \epsilon_p b_p^\dagger b_p + \frac{g}{2V} b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 \\
&+ \frac{g}{2V} \sum_{p \neq 0} \left(b_0^\dagger b_0^\dagger b_p b_{-p} + b_p^\dagger b_{-p}^\dagger b_0 b_0 + b_p^\dagger b_0^\dagger b_0 b_p + b_0^\dagger b_p^\dagger b_p b_0 + b_0^\dagger b_{-p}^\dagger b_0 b_{-p} + b_{-p}^\dagger b_0^\dagger b_{-p} b_0 \right) \\
&= \frac{g}{2V} N_0^2 + \sum_{p \neq 0} \left(\epsilon_p + \frac{2gN_0}{V} \right) b_p^\dagger b_p + \frac{g}{2V} N_0 \sum_{p \neq 0} \left(b_p b_{-p} + b_p^\dagger b_{-p}^\dagger \right).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Nun wird der Hamilton-Operator in zwei Teile separiert. Ein Teil hängt von der Gesamtteilchenzahl N ab und der andere von der Besetzung des Grundzustands N_0 . Hierfür wird ausgenutzt, dass sich die Gesamtteilchenzahl als die Summe aller Teilchenzahlen, bzw. die Summe aller Teilchenzahl-Operatoren, darstellen lässt:

$$N = N_0 + \sum_{p \neq 0} b_p^\dagger b_p. \tag{3.78}$$

Wird dies angewendet und Anregungen höherer Ordnung vernachlässigt, ergibt sich aus (3.77):

$$H_{\text{Bose}} = \frac{gN^2}{2V} + \sum_{p \neq 0} \left(\epsilon_p + \frac{gN_0}{V} \right) b_p^\dagger b_p + \frac{g}{2V} N_0 \sum_{p \neq 0} \left(b_p b_{-p} + b_p^\dagger b_{-p}^\dagger \right) \tag{3.79}$$

Der Hamilton-Operator lässt sich in zwei Teile separieren, der erste Teil hängt nur von der Gesamtteilchenzahl N ab, der zweite hingegen von der Grundzustandsbesetzung N_0 und den Fluktuationen. Dieser Operator hat nun die Form des generellen Hamilton-Operator Gleichung (3.55), weshalb man nun die entsprechenden Koeffizienten ablesen kann:

$$\begin{aligned}
A_{p,\text{Bose}} &= \epsilon_p + \frac{gN_0}{V}, \\
B_{p,\text{Bose}} &= \frac{gN_0}{2V}.
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Mit diesen kann nun die Bogoljubov Dispersion (3.74) für das schwach wechselwirkende Bose-Gas bestimmt werden:

$$E_p = \sqrt{\epsilon_p \left(\epsilon_p + \frac{2gN_0}{V} \right)}. \tag{3.81}$$

Der diagonalisierte Hamilton-Operator für das schwach wechselwirkende Bose-Gas lautet dann:

$$H_{\text{Bose}} = \frac{gN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[E_{p,\text{Bose}} - \left(\epsilon_p + \frac{gN_0}{V} \right) \right] + \sum_{p \neq 0} E_p B_p^\dagger B_p. \quad (3.82)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von Kleinert in Ref. [23] überein.

Eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Energie-Dispersion ist, dass das Nambu-Goldstone Theorem erfüllt ist [25, 26]. Dieses besagt, dass es für jede gebrochene kontinuierliche Symmetrie eine masselose Anregung geben muss. Die gebrochene Symmetrie ist die Phaseninvarianz des Hamilton-Operators, welche durch eine makroskopische Besetzung des Grundzustands auftritt [23]. Masselos bedeutet eine lineare Dispersion ohne Energielücke. Dies ist für kleine Impulse $p \rightarrow 0$ der Fall:

$$E_p \stackrel{p \rightarrow 0}{\approx} \sqrt{\frac{2gN_0}{V}} |p|. \quad (3.83)$$

Über folgende Formel kann man daraus die Schallgeschwindigkeit im Bose-Gas bestimmen:

$$c = \frac{1}{\hbar} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial E_{p,\text{Bose}}}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial E_{p,\text{Bose}}}{\partial p} = \sqrt{\frac{gN_0}{V}}. \quad (3.84)$$

4 Bogoljubov Theorie für Anyonen

In diesem Kapitel wird die Bogoljubov-Transformation für das AHM durchgeführt, das in Abschnitt 2.2 eingeführt wurde. Hierzu wird der zugrunde liegende Hamilton-Operator (2.49) zunächst normal geordnet, anschließend wird eine deformierte Fourier-Transformation angewendet. Der Hamilton-Operator kann nachfolgend in zwei Teile separiert werden. Der erste liefert durch Extremisierung den Impuls des Grundzustands k_0 . Am zweiten Teil kann die Bogoljubov-Transformation durchgeführt werden, um durch Diagonalisierung die Energiedispersion nicht-wechselwirkender Landau-Quasi-Teilchen zu bestimmen.

4.1 Normalordnung des Anyon-Hubbard-Modells

Die Normalordnung eines Hamilton-Operators ist elementar für die Berechnung von physikalisch realistischen Systemen, da sie die Divergenz der Vakuum-Grundzustandsenergie eliminiert [14]. Der Term $e^{i\theta n_j}$ benötigt dafür weitere Überlegungen, da er noch nicht normal geordnet ist. Hierfür wird zunächst die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe expandiert:

$$e^{i\theta \hat{n}_j} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} (d_j^\dagger d_j)^m. \quad (4.1)$$

Das Problem ist, dass die Operatoren $(d_j^\dagger d_j)^m$ nicht normal geordnet sind. Um eine mögliche Umformulierung zu erhalten, wird zunächst angenommen, dass es einen Koeffizienten K_m^q gibt, sodass die folgende Gleichung gilt:

$$(d_j^\dagger d_j)^m = \sum_{q=1}^m K_q^m (d_j^\dagger)^q (d_j)^q. \quad (4.2)$$

Zunächst gilt $K_0^m = 0$, für $m > 0$ aufgrund von:

$$\langle 0 | (d_j^\dagger d_j)^m | 0 \rangle = \delta_{0,m}. \quad (4.3)$$

Nun gilt für die nächste Potenz:

$$(d_j^\dagger d_j)^{m+1} = \left(\sum_{q=1}^m K_q^m (d_j^\dagger)^q (d_j)^q \right) d_j^\dagger d_j. \quad (4.4)$$

Mithilfe der Vertauschungsrelation (2.8) kann folgende Umformung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
(d_j^\dagger)^q (d_j)^q (d_j^\dagger d_j) &= (d_j^\dagger)^q \underbrace{d_j \dots d_j}_{q\text{-mal}} d_j^\dagger d_j, \\
&= (d_j^\dagger)^q \underbrace{d_j \dots d_j}_{(q-1)\text{-mal}} (d_j^\dagger d_j + 1) d_j, \\
&\vdots \\
&= q (d_j^\dagger)^q (d_j)^q + (d_j^\dagger)^{q+1} (d_j)^{q+1}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Wird dies in die Gleichung (4.4) eingesetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{q=1}^m K_q^m (d_j^\dagger)^q (d_j)^q \right) d_j^\dagger d_j &= \sum_{q=1}^m K_q^m \left[q (d_j^\dagger)^q (d_j)^q + (d_j^\dagger)^{q+1} (d_j)^{q+1} \right], \\
&= \sum_{q=1}^{m+1} (K_{q-1}^m + q K_q^m) (d_j^\dagger)^q (d_j)^q.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Durch einen Vergleich der Potenzen ergibt sich folgende Relation für die Koeffizienten K_q^m :

$$K_q^{m+1} = K_{q-1}^m + q K_q^m. \tag{4.7}$$

Das ist die rekursive Formel für die Berechnung der Stirling-Zahlen zweiter Art [27]

$$S(m+1, q) = S(m, q-1) + q S(m, q). \tag{4.8}$$

Auch der Wechselwirkungsterm des AHM kann durch Anwendung der bosonischen Vertauschungsrelationen (3.26) normal geordnet werden:

$$d_j^\dagger d_j d_j^\dagger d_j - d_j^\dagger d_j = d_j^\dagger (d_j^\dagger d_j + 1) d_j - d_j^\dagger d_j = (d_j^\dagger)^2 (d_j)^2. \tag{4.9}$$

Somit lautet der normal geordnete AHM Hamilton-Operator:

$$H_{\text{AHM}} = -J \sum_{j=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^m \left[S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} e^{-i\frac{\theta N}{L}} (d_j^\dagger)^{q+1} (d_j)^q d_{j+1} + \text{h.c.} \right] + \frac{U}{2} \sum_j (d_j^\dagger)^2 (d_j)^2. \tag{4.10}$$

4.2 Fourier-Transformation des Anyon-Hubbard-Modells

Nun wird wie in Abschnitt 1.1 die Fourier-Transformation verwendet, um die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des AHM in den Impulsraum zu transformieren. Um die Fourier-Transformation anzuwenden, müssen zunächst die Impulse definiert werden,

wofür die periodische Randbedingung (2.52) berücksichtigt wird. Somit ergeben sich die folgenden diskreten quasi-Impulse:

$$k = \frac{2\pi n}{La} \begin{cases} n \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \cap \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], & L \text{ ist gerade} \\ n \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{L-1}{2}, \frac{L-1}{2}\right], & L \text{ ist ungerade} \end{cases} \quad (4.11)$$

Die transformierten Operatoren der bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lauten dann [23]:

$$\begin{aligned} d_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{ija} d_k^\dagger, \\ d_j &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ikja} d_k. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Werden die beiden Gleichung (4.11), (4.12) kombiniert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} d_{L+j} &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k e^{-ik(L+j)a} d_k, \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k d_k e^{-ikja} e^{-i\frac{2\pi La}{La}}, \\ &= d_j. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Dies ist gerade die periodische Randbedingung (2.52), somit ist die diskrete Fourier-Transformation (4.12) valide. Da eine Bogoljubov-Transformation durchgeführt wird, muss zudem der Grundzustand makroskopisch besetzt sein, da dies nach Abschnitt 3.3 eine Voraussetzung für diese ist. Somit kann in Gleichung (4.12) der Impuls des Grundzustands k_0 aus der Summe isoliert werden. Eine wichtige Eigenschaft aufgrund der Symmetriebrechung der Parität durch die Anyonen-Algebra für $\theta \in]0, \pi[$ ist, dass der Impuls des Grundzustands nicht mehr bei $k_0 = 0$ liegt [28, 29]. Ein makroskopisch besetztem Grundzustand ist charakterisiert durch $d_{k_0} = d_{k_0}^\dagger \approx \sqrt{N_{k_0}}$ und $k_0 \neq 0$. Demnach lautet dann die deformierte Fourier-Transformation (4.12) für die bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned} d_j^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0ja} + \sum_{k \neq k_0} e^{ikja} d_k^\dagger \right), \\ d_j &= \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0ja} + \sum_{k \neq k_0} e^{-ikja} d_k \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Der normal geordnete Hamilton-Operator (4.10) zum AHM lautet dann:

$$\begin{aligned}
H_{\text{AHM}} = & -J \sum_{j=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^m \left(e^{-i\frac{\theta N}{L}} S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0} + \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} \right] \right)^{m+1} \right. \\
& \times \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0} + \sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ikja} \right] \right)^m \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0 a(k+1)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ika(k+1)} \right] \right) + \text{h.c.} \Big) + \frac{U}{2} \sum_{k=1}^L \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0} + \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} \right] \right)^2 \\
& \times \left(\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0} + \sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ikja} \right] \right)^2
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Anschließend werden die Potenzen in 2. Ordnung entwickelt, sowie die Terme mit $\mathcal{O}((d_k^\dagger)^3, (d_k)^3)$ vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
H_{\text{AHM}}^J = & -J \sum_{j=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^m \left(e^{-i\frac{\theta N}{L}} S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \frac{1}{L^{q+1}} \left\{ \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0ja} \right)^{q+1} \right. \right. \\
& + (q+1) \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0ja} \right)^q \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} + \frac{q(q+1)}{2} \\
& \times \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0ja} \right)^{q-1} \left(\sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} \right)^2 \Big\} \left\{ \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0ja} \right)^q \right. \\
& + q \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0ja} \right)^{q-1} \sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ikja} + \frac{q(q-1)}{2} \\
& \times \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0ja} \right)^{q-2} \left(\sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ikja} \right)^2 \Big\} \\
& \times \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0a(j+1)} + \sum_{k \neq k_0}^L d_k e^{-ika(j+1)} \right) + \text{h.c.} \Big).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die einzelnen Teile können nun ausmultipliziert und die diskrete Fourier-Transformation angewendet werden, um die Terme zu vereinfachen. Eine Vereinfachung aus (4.16) lautet bspw:

$$\begin{aligned}
& (q+1) \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{ik_0ja} \right)^q \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} q \left(\sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0ja} \right)^{q-1} \\
& \times \sum_{k' \neq k_0}^L d_{k'} e^{-ik'ja} \sqrt{N_{k_0}} e^{-ik_0a(j+1)} \\
& = N_{k_0}^q e^{-ik_0a} q(q+1) \sum_{k, k' \neq k_0}^L d_k^\dagger d_{k'} e^{i(k-k')ja}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Da in (4.17) wegen (4.16) über alle Gitterpunkte summiert werden muss, kann die Identität

$$\sum_{j=1}^L e^{ikja} = L\delta_{k,0}, \tag{4.18}$$

zur weiteren Vereinfachung verwendet werden:

$$\begin{aligned}
& N_{k_0}^q e^{-ik_0a} q(q+1) \sum_{k, k' \neq k_0}^L d_k^\dagger d_{k'} \sum_{j=1}^L e^{i(k-k')ja} \\
& = L^{q+1} q(q+1) n_{k_0}^q e^{-ik_0a} \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

wobei $n_{k_0} = N_{k_0}/L$ die Besetzungsdichte des Grundzustands bezeichnet. Dies kann auch für alle anderen Terme analog durchgeführt werden. Eine weitere Folge der diskreten Fourier-Transformation ist, dass die Terme $\mathcal{O}(d_k^\dagger, d_k)$ aufgrund von

$$\ldots \times e^{-i\frac{\theta N}{L}} \sum_{j=1}^L \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} = \ldots \times \sum_{j=1}^L \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger e^{ikja} = \ldots \times \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger L\delta_{k,0} = 0, \tag{4.20}$$

verschwinden. Zudem kann Gleichung (2.48) verwendet werden, um folgende Umformung durchzuführen:

$$e^{-i\frac{\theta N}{L}} = e^{-i\beta a} \tag{4.21}$$

Der verbleibende Ausdruck für den Hamilton-Operator lautet dann schließlich:

$$\begin{aligned}
H_{\text{AHM}}^J = & -J \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^m S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \left\{ L e^{-i(k_0+\beta)a} \left[n_{k_0}^{q+1} + \frac{(q+1)n_{k_0}^q}{L} \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \right] + \text{h.c.} \right. \\
& + n_{k_0}^q \left[(q-1)(q+1)e^{-i(k_0+\beta)a} + (q+1)e^{-i(k+\beta)a} \right] \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \\
& + n_{k_0}^q \frac{q(q+1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} \sum_{k \neq k_0}^L d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger \\
& \left. + n_{k_0}^q \left[\frac{q(q-1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} + q e^{-i(2k_0-k+\beta)a} \right] \sum_{k \neq k_0}^L d_k d_{2k_0-k} + \text{h.c.} \right\}. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Neben H_{AHM}^J lässt sich auch der Wechselwirkungsterm von (4.16) vereinfachen:

$$H_{\text{AHM}}^U = \frac{U}{2} \left[L \left(n_{k_0}^2 + \frac{2n_{k_0}}{L} \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \right) + n_{k_0} \sum_{k \neq k_0}^L \left(2\hat{n}_k + d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger + d_k d_{2k_0-k} \right) \right]. \quad (4.23)$$

Werden Gleichung (4.22), (4.23) kombiniert, so ergibt sich für den AHM Hamilton-Operator aus (4.22) und (4.23):

$$\begin{aligned}
H_{\text{AHM}} = & L \left\{ -J \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \left[S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \left(n_{k_0}^{q+1} + (q+1)n_{k_0}^q \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \right) e^{-i(k_0+\beta)a} \right. \right. \\
& + \text{h.c.} \left. \right] + \frac{U}{2} \left(n_{k_0}^2 + 2n_{k_0} \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \right) \left. \right\} \\
& + \sum_{k \neq k_0}^L \left\{ -J \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \left(S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \left[\right. \right. \right. \\
& n_{k_0}^q \left((q-1)(q+1)e^{-i(k_0+\beta)a} + (q+1)e^{-i(k+\beta)a} \right) \hat{n}_k \\
& + n_{k_0}^q \frac{q(q+1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger \\
& \left. \left. + n_{k_0}^q \left(\frac{q(q-1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} + q e^{-i(2k_0-k+\beta)a} \right) d_k d_{2k_0-k} \right] + \text{h.c.} \right) \right. \\
& \left. + \frac{U n_{k_0}}{2} \left(2\hat{n}_k + d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger + d_k d_{2k_0-k} \right) \right\}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Falls die Gesamtbesetzungsdichte n mithilfe der Gesamtteilchenzahl N aus (3.78) ausgedrückt wird, ergibt sich

$$n = n_{k_0} + \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k, \quad (4.25)$$

Die Potenzen von (4.25) lassen sich dann bis zur 1. Ordnung in den Fluktuationen entwickeln:

$$\begin{aligned} n^q &= \left(n_{k_0} + \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k \right)^q \\ &= n_{k_0}^q + q n_{k_0}^{q-1} \sum_{k \neq k_0}^L \hat{n}_k + \mathcal{O} \left([d_k^\dagger d_k]^2 \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Somit kann der AHM Hamilton-Operator in Gleichung (4.24) vereinfacht werden.

Der resultierende Hamilton-Operator kann in zwei Teile

$$H_{\text{AHM}} = H_{\text{AHM}}^{(0)} + H_{\text{AHM}}^{(1)} \quad (4.27)$$

aufgeteilt werden. Der erste Teil hängt von der Gesamtteilchenzahl ab

$$H_{\text{AHM}}^{(0)} = L \left\{ -J \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \left(S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} n^{q+1} e^{-i(k_0+\beta)a} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} n^2 \right\} \quad (4.28)$$

und der zweite Teil enthält die Fluktuationen der angeregten Zustände:

$$\begin{aligned} H_{\text{AHM}}^{(1)} &= \sum_{k \neq k_0}^L \left\{ -J \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \left(S(m, q) \frac{(i\theta)^m}{m!} \right. \right. \\ &\quad \times \left[n_{k_0}^q \left((q-1)(q+1) e^{-i(k_0+\beta)a} + (q+1) e^{-i(k+\beta)a} \right) \hat{n}_k \right. \\ &\quad + n_{k_0}^q \frac{q(q+1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger \\ &\quad + n_{k_0}^q \left(\frac{q(q-1)}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} + q e^{-i(2k_0-k+\beta)a} \right) d_k d_{2k_0-k} + \text{h.c.} \left. \right] \\ &\quad \left. + \frac{U n_{k_0}}{2} \left(2\hat{n}_k + d_k^\dagger d_{2k_0-k}^\dagger + d_k d_{2k_0-k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Hamilton-Operator kann also wie in Abschnitt 3.3 in einen von der Gesamtteilchenzahl abhängigen Teil $H_{\text{AHM}}^{(0)}$ und einen von der Grundzustandsteilchenzahl abhängigen Teil $H_{\text{AHM}}^{(1)}$ aufgeteilt werden. Ebenso ist der erste Teil die makroskopische Energie und der zweite enthält die Fluktuationen der angeregten Zustände.

4.3 Eigenschaften des Grundzustands

Mithilfe von $H_{\text{AHM}}^{(0)}$ kann der Impuls des Grundzustands k_0 durch eine Extremisierung bestimmt werden. Hierfür werden zunächst die Stirling-Zahlen mithilfe einer erzeugenden Funktion $G(\theta, n)$ ausgedrückt [27, 28]. Dabei wird folgende Relation für die Stirling-Zahlen zweiter Art verwendet:

$$T_m(n) = \sum_{q=0}^m S(m, q) n^q, \quad (4.30)$$

wobei $T_m(n)$ die Touchard-Polynome bezeichnet [30]. Diese sind statistisch definiert als die Erwartungswerte der m -ten Potenz einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen n [27, 28]. Weiterhin können sie durch die folgende erzeugende Funktion $G(\theta, n)$ ausgedrückt werden [30]:

$$G(\theta, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} T_m(n) = e^{n(e^{i\theta}-1)}. \quad (4.31)$$

Kombiniert man diese beiden Relationen so ergibt sich die folgende Umformung:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \frac{(i\theta)^m}{m!} S(m, q) n^q = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^m}{m!} T_m(n) = G(\theta, n). \quad (4.32)$$

Die Touchard-Polynome können zudem über folgende Rekursionsformel berechnet werden [30]:

$$T_{m+1}(n) = n(1 + \partial_n) T_m(n). \quad (4.33)$$

Als zusätzliche Notation führen wir den folgenden Operator $\hat{D}(n) = n\partial_n$ ein. Dieser kann dann wie folgt auf die erzeugende Funktion $G(\theta, n)$ angewendet werden:

$$\hat{D}(n)G(\theta, n) = n\partial_n e^{n(e^{i\theta}-1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=0}^m \frac{(i\theta)^m}{m!} S(m, q) q n^q. \quad (4.34)$$

Die beiden Gleichungen (4.32) und (4.34) können nun auf (4.28) angewendet werden, um $H_{\text{AHM}}^{(0)}$ in folgende vereinfachte Form zu bringen

$$H_{\text{AHM}}^{(0)} = L \left\{ -J2 \operatorname{Re} \left[G(\theta, n) e^{-i(k_0+\beta)a} \right] n + \frac{U}{2} n^2 \right\}. \quad (4.35)$$

Durch Verwendung der Definition von $G(\theta, n)$ aus (4.31) und β aus (2.48) ergibt sich dann:

$$H_{\text{AHM}}^{(0)} = L \left\{ -J2 e^{-2n \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos(n \sin \theta - k_0 a - n\theta) n + \frac{U}{2} n^2 \right\} = E_0. \quad (4.36)$$

Hier beschreibt $E_0(n, k_0, \theta, J, U)$ das kanonische Potenzial, da das AHM in Abschnitt 2.2 für ein kanonisches Ensemble hergeleitet wurde. Des Weiteren sind für ein gegebenes kanonisches System alle Parameter außer k_0 definiert, somit kann dieser durch die Extremisierung von E_0 bestimmt werden.

$$\frac{\partial E_0}{\partial k_0} = L \left[-J 2 e^{-2n \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin(n \sin \theta - k_0 a - n\theta) n a \right] = 0. \quad (4.37)$$

Da $J, L, n, a > 0$ aufgrund ihrer Definition gilt, ergibt sich unmittelbar:

$$\sin(n \sin \theta - k_0 a - n\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad k'_0 = \frac{n \sin \theta - n\theta + m\pi}{a}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.38)$$

Zudem muss das Extremum ein Minimum sein, es gilt also für die zweite Ableitung

$$\left. \frac{\partial^2 E_0}{\partial k_0^2} \right|_{k_0=k'_0} = L \left[J 2 e^{-2n \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos(n \sin \theta - k_0 a - n\theta) n a^2 \right] \Big|_{k_0=k'_0}. \quad (4.39)$$

Einsetzen von (4.38) in (4.39) ergibt

$$\left. \frac{\partial^2 E_0}{\partial k_0^2} \right|_{k_0=k'_0} = L \left[J 2 e^{-2n \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos(-m\pi) n a^2 \right] > 0, \quad (4.40)$$

Somit ist m gerade. Für den Impuls des Grundzustands folgt (4.38):

$$k'_0 = \frac{n(\sin \theta - \theta)}{a}. \quad (4.41)$$

Hier ist direkt zu sehen, dass für den bosonischen Fall $\theta = 0$ der Impuls des Grundzustands k_0 bei 0 liegt, was identisch zum kanonischen Bose-Gas in Abschnitt 3.3 ist.

4.4 Bogoljubov-Transformation des Anyon-Hubbard-Modells

Die Bogoljubov-Transformation kann für den Fluktuationsteil (4.29) des AHM Hamilton-Operator durchgeführt werden. Hierfür wird der Operator zunächst in die generalisierte Form von (3.55) gebracht. Zunächst wird die Substitution $q = k - k_0$ durchgeführt, sodass sich der $H_{\text{AHM}}^{(1)}$ ergibt zu:

$$\begin{aligned}
H_{\text{AHM}}^{(1)} = & \sum_{q \neq 0}^L -J \left(\left[[D(n_{k_0})^2 - 1] e^{-i(k_0+\beta)a} + [D(n_{k_0}) + 1] e^{-i(q+k_0+\beta)a} \right] \hat{n}_{q+k_0} \right. \\
& + \left[\frac{D(n_{k_0})^2 + D(n_{k_0})}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} \right] d_{q+k_0}^\dagger d_{k_0-q}^\dagger \\
& + \left. \left[\frac{D(n_{k_0})^2 - D(n_{k_0})}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} + D(n_{k_0}) e^{-i(k_0-q+\beta)a} \right] d_{q+k_0} d_{k_0-q} \right) (G(\theta, n_{k_0}) + \text{h.c.}) \\
& + \frac{U n_{k_0}}{2} (2\hat{n}_{k_0+q} + d_{q+k_0} d_{k_0-q} + d_{q+k_0}^\dagger d_{k_0-q}^\dagger).
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Dies lässt sich auf folgende Form bringen

$$H_{\text{AHM}}^{(1)} = \sum_{q \neq 0}^L (A_q \hat{n}_{q+k_0} + B_q d_{q+k_0}^\dagger d_{k_0-q}^\dagger + \text{h.c.}) \quad . \tag{4.43}$$

Die Koeffizienten A_q und B_q in (4.43) lauten somit:

$$A_q = -J \left([D(n_{k_0})^2 - 1] e^{-i(k_0+\beta)a} + [D(n_{k_0}) + 1] e^{-i(q+k_0+\beta)a} + \text{h.c.} \right) G(\theta, n_{k_0}) + U n_{k_0}, \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
B_q = -J \left\{ \left[\frac{D(n_{k_0})^2 + D(n_{k_0})}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} \right] G(\theta, n_{k_0}) + \left[\frac{D(n_{k_0})^2 - D(n_{k_0})}{2} e^{-i(k_0+\beta)a} \right. \right. \\
\left. \left. + D(n_{k_0}) e^{-i(k_0-q+\beta)a} \right] G(\theta, n_{k_0})^* + \text{h.c.} \right\} + \frac{U n_{k_0}}{2}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Für die bessere Übersicht werden zunächst die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\gamma = J e^{-2n_{k_0} \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \tag{4.46}$$

$$\varphi = n_{k_0} \sin(\theta) - k_0 a - n\theta, \tag{4.47}$$

$$n_0 = n_{k_0}. \tag{4.48}$$

Num kann die Definition von $G(\theta, n)$ aus (4.31) und β aus (2.48) auf (4.44) und (4.45) angewendet werden. Es ergibt sich anschließend für die Koeffizienten A_q und B_q , wobei die Terme durch Anwenden der trigonometrischen Additionstheoreme weiter vereinfacht wurden:

$$A_q = -2\gamma \left[-2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) - 4n_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi + \theta) - \cos(\varphi) \right. \\ \left. + 2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi - qa\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos(\varphi - qa) \right] + Un_0, \quad (4.49)$$

$$B_q = -\gamma \left[-2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) - 4n_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi + \theta) \right. \\ \left. + 2in_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + n_0 (e^{-i\theta} - 1) e^{-i(\varphi+qa)} \right] + \frac{Un_0}{2}. \quad (4.50)$$

Anschließend kann die Bogoljubov-Dispersion E_q unmittelbar aus (3.74) für den AHM abgelesen werden:

$$E_q = \left(4Un_0\gamma \cos(\varphi) (1 - \cos(qa)) + 4\gamma^2 \left\{ \cos(\varphi)(1 - \cos(qa)) \right. \right. \\ \left. \left[\cos(\varphi)(1 - \cos(qa)) + 8n_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\varphi + \theta) \right. \right. \\ \left. \left. - 4n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) (1 - \cos(qa)) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \\ \left. - 2\gamma \left[2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + \sin(\varphi) \right] \sin(qa) \right). \quad (4.51)$$

Es ist zu beobachten, dass der Wurzelterm in (4.51) bezüglich $q \rightarrow -q$ gerade ist, während der verbleibende Term ungerade ist. Um zu überprüfen, ob die Dispersion keine Energielücke besitzt, kann die Dispersion für $q \rightarrow 0$ genähert werden. Dabei gelten für die trigonometrischen Funktionen die folgenden Näherungen:

$$\sin(qa) \stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} qa, \quad (4.52)$$

$$\cos(qa) \stackrel{q \rightarrow 0}{\approx} 1 - \frac{(qa)^2}{2}. \quad (4.53)$$

Die Dispersion für $q \rightarrow 0$ lautet dann:

$$E_q|_{q \rightarrow 0} \approx \left\{ 2\gamma^2 \cos \varphi \left[8n_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\theta + \varphi) + 8n_0 \sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \right] \right. \\ \left. + 2Un_0\gamma \cos(\varphi) \right\}^{\frac{1}{2}} |qa| - 2\gamma \left[2n_0 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + \sin \varphi \right] qa. \quad (4.54)$$

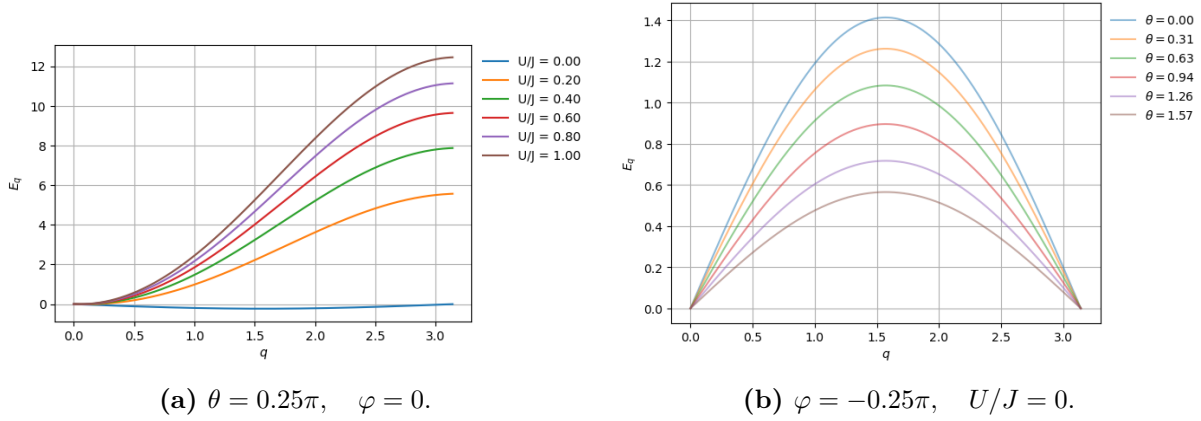


Abbildung 4.1: Energiedispersion E_q als Funktion von q für $n_0 = 0.3$.

Es ist zu sehen, dass die Dispersion lückenlos ist, also $E_q|_{q \rightarrow 0} = 0$ gilt. Dies ist auch anhand der dargestellten Dispersionen in Abbildung 4.1 zu erkennen, welche für verschiedene Werte von U/J , θ und φ geplottet wurden. Somit erfüllt die Bogoljubov-Dispersion des AHM, genauso wie die Bogoljubov-Dispersion für wechselwirkende Bose-Gase in Abschnitt 3.3, das Nambu-Goldstone Theorem. Die hier erhaltene Energiedispersion kann mit der der großkanonischen Rechnung von B. H. Tang [6], verglichen werden:

$$E_{q,\text{GK}} = \left(4U n_0 \gamma (1 - \cos(qa)) + 4\gamma^2 \left\{ (1 - \cos(qa)) \left[(1 - \cos(qa)) + 8n_0^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta) - 4n_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (1 - \cos(qa)) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} - 2\gamma n_0 \sin \theta \sin(qa) \right) \quad (4.55)$$

Die großkanonische Energie-Dispersion (4.55) kann auch für $q \rightarrow 0$ untersucht werden:

$$E_{q,\text{GK}}|_{q \rightarrow 0} \approx \left(2\gamma^2 \left[8n_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\theta) + 8n_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + 2U n_0 \gamma \right)^{\frac{1}{2}} |qa| - 2\gamma n_0 \sin \theta qa. \quad (4.56)$$

Vergleicht man (4.54) und (4.56), so ist zu sehen, dass die kanonische Bogoljubov-Dispersion unabhängig von φ keine Energielücke besitzt. Dies bedeutet dann wiederum, dass φ keinerlei Einschränkung unterlegen ist und damit ein freier Parameter ist. Um das durch die Bogoljubov-Transformation entstehende System aus nicht wechselwirkenden Landau-Quasi-Teilchen, vollständig beschreiben zu können, muss dafür φ noch bestimmt werden. Denn solange das System nicht vollständig beschrieben ist, können nur in Teilen belastbare Aussagen gemacht werden. Bei der großkanonischen Bogoljubov-Dispersion von B. H. Tang [6] ist φ bereits dadurch bestimmt, dass für eine Dispersion ohne Energielücke das chemische Potenzial aus einer Molekularfeldnäherung eingesetzt werden muss. Dadurch wird k_0 und somit auch φ festgelegt, was zu einem vollständig beschriebenen System führt. Und wir beobachten, dass (4.51) für $\varphi = 0$ in (4.55) übergeht. Zudem existiert auch bei

der großkanonischen Dispersion keine Energielücke, was in (4.56) zu sehen ist. Weiterhin gibt es in (4.54) einen in q geraden Term und einen in q ungeraden Term. Dies führt dazu, dass es zwei unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten für $q \rightarrow 0^+$ und $q \rightarrow 0^-$ gibt, was eine direkte Folge der Paritätsbrechung durch die Anyonen Algebra ist [28]. Die beiden Schallgeschwindigkeiten lauten:

$$\begin{aligned}
 c^\pm = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_q}{\partial q} \bigg|_{q \rightarrow 0^\pm} &= \pm \frac{a}{\hbar} \left(2U n_0 J e^{-2n_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos(\varphi) \right. \\
 &\quad \left. + 16J^2 e^{-4n_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \varphi \left[n_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos(\theta + \varphi) + n_0 \sin \frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \frac{2J e^{-2n_0 \sin^2 \frac{\theta}{2}} a}{\hbar} \left[2n_0 \sin \frac{\theta}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + \sin \varphi \right].
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Sie können nicht weiter angewendet werden, da φ noch nicht selbstkonsistent festgelegt wurde. Mit der Bogoljubov-Transformation kann im nächsten Schritt die Grundzustandsdichte n_0 unter Berücksichtigung der Fluktuationen bestimmt werden.

5 Entleerung des Grundzustands

In diesem Kapitel wird die Entleerung des Grundzustands von Anyonen untersucht. Es wird also untersucht, wie viele Teilchen sich für vorgegebene Systemparameter N, L, U, J, θ , im Grundzustand befinden. Hierfür gibt es verschiedene Näherungen, die Bogoljubov- und die Popov-Näherung, welche für die Grundzustandsbesetzung N_0 bzw. deren Dichte n_0 , in diesem Kapitel untersucht werden.

5.1 Bogoljubov-Näherung

Für alle Näherungen wird grundsätzlich die Gleichung (3.78) verwendet die die Grundzustandsbesetzung festlegt. Jedoch werden die ursprünglichen Operatoren $b_k, b_k^\dagger$ mit (3.50) durch die Bogoljubov Operatoren $B_k, B_k^\dagger$ ausgedrückt, um die Grundzustandsbesetzung zu berechnen:

$$n = \frac{1}{L} \sum_q \langle \hat{N}_{k_0+q} \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}} = n_0 + \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} \langle b_{k_0+q}^\dagger b_{k_0+q} \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}}. \quad (5.1)$$

Hierbei ist $\langle \hat{N}_{k_0+q} \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}}$ der Erwartungswert der Teilchenzahl. Der Erwartungswert $\langle \cdot \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}}$ ist hierbei wie folgt definiert

$$\langle \cdot \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}} = \langle 0 | \cdot | 0 \rangle, \quad (5.2)$$

wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand der Landau-Quasiteilchen bezeichnet, d.h. es gilt:

$$\hat{B}_k |0\rangle = 0, \quad (5.3)$$

$$\langle 0 | \hat{B}_k = 0, \quad (5.4)$$

$$\langle 0 | \hat{B}_k^\dagger | \hat{B}_{k'}^\dagger | 0 \rangle = \langle k | k' \rangle = \delta_{k,k'}. \quad (5.5)$$

Setzt man die Transformation (3.25) in die Gleichung (5.1) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} n = n_0 + \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} (u_q^2 + v_q^2) \langle \hat{B}_{k_0-q}^\dagger \hat{B}_{k_0-q} \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}} + v_q^2 \\ - (u_q v_q + u_q v_q) \left(\langle \hat{B}_{k_0+q}^\dagger \hat{B}_{k_0-q}^\dagger \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}} - \langle \hat{B}_{k_0+q} \hat{B}_{k_0-q} \rangle_{\hat{H}_{\text{diag}}} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hierbei verschwindet der letzte Term aufgrund von (5.3), (5.4) und (5.5). Der erste führt aufgrund von nichtwechselwirkenden bosonischen Quasiteilchen, auf eine Bose-Einstein-Verteilung. Werden die Gleichungen (3.67) und (3.68) für die Bogoljubov Koeffizienten u_q und v_q eingesetzt, so ergibt sich:

$$n = n_0 + \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} \frac{A_q + A_{-q}}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re}(B_q + B_{-q})]^2}} \frac{1}{e^{\frac{E_q}{k_b T}} - 1} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_q + A_{-q}}{\sqrt{(A_q + A_{-q})^2 - [2 \operatorname{Re}(B_q + B_{-q})]^2}} - 1 \right\}. \quad (5.7)$$

Bei $T = 0\text{K}$ verschwindet die Bose-Einstein-Verteilung, zudem können die Koeffizienten A_q , B_q aus (4.49), (4.50) eingesetzt werden. Anschließend liefert die Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen eine vereinfachte Form. Damit ist die Grundzustandsbesetzung von der Form:

$$n_0 \stackrel{T=0\text{K}}{=} n - \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} \Delta n(q). \quad (5.8)$$

Die Funktion $\Delta n(q)$ beschreibt die spektrale Entleerung des Grundzustands, d.h. die Anzahl der Teilchen, die sich in einem Anregungszustand mit Impuls q befinden. Sie lautet

$$\Delta n(q) = \frac{Z(q)}{N(q)} - \frac{1}{2}, \quad (5.9)$$

Wobei die Koeffizienten $Z(q)$ und $N(q)$ wie folgt definiert sind:

$$Z(q) = 2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta + \varphi) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \cos^2\left(\frac{qa}{2}\right) \right] + 2 \cos \varphi \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) + \frac{Un_0}{2J} e^{2n_0 \sin^2(\frac{\theta}{2})}, \quad (5.10)$$

$$N(q) = \left\{ \cos \varphi \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \left[\frac{Un_0}{J} e^{2n_0 \sin^2(\frac{\theta}{2})} + 2 \cos \varphi \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) + 8n_0^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta + \varphi) + 8n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \cos^2\left(\frac{qa}{2}\right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Hierbei wurde die Abkürzung φ aus (4.47) verwendet.

Zunächst lässt sich folgendes für den bosonischen Fall, also $\theta = 0$, ohne Wechselwirkung, somit $U/J = 0$, feststellen:

$$\Delta n(q) \Big|_{\theta=0, U=0} = \frac{\cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right)}{\sqrt{\left[\cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \right] \left[\cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \right]}} - \frac{1}{2} = 0. \quad (5.12)$$

Somit befinden sich alle Teilchen im Grundzustand und es liegt, wie zu erwarten, ein vollständiges Bose-Einstein-Kondensat vor.

Außerdem muss gewährleistet sein, dass der Radiant im Nenner von (5.9) positiv sein muss. Dies führt auf folgende Bedingung:

$$0 < \cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \left[\frac{Un_0}{J} e^{2n_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} + 2 \cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) + 8n_0^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta + \varphi) + 8n_0 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} + \varphi \right) \cos^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \right]. \quad (5.13)$$

Wird diese nach U/J aufgelöst, so ergibt sich die Bedingung

$$\frac{U}{J} \geq -\frac{e^{2n_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}{n_0} \left[2 \cos \varphi \sin^2 \left(\frac{qa}{2} \right) + 8n_0^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta + \varphi) + 8n_0 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} + \varphi \right) \cos^2 \left(\frac{qa}{2} \right) \right], \quad (5.14)$$

wobei U/J immer größer als 0 sein muss. Abhängig von q können verschiedene Fälle betrachtet werden. Zum einen gilt für $q \rightarrow 0$

$$\frac{U}{J} \geq -8e^{2n_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[n_0 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta + \varphi) + \sin \left(\frac{\theta}{2} + \varphi \right) \right], \quad (5.15)$$

woraus folgt, dass $n_0 \leq 1$ sein muss, damit die Ungleichheit für beliebige θ, φ erfüllt ist. Aus dem Fall $q \rightarrow \pm\pi$ ergibt sich

$$\frac{U}{J} \geq -\frac{2e^{2n_0 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}}{n_0} \left[\cos \varphi + 4n_0^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos(\theta + \varphi) \right], \quad (5.16)$$

somit gilt für $\theta = \pi$:

$$n_0 \leq \frac{1}{2}. \quad (5.17)$$

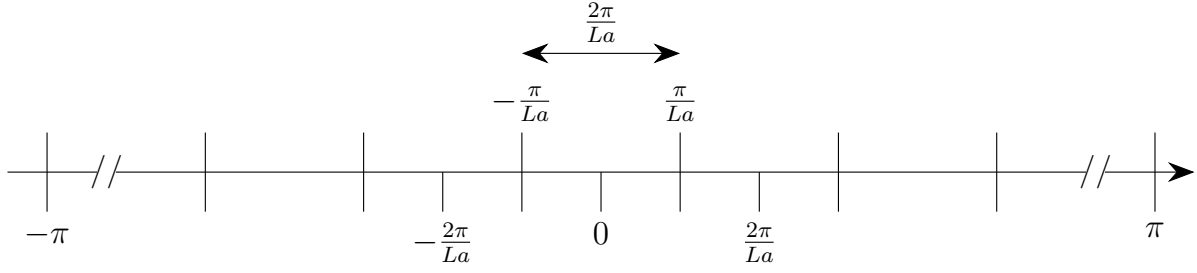


Abbildung 5.1: Darstellung der Wellenvektoren q in der ersten Brillouin-Zone.

Um eine stetige spektrale Entleerung über die erste Brillouin-Zone für alle θ zu gewährleisten, nicht mehr als die Hälfte der Teilchen im Grundzustand sein.

Wird die Definition von φ aus (4.47) mit der Formel für den Impuls des Grundzustands k_0 aus (4.41) kombiniert, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varphi &= n_{k_0} \sin(\theta) - k'_0 a - n\theta \\ &= n_{k_0} \sin(\theta) - n_{k_0} \sin(\theta) + n\theta - n\theta \\ &= (n_{k_0} - n) \sin(\theta).\end{aligned}\tag{5.18}$$

Des Weiteren kann in (5.8) die Summe über q im Hinblick auf den thermodynamischen Limes in ein Integral überführt werden. Hierfür wird die Euler-Maclaurin-Formel [24] in führender Ordnung verwendet:

$$\sum_{q=a}^b \Delta n(q) = \int_a^b \Delta n(q) dq.\tag{5.19}$$

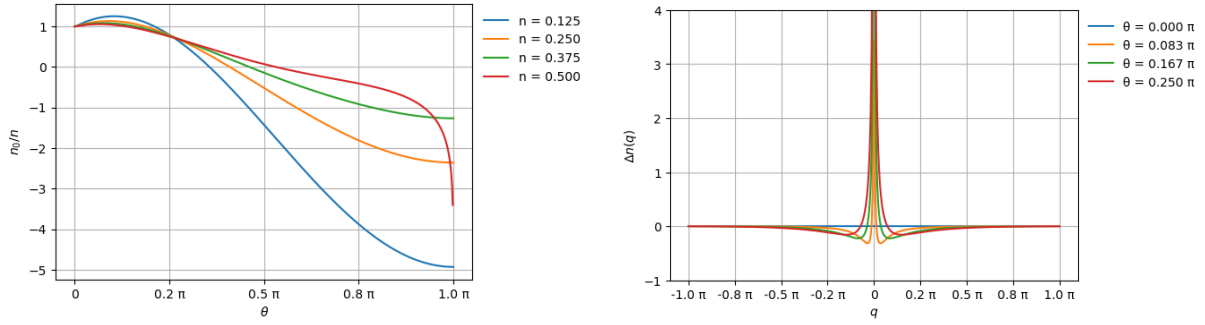
Wird nun die Definition von $q = k - k_0$ und k aus (4.11) verwendet, so ergibt sich für die Summe (5.8) für ungerades L :

$$\frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} \Delta n(q) = \frac{a}{2\pi} \left[\int_{-\pi-k_0}^{-\frac{2\pi}{La}} \Delta n(q) dq + \int_{\frac{2\pi}{La}}^{\pi-k_0} \Delta n(q) dq \right].\tag{5.20}$$

Bei der Integration wird also der Wellenvektor $q = 0$, bzw. $k = k_0$, an dem es zu makroskopischen Besetzung kommt, ausgespart. Dadurch erhalten die Integrale einen Infrarot-Cutoff $\pm 2\pi/La$. Falls N, n als konstant und L als variable Größe betrachtet wird, ergibt sich zudem:

$$L = \frac{N}{n}.\tag{5.21}$$

Wenn nun beachtet wird, dass ein Gitterplatz im Impulsraum eine Ausdehnung $2\pi/La$ hat und dies auch für den Grundzustand gilt, was in Abbildung 5.1 dargestellt ist, kann der Infrarot-Cutoff zu $\pm \pi n/Na$ reduziert werden:



(a) Relative Besetzung n_0/n über θ für verschiedene Besetzungszahlen n . (b) Spektrale Besetzungsdichte $\Delta n(q)$ über Wellenvektor q für verschiedene θ mit $n = 0.2$.

Abbildung 5.2: Numerische Berechnung der Grundzustandsbesetzung mit Molekularfeldnäherung, $N = 41$, $U/J = 0$ und $\varphi = \varphi_{\text{MF}} = 0$.

$$\frac{1}{L} \sum_{q \neq 0} \Delta n(q) = \frac{a}{2\pi} \left[\int_{-\pi-k_0}^{-\frac{\pi n}{Na}} \Delta n(q) dq + \int_{\frac{\pi n}{Na}}^{\pi-k_0} \Delta n(q) dq \right]. \quad (5.22)$$

Für die Bogoljubov-Näherung wird für die spektrale Grundzustandsdichte $\Delta n(q)$ die Molekularfeldnäherung verwendet, also:

$$\Delta n(q) \Big|_{n_0=n}, \quad (5.23)$$

Somit gilt für φ nach (5.18):

$$\varphi_{\text{MF}} = 0. \quad (5.24)$$

Dies ist möglich, da die Energiedispersion in Abschnitt 4.4 unabhängig von φ keine Energielücke hat. Somit ist φ durch die Bogoljubov-Transformation nicht festgelegt und kann beispielsweise durch die Molekularfeldnäherung festgesetzt werden.

Wird nun φ_{MF} verwendet, so kann n_0 für verschiedene θ und n numerisch berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.2 (a) dargestellt. In dem Graphen sind direkt zwei Probleme zu erkennen. Zum einen ist n_0/n für manche θ negativ, was unphysikalisch ist. Das andere Problem ist, dass die Grundzustandsdichte für kleine θ größer ist als die Gesamtdichte. Der Grund hierfür ist in Abbildung 5.2 (b) erkennbar, denn dort ist die Besetzungsdichte für gewisse q negativ. Dies ist nicht realistisch, da eine Dichte nicht negativ sein kann. Somit kann die einfache Bogoljubov-Näherung nicht verwendet werden, um die Grundzustandsdichte korrekt zu berechnen.

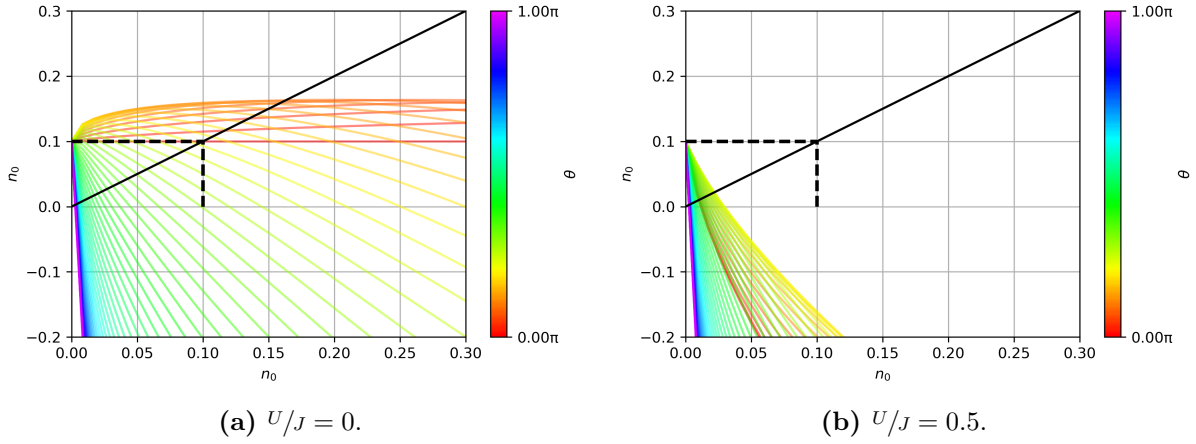


Abbildung 5.3: Darstellung von f_1, f_2 aus (5.26), (5.27) als Funktion von n_0 . Mit $N = 41$, $n = 0.1$, $U/J = 0$ und $\varphi = (n_0 - n) \sin(\theta)$. Schwarze Linie: f_1 , gestrichelte Linie markiert den Gültigkeitsbereich $n_0 < n$.

5.2 Popov-Näherung

Der nächste Schritt ist eine Popov-Näherung mit Selbstkonsistenz. Hierbei wird für φ Gleichung (5.18) verwendet. Zudem wird das Ergebnis für n_0 immer wieder in die Gleichung (5.8) eingesetzt, somit gilt nicht mehr $n_0 = n$ wie bei der Molekularfeldtheorie, sondern n_0 wird iterativ berechnet. Falls nun die Berechnung terminiert, also die Änderung von n_0 kleiner als ein gewisser Schwellwert ist, kann n_0 als berechnet angesehen werden. Alternativ kann folgende Überlegung angestellt werden, wenn ein n_0 existiert, für das gilt:

$$n_0 = n - \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi-k_0}^{-\frac{\pi n}{Na}} \Delta n(q) dq + \int_{\frac{\pi n}{Na}}^{\pi-k_0} \Delta n(q) dq \right). \quad (5.25)$$

So müssen sich, wenn man dies grafisch betrachtet, zwei Kurven schneiden. Die eine Kurve lautet

$$f_1(n_0) = n_0, \quad (5.26)$$

und die andere

$$f_2(n_0) = n - \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi-k_0}^{-\frac{\pi n}{Na}} \Delta n(q) dq + \int_{\frac{\pi n}{Na}}^{\pi-k_0} \Delta n(q) dq \right). \quad (5.27)$$

Falls es einen Schnittpunkt gibt, so ist dieser Schnittpunkt eine Lösung für die Selbstkonsistenzgleichung. Des Weiteren kann auf Basis des Schnittpunkts die physikalische Konsistenz der Lösung untersucht werden, da n_0 bspw. nicht negativ oder größer als n sein darf.

In Abbildung 5.3 sind die beiden Funktionen $f_1(n_0)$ und $f_2(n_0)$ für verschiedene θ dargestellt, wobei $N = 41$ aufgrund von Experimenten mit ähnlicher Teilchenzahl [31] gewählt wurde. Es ist zu erkennen, dass es zwar für alle θ einen Schnittpunkt gibt. Jedoch kann es für kleine θ Schnittpunkt geben, die außerhalb des Gültigkeitsbereichs $0 < n_0 < n$ liegen. Es

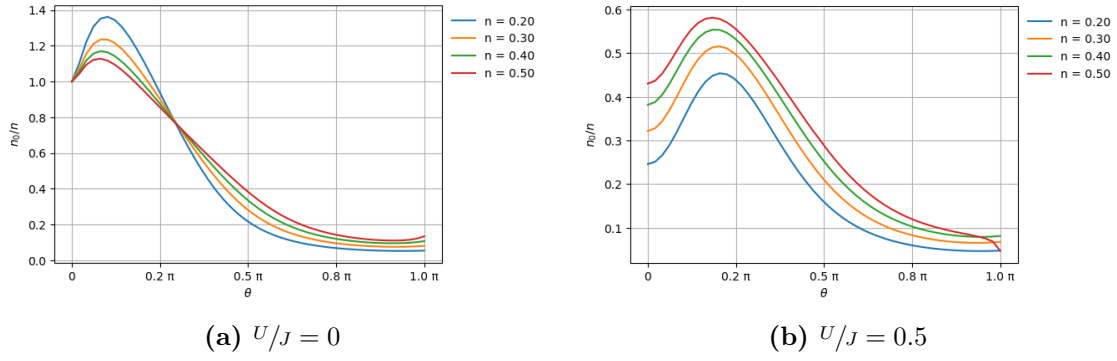


Abbildung 5.4: Berechnung der relativen Besetzung n_0/n mittels Selbstkonsistenz auf θ für verschiedene n . Mit $N = 41$, $\frac{U}{J} = 0$ und $\varphi = (n_0 - n) \sin(\theta)$.

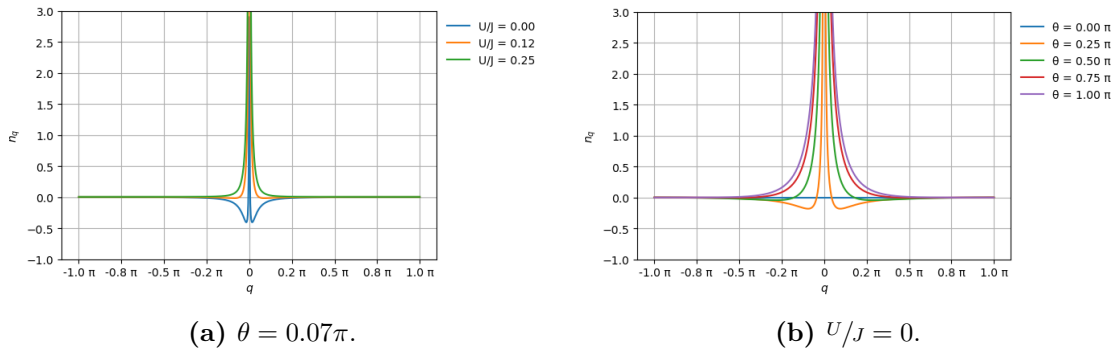


Abbildung 5.5: Berechnung von $\Delta n(q)$ für verschiedene $U/J, \theta$. Mit $N = 41$, $n_0 = 0.1$, $n = 0.2$ und $\varphi = (n_0 - n) \sin(\theta)$.

ist jedoch zu beobachten, dass dies durch eine Wechselwirkung $U/J > 0$ korrigiert werden kann. So existieren in Abbildung 5.3 (a) Schnittpunkte außerhalb des Gültigkeitsbereichs bei $n_0 > 1$, in Abbildung 5.3 (b) existieren aber Schnittpunkte mit $n_0 > 1$ nicht. Dies kann damit erklärt werden, dass es hier zwei Arten von Grundzustandsentleerungen gibt, eine die durch die Statistik der Anyonen entsteht und eine andere die durch die Wechselwirkung zustande kommt [28]. Die Wechselwirkung sorgt nun dafür, dass der statistische Zuwachs $n_0 > n$ durch eine entsprechende Entleerung ausgeglichen wird. Dieser Ausgleich fehlt jedoch, wenn keine Wechselwirkung existiert, weshalb dann eine zu große Grundzustandsdichte in Abbildungen 5.4 (a), 5.4 (b) zu beobachten ist. Weiterhin tritt dieses Problem nicht nur für kleine n auf, sondern unabhängig davon, was Abbildungen 5.4 (a) zeigt. Um die Ursache für zu großen Dichten zu finden, können die spektralen Beiträge der angeregten Zustände $\Delta n(q)$ genauer untersucht werden.

Hierzu ist in den Abbildungen 5.5 zu erkennen, dass eine negative Besetzungsdichte abhängig von U/J und n_0 für kleine q existieren kann, was zu einem Ansteigen der Grundzustandsdichte n_0 im Gegensatz zu n führen kann. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung (5.8), da n_0 größer als n ist, falls die Summe bzw. das Integral aus Gleichung (5.20) negativ ist. Eine weitere Beobachtung ist, dass der negative Anteil von $\Delta n(q)$ kleiner wird, falls eine Wechselwirkung existiert, wie aus Abbildung 5.5 (a) hervorgeht. Dadurch wird das Integral wieder positiv und somit verschwindet die Inkonsistenz, dass n_0 größer als n ist. Das Gleiche tritt auch für größere θ auf, wie in Abbildung 5.5 (b) zu sehen ist. Da $\Delta n(q)$ die Dichte der angeregten Zustände beschreibt, sollte diese nicht negativ sein und somit auch keine Nullstellen besitzen. Um den Zusammenhang zwischen den

negativen Beiträgen und den Variablen $n_0, \varphi, \theta, U/J$ zu untersuchen, können die Nullstellen der Funktion $\Delta n(q)$ genauer betrachtet werden. Aufgrund der positiven Divergenz bei $q = 0$, was unmittelbar aus dem Nenner der Gleichung (5.9) folgt, muss es negative Beiträge geben, falls eine Nullstelle existiert. Wird die Gleichung (5.9) gleich null gesetzt und für kleine q entwickelt, so ergibt sich für die Nullstellen von $\Delta n(q)$ folgende Näherung:

$$qa = \sqrt{\frac{N_Z(q)}{N_N(q)}}. \quad (5.28)$$

Hierbei treten die folgenden Koeffizienten $N_Z(q)$ und $N_N(q)$ auf:

$$\begin{aligned} N_Z(q) = & \alpha^4 \cos^2(\theta + \varphi) + 4\alpha^3 \cos(\theta + \varphi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + 4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ & \times \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + \alpha\beta \left(\alpha \cos(\theta + \varphi) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \right) + \frac{\beta^2}{4}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} N_N(q) = & \alpha^3 \cos(\theta + \varphi) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) + 2\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \\ & - 2\alpha \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right) \cos(\varphi) + \frac{\alpha\beta}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varphi\right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Und es wurden der besseren Übersicht wegen die folgenden Koeffizienten definiert:

$$\alpha = 2n_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (5.31)$$

$$\beta = \frac{Un_0}{J} e^{2n_0 \sin^2(\frac{\theta}{2})}. \quad (5.32)$$

Nun kann folgende Überlegung angestellt werden. Da Gleichung (5.9) von den Variablen $n_0, \varphi, \theta, U/J$ abhängt, kann ein geeignetes φ existieren, um einen negativen Beitrag zu vermeiden.

Das ist in der Abbildung 5.6 die Gleichung (5.28) für verschiedene φ dargestellt. Es gibt zwei wichtige Beobachtungen. Zum einen geht die Nullstelle von $\Delta n(q)$ für $\varphi = 0$ für kleine θ gegen 0, was die negativen Beiträge von $\Delta n(q)$ in Abbildung 5.5 (b) erklärt. Dies liegt daran, dass $\varphi = (n_0 - n)[\sin(\theta) - \theta]$ verwendet wurde, was für kleine θ gegen 0 geht. Deshalb rückt die Nullstelle immer vor den Infrarot-Cutoff, was zu negativen Beiträgen des Integrals und $n_0 > n$ führt. Die zweite Beobachtung ist, dass geeignete φ existieren, bei denen die Nullstelle entweder weit entfernt von $q = 0$ liegt oder gar nicht existiert, wobei hierfür primär nur der Bereich für kleine q aufgrund der Näherung relevant ist.

Somit ist die Popov-Näherung, welche eine Selbstkonsistenzgleichung für n_0 verwendet, nicht zwangsläufig falsch, sondern lediglich zu ungenau. Dies könnte daran liegen, dass

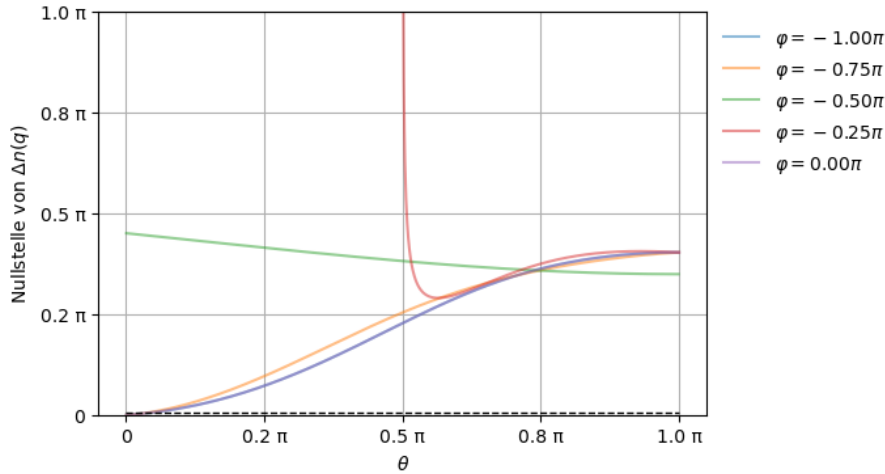


Abbildung 5.6: Näherung der Nullstellen von $\Delta n(q)$ für $q \rightarrow 0$ auf θ für verschiedene φ , gestrichelte Linie markiert Impulsabschnitt des Grundzustands. Mit $U/J = 0$ und $n_0 = 0.2$.

die Energiedispersion der Bogoljubov-Transformation (4.51) unabhängig von φ lückenfrei ist. Somit ist φ nicht festgelegt und ein weiterer Freiheitsgrad. Eine neue Näherung für k_0 könnte φ nun so festlegen, dass dann die negativen Beiträge von $\Delta n(q)$ verhindert werden, was dann zu einem realistischen Ergebnis für n_0 führen würde. Diese Näherung könnte dadurch erhalten werden, dass nicht nur der Grundzustand wie in Abschnitt 4.3 extremisiert wird, sondern auch der zusätzliche Beitrag

$$\frac{1}{2} \sum_{q \neq 0} (E_q - A_q), \quad (5.33)$$

welcher durch die Bogoljubov-Transformation entsteht (3.75). Somit würde eine weitere Selbstkonsistenzgleichung für k_0 entstehen, was zu zwei gekoppelten Selbstkonsistenzgleichungen für k_0 und n_0 führt, welche anschließend gelöst werden müssen. Im Rahmen der vorliegenden Bachelorarbeit konnte zumindest gezeigt werden, dass eine Selbstkonsistenzgleichung nur für n_0 nicht ausreicht, um die Grundzustandsdichte korrekt zu berechnen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und es wird ein Ausblick gegeben, welche mögliche Fragestellungen sich daraus ergeben. Ausgang dieser Arbeit war eine Vorangegangene von B. H. Tang [6], in welcher das eindimensionale Anyon-Hubbard-Modell in einem großkanonischen Ensemble untersucht wurde. Ziel dieser Arbeit war es, das Anyon-Hubbard-Modell für ein kanonisches Ensemble herzuleiten und anschließend eine Bogoljubov-Transformation durchzuführen. Abschließend sollten die erzielten Ergebnisse mit denen des großkanonischen Ensemble verglichen werden.

Zu Beginn wurden die für Anyonen definierenden Kommutatorrelationen (2.10), (2.11) sowie das Anyon-Hubbard-Modell (2.19) eingeführt. Anschließend wurde mittels einer fraktionalen Jordan-Wigner-Transformation das Anyon-Hubbard-Modell in ein bosonisches Modell überführt. Aufgrund dieser Transformation entstand ein lokaler Phasenfaktor in Form einer Peierls-Phase. Diese wurde mithilfe einer lokalen, von der Besetzungszahl abhängigen Eichung (2.46), (2.48) eliminiert, um die globale Randbedingung (2.52) zurückzugewinnen. Anschließend wurde der Hamilton-Operator des AHM's mittels Taylor-Entwicklung normal-geordnet und in den Impulsraum transformiert, siehe (4.28), (4.29). Nachfolgend wurde eine Bogoljubov-Transformation in Abschnitt 3.2.2 verwendet, um den Hamilton-Operator zu diagonalisieren. Diese lieferte eine Energiedispersion ohne Energielücke laut Gleichung (4.51), was dem Nambu-Goldstone-Theorem entspricht. Der Vergleich zum großkanonischen Resultat zeigte, dass die Energiedispersion beim kanonischen Ensemble unabhängig vom Impuls des makroskopisch besetzten Grundzustands lückenfrei ist. Dies ist ein wichtiger Unterschied, da im großkanonischen Ensemble die Energiedispersion erst durch Einsetzen eines chemischen Potentials lückenfrei wird, welches sich aus einer Molekularfeld-Näherung ergibt [6]. Anschließend konnte gezeigt werden, dass zwei für die Propagation nach links und rechts unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten existieren, siehe Gleichung (4.57), was eine Folge der Paritätsbrechung durch die Anyonen-Algebra ist [28]. Zum Schluss wurde die Grundzustandsentleerung von Anyonen zu untersucht. Hierbei wurde zunächst die Bogoljubov-Näherung verwendet, um die Grundzustandsdichte n_0 zu berechnen. Danach ergaben sich zum einen Grundzustandsdichten, welche größer als die Gesamtdichte sind und zum anderen negative Dichten, was in Abbildung 5.2 (a) zu sehen ist. Der bosonische Fall $\theta = 0$ lieferte jedoch die erwarteten Ergebnisse gemäß (5.12). Da die Bogoljubov-Näherung im Allgemeinen nicht sinnvoll war, wurde eine Popov-Näherung mit Selbstkonsistenz verwendet, jedoch konnten auch hier negative Besetzungsdichten für die angeregten Zustände beobachtet werden. Dies ließ sich an einer zu großen Grundzustandsdichte erkennen, wie in Abbildung 5.4 (a) zu sehen ist. Eine genauere Untersuchung der spektralen Besetzungsdichten von angeregten Zuständen zeigte, dass diese wie in Abbildungen 5.5 negative Beiträge besitzen. Eine Nullstellenanalyse gemäß (5.28) lieferte die Erkenntnis, dass eine mögliche Ursache für die negativen Beiträge eine ungenaue Näherung für den Impuls des Grundzustands ist. Dies liegt daran, dass bei diesem nur der Beitrag des Grundzustands berücksichtigt wurde, jedoch nicht der Beitrag der angeregten Zustände gemäß (5.33), welcher durch die Bogoljubov-Transformation entsteht. Es ist also

notwendig, eine eigenständige Gleichung zur Bestimmung des Impulses des Grundzustands herzuleiten. Hierzu könnte die Gesamtenergie betrachtet werden, die sich aus einem Beitrag der Molekularfeldtheorie und einem Beitrag der Quanten-Fluktuationen zusammensetzt, siehe (3.75). Eine Extremalisierung der Gesamtenergie bezüglich des Impulses des Grundzustandes legt dann diesen fest. Somit sind dann zwei Gleichungen selbstkonsistent zu lösen, eine für die Grundzustandsbesetzung und eine für den Impuls des Grundzustands. Anschließend wäre das durch die Bogoljubov-Transformation entstehende System aus Landau-Quasiteilchen vollständig bestimmt, welches dann auch belastbare Ergebnisse für die Grundzustandsdichte und den Impuls des Grundzustands liefern könnte.

Danach könnte die Suprafluidität des Systems untersucht werden, indem man einen gleichförmige Translation des Systems durchführt und die lineare Antwort bestimmt.

Danksagung

Mein erster Dank geht an Axel Pelster. Er hat mich während der gesamten Bachelorarbeit mit Rat und Tat unterstützt, war immer erreichbar und hat mir stets hilfreiche Anmerkungen gegeben. Besonders sein sehr intensives Korrekturlesen hat mir besonders geholfen, und diverse orthografische und inhaltliche Fehler beseitigt. Vielen Dank dafür!

Weiteren Dank geht unter anderem an Nikolai Kaschewski, Sejung Yong, Johannes Stadtmüller und Martin Bonkhoff für die interessanten Diskussionen, die ich mit ihnen über dieses nicht ganz triviale Thema führen durfte. Außerdem möchte ich mich bei allen anderen bedanken, die mich während der Bachelorarbeit unterstützt haben.

Des Weiteren möchte ich mich beim Zweitgutachter Prof. Dr. James R. Anglin bedanken. Zum Schluss bedanke ich mich bei meinen Eltern und meiner Familie, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe. Alle wörtlich oder dem Inhalt nach aus fremden Arbeiten entnommenen Stellen, bildlichen Darstellungen und dergleichen habe ich als solche genau kenntlich gemacht. Für die abgegebene Arbeit bin ich als Autor vollumfänglich verantwortlich.

Kaiserslautern, 24.02.2026
Ort, Datum


Simon Becker

Literatur

- [1] M. Greiter, F. Wilczek. “Fractional Statistics”. In: *Annual Review of Condensed Matter Physics* (2022). DOI: 10.1146/annurev-conmatphys-040423-014045.
- [2] A. Pelster. *Bose-Einstein-Kondensation*. 2004. URL: <https://apelster.physik.rptu.de/Manuscripts/bec.pdf>.
- [3] J. Kwan, P. Segura, Y. Li, S. Kim, A. V. Gorshkov, A. Eckardt, B. Bakkali-Hassani, M. Greiner. “Realization of one-dimensional anyons with arbitrary statistical phase”. In: *Science* 386.6725 (2024), S. 1055–1060. DOI: 10.1126/science.adi3252. URL: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.adi3252>.
- [4] R. Gross, A. Marx. *Festkörperphysik*. München: De Gruyter Oldenbourg, 2014. ISBN: 9783110358704. DOI: doi:10.1524/9783110358704. URL: <https://doi.org/10.1524/9783110358704>.
- [5] T. Keilmann, S. A. Lanzmich, I. McCulloch, M. Roncaglia. “Statistically induced phase transitions and anyons in 1D optical lattices.” In: *Nature Communications* 2.361 (2010). DOI: 10.1038/ncomms1353.
- [6] B. H. Tang. “Bogoliubov Theory of Anyons in One Dimensional Lattice”. Magisterarb. Rheinland-Pfälzischen Technischen Universität, 2024. URL: <http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Theses/tang-master.pdf>.
- [7] J. Mickelsson. “Geometry of spin and statistics in classical and quantum mechanics”. In: *Physical Review D* 30 (1984), S. 1843–1845. DOI: 10.1103/physrevd.30.1843.
- [8] I. Duck, E. C. G. Sudarshan. *Pauli and the Spin-Statistics Theorem*. WORLD SCIENTIFIC, 1998. DOI: 10.1142/3457. eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/3457>. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/3457>.
- [9] J. Leinaas, J. Myrheim. “On the theory of identical particles”. In: *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)* 37 (1977), S. 1–23. DOI: 10.1007/bf02727953.
- [10] R. Feynman, A. Hibbs. “Quantum Mechanics and Path Integrals”. In: 1965.
- [11] F. Wilczek. “Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles”. In: *Physical Review Letters* 49 (1982), S. 957–959. DOI: 10.1103/physrevlett.49.957.
- [12] D. Jaksch, P. Zoller. “The cold atom Hubbard toolbox”. In: *Annals of Physics* 315 (2004), S. 52–79. DOI: 10.1016/j.aop.2004.09.010.
- [13] T. D. Kühner, S. White, H. Monien. “The one-dimensional Bose-Hubbard Model with nearest-neighbor interaction”. In: *Physical Review B* 61 (1999), S. 12474–12489.
- [14] A. Pelster. *Quantum Field Theory*. 2021. URL: <https://apelster.physik.rptu.de/Manuscripts/qft.pdf>.
- [15] F. Schwabl. *Statistische Mechanik*. Springer, 2000. ISBN: 9783540671589. URL: https://books.google.de/books/about/Statistische_Mechanik.html?id=bJeAAAAACAAJ&redir_esc=y.

- [16] M. Bonkhoff. “Interacting Anyons in a One-Dimensional Optical Lattice”. Magisterarb. Technische Universität Kaiserslautern, 2016. URL: <http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Theses/bonkhoff.pdf>.
- [17] P. Jordan, E. Wigner. “Über das Paulische Äquivalenzverbot”. In: *Zeitschrift für Physik* 47 (1928), S. 631–651. DOI: 10.1007/978-3-662-02781-3_9.
- [18] O. Derzhko. “Jordan-Wigner fermionization for spin-1/2 systems in two dimensions: A brief review”. In: (2001).
- [19] W. Louisell. *Quantum statistical properties of radiation*. Wiley, 1973. URL: <https://books.google.de/books?id=NRlRAAAAMAAJ>.
- [20] S. Dhar, B. Wang, M. Horvath, A. Vashisht, Y. Zeng, M. B. Zvonarev, N. Goldman, Y. Guo, M. Landini, H. C. Nägerl. “Observing anyonization of bosons in a quantum gas”. In: *Nature* 642 (8066 2025). DOI: 10.1038/s41586-025-09016-9. URL: <https://www.nature.com/articles/s41586-025-09016-9#citeas>.
- [21] N. N. Bogoljubov. “On the theory of superfluidity”. In: *J. Phys. (USSR)* 11 (1947), S. 23–32.
- [22] N. N. Bogoljubov, V. V. Tolmachov, D. V. Širkov. “A New Method in the Theory of Superconductivity”. In: *Fortschritte der Physik* 6.11-12 (1958), S. 605–682. DOI: <https://doi.org/10.1002/prop.19580061102>. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/prop.19580061102>.
- [23] H. Kleinert. *Particles And Quantum Fields*. World Scientific Publishing Company, 2016. ISBN: 9789814740920. URL: https://www.google.de/books/edition/Particles_And_Quantum_Fields/d1-2DAAAQBAJ?hl=de&gbpv=0.
- [24] I.N. Bronstein, K.A. Semendjaew. *Springer-Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. von Eberhard Zeidler. 3. Aufl. Frankfurt am Main: Springer Vieweg Wiesbaden, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2359-5>.
- [25] N. Yoichiro. “Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity”. In: *Phys. Rev.* 117 (3 1960), S. 648–663. DOI: 10.1103/PhysRev.117.648. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.117.648>.
- [26] J. Goldstone. “Field theories with Superconductor solutions”. In: *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* 19 (1961), S. 154–164. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02812722>.
- [27] Blasiak, P. and Horzela, A. and Penson, K. A. and Solomon, A. I. and Duchamp, G. H. E. “Combinatorics and Boson normal ordering: A gentle introduction”. In: *American Journal of Physics* 75.7 (Juli 2007), S. 639–646. ISSN: 1943-2909. DOI: 10.1119/1.2723799. URL: <http://dx.doi.org/10.1119/1.2723799>.
- [28] M. Bonkhoff. “Advances in Luttinger Liquid Theory: Applications to Lattice Anyons and Finite Spin Chains”. Magisterarb. Technische Universität Kaiserslautern, 2022. URL: <http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Theses/bonkhoff-phd.pdf>.
- [29] G. Tang, S. Eggert and A. Pelster. “Ground-state properties of anyons in a one-dimensional lattice”. In: *New Journal of Physics* 17.12 (Dez. 2015), S. 123016. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/17/12/123016. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/17/12/123016>.
- [30] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley, 1973. ISBN: 9780471547853. URL: <https://books.google.de/books?id=NRlRAAAAMAAJ>.

-
- [31] B. Wang, A. Vashisht, Y. Guo, D. Sudipta, M. Landini, H. C. Nägerl, N. Goldman. “Anyonization of Bosons in One Dimension: An Effective Swap Model”. In: *Phys. Rev. Lett.* 135 (25 Dez. 2025), S. 253403. DOI: 10.1103/2np8-mp39. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/2np8-mp39>.