

# Theoretische Grundlagen der klassischen Mechanik

**Axel Pelster**

**Fachbereich Physik, RPTU Kaiserslautern-Landau**

**Vorlesung im Sommersemester 2025**

**Version: Juli 2025**





# Vorwort

Am Fachbereich Physik der RPTU Kaiserslautern-Landau behandelt die erstsemestrige Lehrveranstaltung **Mathematische Grundlagen der Physik** die Newtonsche Mechanik sowie die damit einhergehenden mathematischen Methoden. Darauf aufbauend werden dann im zweiten Semester die grundlegenden theoretischen Prinzipien der klassischen Mechanik im Rahmen der zweistündigen Lehrveranstaltung **Theoretische Grundlagen der klassischen Mechanik** herausarbeitet. Gegenüber der Newton-Mechanik wird damit zwar keine neue Physik behandelt, es werden aber die höheren Formulierungen der klassischen Mechanik entwickelt, die untrennbar mit den Namen von Lagrange, Hamilton und Hamilton-Jacobi verbunden sind. Diese sind methodisch eleganter und legen die Grundlagen für weitere Lehrveranstaltungen der Theoretischen Physik wie der Quantenmechanik oder der statistischen Physik.

Das vorliegende Skript zur Lehrveranstaltung **Theoretische Grundlagen der klassischen Mechanik** stellt kein Originalwerk dar. Es beruht auf Vorlesungen, die ich an der Freien Universität Berlin im WS 2000/2001 sowie im WS 2001/2002 im Diplomstudiengang und im SS 2009 im Bachelorstudiengang hielt. Es beruht auf den Vorlesungsmitschriften von

- Felix von Oppen, Freie Universität Berlin
- Ingo Peschel, Freie Universität Berlin
- Hannes Risken, Universität Ulm
- Gerhard Soff, Technische Universität Dresden
- Wolfgang Weidlich, Universität Stuttgart
- Julius Wess, Ludwig-Maximilians-Universität München
- Arne Wunderlin, Universität Stuttgart

sowie mehreren Monographien. Zur inhaltlichen Vertiefung des Stoffes werden die folgenden Lehrbücher empfohlen:

- V.I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser Verlag
- T. Fließbach, *Mechanik*, Spektrum der Wissenschaft

- H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Aula-Verlag
- W. Greiner, *Mechanik I und Mechanik II*, Verlag Harri Deutsch
- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Teubner Verlag
- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, VCH
- L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Mechanik*, Akademie-Verlag
- P. Mittelstaedt, *Klassische Mechanik*, Spektrum der Wissenschaft
- W. Nolting, *Klassische Mechanik*, Vieweg Verlag
- F. Scheck, *Mechanik*, Springer-Verlag
- A. Sommerfeld, *Mechanik*, Verlag Harri Deutsch
- M. Wagner, *Elemente der Theoretische Physik 1*, Vieweg Verlag

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lagrangesche Mechanik</b>	<b>1</b>
1.1	Probleme der Newtonschen Mechanik . . . . .	1
1.1.1	Koordinatenabhängigkeit der Newton-Gleichung . . . . .	1
1.1.2	Systeme mit Zwangsbedingungen . . . . .	3
1.2	Ableitung der Lagrange-Gleichungen . . . . .	5
1.2.1	Systeme ohne Zwangsbedingungen . . . . .	6
1.2.2	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten . . . . .	12
1.2.3	D'Alembert-Prinzip mit Zwangsbedingungen . . . . .	16
1.2.4	Lagrange-Gleichungen mit Zwangsbedingungen . . . . .	17
1.3	Verallgemeinertes Potential . . . . .	19
1.4	Eichtransformation . . . . .	20
1.5	Punkttransformation . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Hamiltonsches Prinzip</b>	<b>23</b>
2.1	Variationsrechnung: Ein Beispiel . . . . .	23
2.2	Hamiltonsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen . . . . .	26
2.3	Fata Morgana . . . . .	27
2.4	Kettenlinie . . . . .	33
2.5	Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze</b>	<b>41</b>
3.1	Zyklische Koordinaten . . . . .	41
3.2	Einparametrische Schar von Transformationen . . . . .	42
3.3	Invarianzbedingung . . . . .	43

3.4	Erhaltungssätze . . . . .	44
3.5	Zyklische Koordinaten . . . . .	45
3.6	Impulserhaltung . . . . .	45
3.7	Drehimpulserhaltung . . . . .	46
3.8	Energieerhaltung . . . . .	46
3.9	Zusammenfassung . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Hamiltonsche Mechanik</b>	<b>49</b>
4.1	Motivation . . . . .	49
4.2	Legendre-Transformation . . . . .	50
4.3	Hamilton-Funktion . . . . .	52
4.4	Hamilton-Gleichungen . . . . .	53
4.5	Mathematisches Pendel . . . . .	53
4.6	Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	54
4.7	Hamilton-Prinzip . . . . .	55
4.8	Erhaltungsgrößen und Poisson-Klammern . . . . .	56
4.8.1	Zyklische Koordinaten . . . . .	56
4.8.2	Definition der Poisson-Klammer . . . . .	57
4.8.3	Eigenschaften der Poisson-Klammer . . . . .	57
4.8.4	Hamilton-Gleichungen . . . . .	58
4.8.5	Erhaltungsgrößen . . . . .	58
4.8.6	Phasenraum . . . . .	59
4.9	Liouvillscher Satz . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Kanonische Transformationen</b>	<b>67</b>
5.1	Transformation von Koordinaten und Impulsen . . . . .	67
5.2	Erste Erzeugende . . . . .	69
5.3	Harmonischer Oszillator . . . . .	70
5.4	Zweite Erzeugende . . . . .	72
5.5	Dritte und vierte Erzeugende . . . . .	73
5.6	Bedingungen für kanonische Transformationen . . . . .	75

<b>6</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Theorie</b>	<b>79</b>
6.1	Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .	79
6.2	Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung . . . . .	81
6.3	Harmonischer Oszillator . . . . .	82
6.4	Separation der Variablen . . . . .	84
6.5	Ebene Bewegung im Zentralfeld . . . . .	85
6.6	Wirkungs- und Winkelvariablen . . . . .	87
6.7	Kepler-Problem . . . . .	90

# Kapitel 1

## Lagrangesche Mechanik

Im letzten Semester wurden die Gesetzmäßigkeiten der Bewegung von Massenpunkten vom Standpunkt der Newtonschen Mechanik aus behandelt. Es wurden die zugrunde liegenden Newtonschen Axiome formuliert und deren Konsequenzen, wie z.B. die Kepler-Gesetze der Planetenbewegung, anhand wichtiger mechanischer Systeme diskutiert. In diesem Semester wird die Beschreibung mechanischer Systeme auf formaler Ebene weiterentwickelt. Dabei werden andere Formulierungen untersucht, die zwar zur Newtonschen Mechanik äquivalent sind, die aber eine tiefere Einsicht in die analytische Struktur der Mechanik eröffnen. Diese anderen Formulierungen der Mechanik sind zur Beschreibung und zur Lösung vieler mechanischer Systeme nützlich. Ihre eigentliche Bedeutung besteht aber darin, dass sie eine wesentliche formale Voraussetzung für die Entwicklung anderer Bereiche der Theoretischen Physik darstellen. Dies gilt insbesondere für die Hydrodynamik, die Kontinuumsmechanik, die Statistische Mechanik und die Quantenmechanik. Im ersten Kapitel untersuchen wir die Lagrange Mechanik, mit deren Hilfe sich mechanische Systeme mit Zwangbedingungen effizient beschreiben lassen.

### 1.1 Probleme der Newtonschen Mechanik

Die Newtonsche Mechanik erweist sich in zweierlei Hinsicht als problematisch in der Praxis. Zum einen ist die Formulierung der Newtonschen Gleichungen von der Koordinatenwahl abhängig. Zum anderen erweist sich die Behandlung von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen als unhandlich.

#### 1.1.1 Koordinatenabhängigkeit der Newton-Gleichung

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine Punktmasse  $m$ , auf die eine Kraft  $\mathbf{F}$  wirkt, lautet

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (1.1)$$

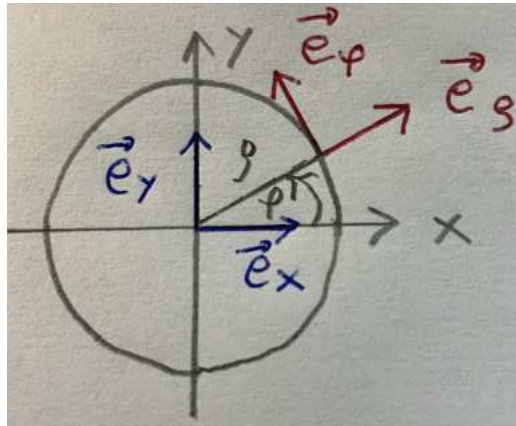


Abbildung 1.1: Basisvektoren (1.4) der ebenen Polarkoordinaten (1.3).

Sie nimmt in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  die folgende einfache Form an:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \quad (1.2)$$

In anderen Koordinatensystemen sieht die Newton-Gleichung dagegen komplizierter aus. Beispielsweise verwendet man in einem Zentralkraftfeld ebene Polarkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Die zugrunde liegenden Basisvektoren lauten

$$\mathbf{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

und sind in Abb. 1.1 graphisch dargestellt. Sie besitzen zum einen die Eigenschaft, dass sie die Orthonormalitätsrelationen erfüllen:

$$\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\rho = 1, \quad \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1. \quad (1.5)$$

Zum anderen führt die zeitliche Ableitung der Basisvektoren auf

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho. \quad (1.6)$$

Damit lassen sich Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor wie folgt darstellen:

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho, \quad (1.7)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad (1.8)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.9)$$

Zerlegt man auch die Kraft  $\mathbf{F}$  entsprechend nach diesen Basisvektoren

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi; \quad F_\rho = \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{F}, \quad F_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{F}, \quad (1.10)$$

so lautet die Newton-Gleichung (1.1):

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_\rho + m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.11)$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren  $\mathbf{e}_\rho$  und  $\mathbf{e}_\varphi$  erhalten wir daher für die Newton-Gleichungen in ebenen Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= F_\rho, \\ m(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}) &= F_\varphi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sie sind offenbar viel komplizierter als diejenigen in kartesischen Koordinaten in (1.2).

Es wäre natürlich bequemer, wenn wir die Bewegungsgleichungen der Mechanik so formulieren könnten, dass sie von der Wahl des speziellen Koordinatensystems unabhängig wären. Wir suchen also eine Methode, die Bewegungsgleichungen für  $N$  Partikel direkt in beliebigen, verallgemeinerten Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$  aufzustellen, ohne den Umweg über die kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_N &= \mathbf{r}_N(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \end{aligned} \quad (1.13)$$

nehmen zu müssen.

### 1.1.2 Systeme mit Zwangsbedingungen

Bisher konnte der Eindruck entstanden sein, dass die Mechanik darin besteht, die bestehenden Kräfte in die Newton-Gleichung (1.1) einzusetzen und diese dann zu lösen. In der Tat geht man so bei vielen Beispielen vor. So führt beim harmonischen Oszillator das Hooksche Gesetz auf die Newton-Gleichung

$$m\ddot{x} = -Dx, \quad (1.14)$$

wobei  $m$  die Masse und  $D$  die Federkonstante darstellt, (siehe Abb. 1.2a). Und die Bewegung eines Planeten mit Masse  $m$  um die Sonne mit Masse  $M$ , (siehe Abb. 1.2b), beruht auf dem Gravitationsgesetz, das auf die folgende Bewegungsgleichung führt:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.15)$$

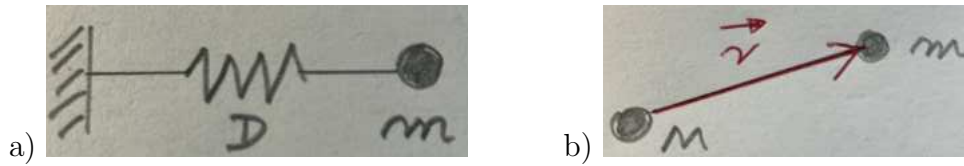


Abbildung 1.2: a) Harmonischer Oszillator mit Masse  $m$ , Federkonstante  $D$  und Bewegungsgleichung (1.14). b) Newtonsche Gravitation zwischen Massen  $M$  und  $m$  führt auf Newton-Gleichung (1.15).

Hierbei bezeichnet  $M$  die Masse der Sonne und  $G$  die Newtonsche Gravitationskonstante. Dies ist aber eine übermäßige Vereinfachung der Realität, da in vielen Fällen mechanische Systeme auch sogenannten Zwangsbedingungen unterliegen. Diese haben wiederum Zwangskräfte zur Folge, die in der Regel nicht von vorneherein bekannt sind. Hierfür haben Sie bereits ein wichtiges Beispiel in Form des Pendels kennengelernt, siehe Abb. 1.3. Dort besteht die Zwangsbedingung in Form der fest vorgegebenen Pendellänge  $l$ :

$$x^2 + z^2 = l^2. \quad (1.16)$$

Die Masse  $m$ , deren Bewegung wir beschreiben wollen, unterliegt daher nicht nur der Gewichtskraft  $\mathbf{F}_G$  sondern auch der Fadenkraft  $\mathbf{F}_F$ . Letzere sorgt dafür, dass die Masse  $m$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Zwangsbedingung (1.16) erfüllt. Die Fadenkraft  $\mathbf{F}_F$  ist damit eine zunächst unbekannte Zwangskraft, die wir erst im Laufe der Lösung des Problems berechnen können. Um dies zu illustrieren, sehen wir uns die Bewegungsgleichung des Pendels noch etwas genauer an. Ausgangspunkt ist die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Pendel

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_F. \quad (1.17)$$

Identifiziert man die Koordinate  $z$  mit  $y$ , so bietet es sich an, dieses Problem in ebenen Polarkoordinaten zu lösen. Zum einen nimmt dann die Zwangsbedingung (1.16) die einfach Form

$$\rho = l \quad (1.18)$$

an. Da dies für alle Zeiten  $t$  gelten muss, folgt zwangsläufig

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0. \quad (1.19)$$

Zum anderen zeigt die Fadenkraft offenbar entgegen der radialen Richtung:

$$\mathbf{F}_F = -F_F \mathbf{e}_\rho. \quad (1.20)$$

Entsprechend gilt für die Gewichtskraft die Zerlegung

$$\mathbf{F}_G = mg \cos \varphi \mathbf{e}_\rho - mg \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.21)$$

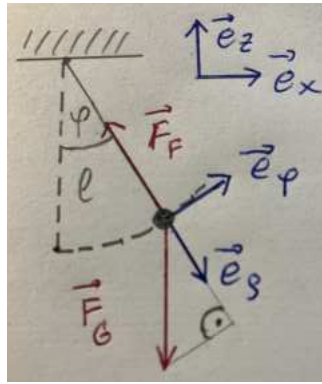


Abbildung 1.3: Das Pendel unterliegt der Zwangsbedingung (1.16). Daher bringt der Faden die Zwangskraft (1.20) mit (1.24) auf.

Einsetzen von (1.18)–(1.21) in die Newton-Gleichungen für ebene Polarkoordinaten (1.12) ergibt

$$-ml\dot{\varphi}^2 = mg \cos \varphi - F_F, \quad (1.22)$$

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi. \quad (1.23)$$

Aus (1.22) lässt sich demnach die Fadenkraft unmittelbar ablesen:

$$F_F = mg \cos \varphi + ml\dot{\varphi}^2. \quad (1.24)$$

Sie besteht aus dem radialen Anteil der Gewichtskraft und der Zentripetalkraft. Und aus (1.23) folgt die uns schon bekannte Pendelgleichung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (1.25)$$

mit der sich die Zeitabhängigkeit des Winkels  $\varphi = \varphi(t)$  berechnen lässt.

Das Beispiel des Pendels offenbart, dass das Auffinden von Zwangskräften im Allgemeinen nicht einfach ist. Dies gilt insbesondere dann, wenn es keine Koordinaten gibt, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Versuchen Sie z.B. die Newtonsche Bewegungsgleichungen für das mechanische System von Abb. 1.4 aufzustellen. Ein Klotz bewegt sich reibungsfrei auf einem Keil, der sich wiederum reibungsfrei auf einer Unterlage bewegen kann. In einer späteren Übungsaufgabe werden wir sehen, dass dieses Problem sogar ohne Aufstellen der Bewegungsgleichungen leicht lösbar ist. Hier geht es nur darum, dass es aufgrund von Zwangsbedingungen häufig recht kompliziert ist, die Newtonschen Bewegungsgleichungen aufzustellen.

Am Beispiel des Pendels wird aber auch die technische Bedeutung von Zwangskräften deutlich. Maschinen müssen so ausgelegt werden, dass sie die Belastung durch Zwangskräfte aushalten. So darf beim Pendel die Fadenkraft nicht dazu führen, dass der Faden reißt.

## 1.2 Ableitung der Lagrange-Gleichungen

Es stellt sich heraus, dass sich beide Unhandlichkeiten der Newtonschen Mechanik auf einen Schlag durch die Einführung der Lagrange-Gleichungen lösen lassen. Wir wollen diese zunächst

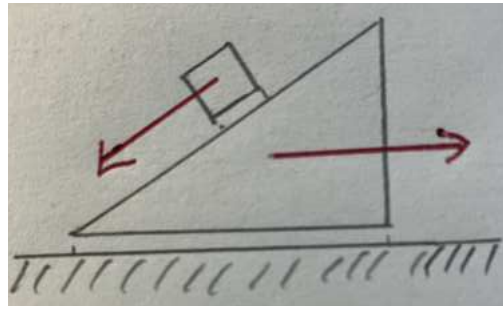


Abbildung 1.4: Klotz bewegt sich reibungsfrei auf einem Keil, der sich wiederum reibungsfrei auf einer Unterlage bewegt.

für Probleme ohne Zwangsbedingungen ableiten. Systeme mit gewissen Arten von Zwangsbedingungen werden dann anschließend behandelt.

### 1.2.1 Systeme ohne Zwangsbedingungen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Newton-Gleichungen für  $N$  Teilchen im dreidimensionalen Raum:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_1, \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_2, \\ &\vdots \\ m_N \ddot{\mathbf{r}}_N &= \mathbf{F}_N, \end{aligned} \tag{1.26}$$

wobei  $\mathbf{F}_i$  die auf das  $i$ te Teilchen wirkende Kraft darstellt. Wir führen nun eine virtuelle Verrückung  $\delta \mathbf{r}_i$  der Koordinaten des  $i$ ten Teilchens ein, bei denen sich die Kräfte, denen das System unterliegt, nicht ändern, siehe Abb. 1.5. Solche virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  bewirken demnach, dass eine kinematisch mögliche Bahn in eine andere überführt wird. Für beliebige virtuelle Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  folgt offenbar aus (1.26):

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{1.27}$$

Im statischen Fall reduziert sich (1.27) auf

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{1.28}$$

Dies besagt, dass die äußeren Kräfte im statischen Gleichgewicht bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit verrichten. Man bezeichnet (1.28) auch als das d'Alembertsche Prinzip der virtuellen Arbeit. Demgegenüber besagt (1.27), dass im dynamischen Gleichgewicht die Summe aus den äußeren Kräften  $\mathbf{F}_i$  und den Trägheitskräften  $-m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  bei virtuellen Verrückungen keine Arbeit verrichtet.

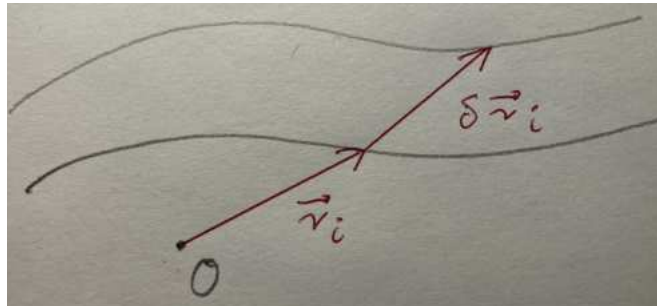


Abbildung 1.5: Zwei Bahnen des  $i$ ten Teilchen mit virtueller Verrückung  $\delta \mathbf{r}_i$ .

Umgekehrt lässt sich aber auch aus der Gleichung (1.27) die Newtonschen Bewegungsgleichungen aller Massenpunkte wieder zurückgewinnen. Da die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  beliebig und unabhängig voneinander sind, können wir z.B.  $\delta \mathbf{r}_1 \neq \mathbf{0}$  wählen mit  $\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$  für  $i = 2, 3, \dots, N$ . Dann folgt aus (1.27) zunächst

$$(\mathbf{F}_1 - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0. \quad (1.29)$$

Da aber die virtuelle Verrückung  $\delta \mathbf{r}_1$  immer noch beliebig gewählt werden kann, muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden, so dass sich so die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen  $i = 1$  ergibt. Für die anderen Teilchen geht man analog vor.

Im nächsten Schritt wollen wir nun die Ortsvektoren der Teilchen nicht durch ihre kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2, \dots, x_{3N}$  ausdrücken sondern durch beliebige verallgemeinerte Koordinaten  $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$ . Dabei können die kartesischen Koordinaten als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten aufschreiben, was auf (1.13) bzw.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.30)$$

führt. Beispielsweise lässt sich der Ortsvektor eines Teilchens in einer Ebene gemäß (1.3) in ebene Polarkoordinaten darstellen.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen durch die verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken. Dazu untersuchen wir, wie sich das d'Alebertsche Prinzip der virtuellen Verrückungen (1.27) durch den Übergang auf die generalisierten Koordinaten verändert. Offenbar transformieren sich dabei die virtuellen Verrückungen aufgrund der Kettenregel gemäß

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (1.31)$$

Beispielsweise gilt bei ebenen Polarkoordinaten

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \delta \varphi, \quad (1.32)$$

was sich mit Hilfe von (1.3) und (1.4) reduziert auf

$$\delta \mathbf{r} = \delta \rho \mathbf{e}_\rho + \rho \delta \varphi \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.33)$$

Aus (1.27) und (1.31) erhalten wir dann zunächst

$$\sum_{j=1}^{3N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (1.34)$$

Da auch die virtuellen Verrückungen der verallgemeinerten Koordinaten  $\delta q_j$  beliebig sind, folgt aus (1.34) die gesuchte Bewegungsgleichung in den verallgemeinerten Koordinaten:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (1.35)$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung der  $j$ ten verallgemeinerten Koordinate  $q_j$  dadurch, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen aller  $N$  Massenpunkte (1.26) auf diese verallgemeinerte Koordinate  $q_j$  zu projizieren sind. Dabei bewerkstelligt das Skalarprodukt mit  $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$  gerade diese Projektion für den  $i$ ten Massenpunkt.

Im Folgenden zeigen wir, dass sich die Bewegungsgleichungen (1.35) in eine koordinatenunabhängige Form überführen lassen. Dazu betrachten wir zunächst den zweiten Term und erhalten mit der Produktregel

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (1.36)$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, dass die Massen  $m_i$  nicht zeitabhängig sind. Um hier weiter zu kommen, betrachten wir eine reale Verrückung, also das totale Differential von (1.30). Die Anwendung der Kettenregel ergibt zunächst

$$d\mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt. \quad (1.37)$$

Dividieren wir (1.37) durch  $dt$ , erhalten wir für die Geschwindigkeiten der Teilchen

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Hieraus folgt durch Differentiation zunächst

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}. \quad (1.39)$$

Gilt der Satz von Schwarz, so sind die gemischten zweiten partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} \quad (1.40)$$

und (1.39) reduziert sich auf

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}. \quad (1.41)$$

Andererseits folgt aus der Kettenregel analog zu (1.38)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j}. \quad (1.42)$$

Der Vergleich von (1.41) und (1.42) führt auf die Identität

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (1.43)$$

Sie besagt, dass die totale Ableitung nach der Zeit  $t$  und die partielle Ableitung nach der verallgemeinerten Koordinate  $q_j$  vertauschbar ist. Damit erhalten wir aus (1.36)

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (1.44)$$

Es zeigt sich nun, dass beide Terme auf der rechten Seite von (1.44) mit der kinetischen Energie des Systems

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (1.45)$$

in Verbindung gebracht werden können. Differenzieren wir (1.45) nach der generalisierten Koordinate  $q_j$ , so führt dies auf den zweiten Term auf der rechten Seite von (1.44):

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}. \quad (1.46)$$

Entsprechend führt eine Differentiation von (1.45) nach der verallgemeinerten Geschwindigkeit  $\dot{q}_j$  zunächst auf

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (1.47)$$

Andererseits lesen wir aus (1.30) und (1.38) ab, dass die kartesische Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}_i$  nur linear von der verallgemeinerten Geschwindigkeit  $\dot{q}_j$  abhängt, so dass gilt

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.48)$$

Demnach reduziert sich (1.47) auf einen Ausdruck, der im ersten Term auf der rechten Seite von (1.44) auftritt:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (1.49)$$

Deshalb ergibt sich aus (1.44), (1.47) und (1.49) insgesamt

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (1.50)$$

Wir führen nun noch die verallgemeinerten Kräfte

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (1.51)$$

ein. Demnach ergibt sich die verallgemeinerte Kraft  $Q_j$  in Richtung der verallgemeinerten Koordinate  $q_j$ , in dem die Kräfte aller  $N$  Massenpunkte auf diese verallgemeinerte Koordinate  $q_j$  projiziert werden. Auch hier wieder bewerkstelligt das Skalarprodukt mit  $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_j$  gerade diese Projektion für den  $i$ ten Massenpunkt. Mit Hilfe von (1.51) nimmt dann die Bewegungsgleichung (1.35) in den verallgemeinerten Koordinaten die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, \dots, 3N \quad (1.52)$$

an. Man bezeichnet (1.52) als Lagrange-Gleichungen.

Als Beispiel betrachten wir wieder die ebenen Polarkoordinaten eines Teilchens. Die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 \quad (1.53)$$

lässt sich mit Hilfe von (1.5) und (1.8) wie folgt durch ebene Polarkoordinaten ausdrücken:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2). \quad (1.54)$$

Daher erhalten wir für die entsprechenden ersten partiellen Ableitungen nach den verallgemeinerten Koordinaten  $\rho, \varphi$  und deren Geschwindigkeiten  $\dot{\rho}, \dot{\varphi}$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}. \quad (1.56)$$

Für die entsprechenden verallgemeinerten Kräfte (1.51) gilt dann nach (1.3), (1.4) und (1.10)

$$Q_\rho = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\rho = F_\rho, \quad (1.57)$$

$$Q_\varphi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\varphi = \rho F_\varphi. \quad (1.58)$$

Damit ist  $Q_\rho$  die Radialkomponente der Kraft und  $Q_\varphi$  ist das Drehmoment, das auf das Teilchen wirkt und senkrecht zur Bewegungsebene hin zeigt. Spezialisiert man (1.52) mit Hilfe von (1.55)–(1.58), so lauten die entsprechenden Lagrange-Gleichungen

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 = F_\rho, \quad (1.59)$$

$$\frac{d}{dt} (m\rho^2\dot{\varphi}) = \rho F_\varphi. \quad (1.60)$$

Dabei stellt  $L_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$  gerade den Drehimpuls des Teilchens dar. Offenbar sind (1.59), (1.60) mit (1.12) identisch.

Die Lagrange-Gleichungen (1.52) nehmen eine besonders einfache Form an, wenn die äußeren Kräfte konservativ sind, d.h. wenn gilt

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (1.61)$$

Aufgrund von (1.30) können wir das Potential natürlich auch als Funktion der generalisierten Koordinaten angeben:

$$V(q_1, \dots, q_{3N}, t) = V(\mathbf{r}_1(q_1, \dots, q_{3N}, t), \dots, \mathbf{r}_N(q_1, \dots, q_{3N}, t), t). \quad (1.62)$$

Dann lassen sich die verallgemeinerten Kräfte (1.51) mit Hilfe von (1.61), (1.62) und der Kettenregel schreiben als

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \nabla_i V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{V(q_1, \dots, q_{3N}, t)}{\partial q_j}. \quad (1.63)$$

Daher reduzieren sich die Lagrange-Gleichungen (1.52) auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}; \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (1.64)$$

Aus (1.62) lesen wir ferner die Identität

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (1.65)$$

ab, so dass sich die Lagrange-Funktion

$$L = T - V \quad (1.66)$$

eingeführen lässt. Damit folgt aus (1.64) die Standardform der Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, \dots, 3N. \quad (1.67)$$

Dies sind die gesuchten Grundgleichungen der Lagrangeschen Mechanik. Man beachte, dass wir in der Lagrange-Funktion (1.66) sowohl die verallgemeinerten Koordinaten  $q_j$  als auch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_j$  mit den kollektiven Bezeichnungen  $q$  und  $\dot{q}$  als unabhängige Variablen auffassen:

$$L = L(q_1, \dots, q_{3N}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N}, t) = L(q, \dot{q}, t). \quad (1.68)$$

Um also die Bewegungsgleichungen in beliebigen, verallgemeinerten Koordinaten aufzustellen, bestimmen wir zunächst die Lagrange-Funktion (1.68) gemäß (1.66) in diesen Koordinaten und erhalten daraus die gesuchten Bewegungsgleichungen in Form der Lagrange-Gleichungen (1.67). Hierbei stellt (1.66)–(1.68) die gesuchte koordinatenunabhängige Formulierung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems dar, sofern keine Zwangsbedingungen vorliegen.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Bewegungsgleichungen von  $N$  Teilchen der Massen  $m_i$  in kartesischen Koordinaten. Die zugrunde liegende Lagrange-Funktion lautet dann

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (1.69)$$

Die entsprechenden partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion ergeben sich zu

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = -\nabla_i V. \quad (1.70)$$

Daher reduzieren sich die Lagrange-Gleichungen (1.67) auf die Newton-Gleichungen

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla_i V. \quad (1.71)$$

Als zweites Beispiel diskutieren wir noch die Bewegungsgleichungen einer Punktmasse  $m$  in Zylinderkoordinaten. Hier ist die entsprechende Lagrange-Funktion gegeben durch

$$L(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{m}{2} \dot{z}^2 - V(\rho, \varphi, z). \quad (1.72)$$

Deren partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad (1.74)$$

so dass sich die Lagrange-Gleichungen (1.67) ergeben zu

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) = m\rho \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad (1.75)$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2 \dot{\varphi}) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad (1.76)$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.77)$$

## 1.2.2 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Wir wollen nun auf das Thema Zwangsbedingungen zurückkommen und zunächst eine Reihe von Beispielen angeben.

**Beispiel 1:** Die Bewegung eines Teilchens sei auf eine Fläche im dreidimensionalen Raum eingeschränkt, siehe Abb. 1.6. In diesem Fall besteht zwischen den kartesischen Koordinaten der Zusammenhang

$$z = z(x, y, t) \quad \iff \quad z - z(x, y, t) = 0, \quad (1.78)$$

der auch explizit zeitabhängig sein kann.

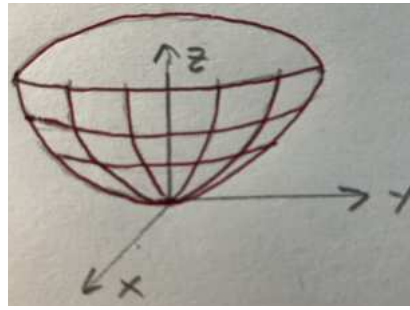


Abbildung 1.6: Bewegt sich ein Teilchen auf einer Fläche, so sind dessen kartesische Koordinaten durch die Bedingung (1.78) eingeschränkt.

**Beispiel 2:** Die Bewegung eines Teilchens ist auf eine Kurve eingeschränkt. Dann gilt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}(s) = \mathbf{0}, \quad (1.79)$$

wobei  $s$  die Bogenlänge entlang der Kurve bezeichnet. Diese Situation liegt beispielsweise bei einer Achterbahn vor.

**Beispiel 3:** Betrachten Sie sich eine Scheibe, die ohne Schlupf auf der horizontalen  $xy$ -Ebene rollt und deren Bewegung so eingeschränkt ist, dass die Ebene der Scheibe immer senkrecht ist, siehe Abb. 1.7. Eine solche Bewegung wird beschrieben durch die  $xy$ -Koordinaten des Aufpunktes, den Winkel  $\Theta$  zwischen Scheibenachse und  $x$ -Achse sowie dem Winkel  $\varphi$  um die Radachse. Die Abrollbedingung verknüpft den Betrag des Geschwindigkeitsvektors  $v = |\mathbf{v}|$ , der die translatorische Schwerpunktsbewegung der Scheibe beschreibt, mit dem Winkel  $\varphi$ , mit dem sich die Scheibe um die Radachse dreht, gemäß

$$v = R\dot{\varphi}, \quad (1.80)$$

wobei  $R$  den Radius der Scheibe bezeichnet. Dementsprechend gelten für die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = v \sin\Theta = R \sin\Theta \dot{\varphi}, \\ \dot{y} &= v \sin\left(\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -v \cos\Theta = -R \cos\Theta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Die Zwangsbedingung stellt damit Differentialgleichungen für die Koordinaten dar. In einem Zeitintervall  $dt$  lauten diese Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} dx - R \sin\Theta d\varphi &= 0, \\ dy + R \cos\Theta d\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Sie sind demnach nur für die totalen Differentiale der Koordinaten formulierbar.

**Beispiel 4:** Es gibt schließlich auch Zwangsbedingungen, die sich als Ungleichungen schreiben lassen. Dies liegt z.B. für die Bewegung eines Teilchens vor, das auf die Oberfläche einer Kugel gesetzt wird und sich von der Kugeloberfläche entfernen kann:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2. \quad (1.83)$$

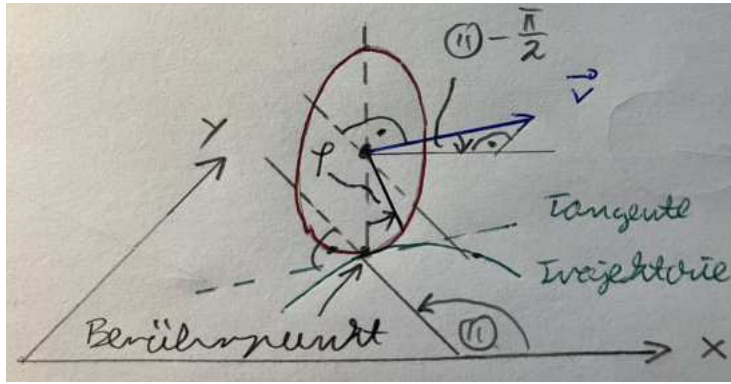


Abbildung 1.7: Das Abrollen einer vertikal ausgerichteten Scheibe in der  $xy$ -Ebene wird durch die Differentialgleichungen (1.82) beschrieben.

Wir kommen nun zur allgemeinen Klassifikation von Zwangsbedingungen. Eine Zwangsbedingung heißt holonom, wenn sie durch einen Satz von Gleichungen

$$f_j(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (1.84)$$

dargestellt werden kann. Demnach liegen bei Beispiel 1 und 2 sowie dem Pendel von Seite 4f holonome Zwangsbedingungen vor. In einem solchen Fall haben wir statt der ursprünglichen  $3N$  Koordinaten effektiv nur  $f = 3N - K$  unabhängige Koordinaten. Diese Zahl bezeichnet man auch als die Zahl der Freiheitsgrade, die ein mechanisches System besitzt. Daher können wir die ursprünglichen  $3N$  kartesischen Koordinaten mit Hilfe der  $K$  Zwangsbedingungen eliminieren und das System durch  $f = 3N - K$  verallgemeinerte Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  beschreiben. Es gibt dann die Zusammenhänge

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f, t); \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.85)$$

so dass die Koordinaten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  nur noch solche Werte annehmen, die mit den Zwangsbedingungen (1.84) verträglich sind. Setzt man als (1.85) in (1.84) ein, so entsteht eine Identität, die für alle generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  erfüllt sein muss:

$$f_j(\mathbf{r}_1(q_1, \dots, q_f, t), \dots, \mathbf{r}_N(q_1, \dots, q_f, t), t) = 0; \quad j = 1, \dots, K. \quad (1.86)$$

Beim Pendel von Seite 4f ist beispielsweise der Winkel  $\varphi$  die verallgemeinerte Koordinate und

$$x = l \sin \varphi, \quad z = -l \cos \varphi \quad (1.87)$$

erfüllt offenbar automatisch die holonome Zwangsbedingung (1.16).

Alle anderen Zwangsbedingungen werden als nichtholonom bezeichnet. Liegt eine Zwangsbedingung in einer differentiellen Form vor, so müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Als Beispiel betrachten wir hierzu einen einzelnen Massenpunkt mit der Zwangsbedingung

$$g_x(x, y, z) dx + g_y(x, y, z) dy + g_z(x, y, z) dz = 0. \quad (1.88)$$

Wenn die linke Seite von (1.88) das totale Differential einer Funktion  $G = G(x, y, z)$  darstellt, dann können wir (1.88) sofort integrieren und erhalten eine Gleichung von der Form

$$G(x, y, z) - C = 0. \quad (1.89)$$

In diesem Fall ist die Zwangsbedingung (1.88) holonom. Ist aber die linke Seite von (1.88) kein vollständiges Differential, so kann sie erst integriert werden, wenn das Problem schon gelöst ist. Die Zwangsbedingung (1.88) ist dann nichtholonom. Aus der Forderung, dass die linke Seite von (1.88) ein vollständiges Differential sein soll, können wir ein Kriterium für die Holonomität der Zwangsbedingung (1.88) angeben. Es muss nämlich gelten

$$dG = g_x dx + g_y dy + g_z dz, \quad (1.90)$$

d.h. die Funktionen  $g_x, g_y, g_z$  stimmen mit den partiellen Ableitungen von  $G$  nach  $x, y, z$  überein:

$$g_x = \frac{\partial G}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (1.91)$$

Nach dem Satz von Schwarz sind bei einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $G$  die gemischten zweiten partiellen Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}. \quad (1.92)$$

Setzt man (1.91) in (1.92) ein, so folgt

$$\frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}. \quad (1.93)$$

Demnach ist die Zwangsbedingung (1.88) holonom, wenn die Integrabilitätsbedingungen (1.93) erfüllt sind, andernfalls ist sie nichtholonom. Beispielsweise enthält Beispiel 3 nichtholonome Zwangsbedingungen (1.81), da gilt

$$\begin{aligned} g_{x\Theta} = 0, \quad g_{x\varphi} = -R \sin \Theta &\implies \frac{\partial}{\partial \Theta} (-R \sin \Theta) \neq \frac{\partial}{\partial \varphi} 0, \\ g_{y\Theta} = 0, \quad g_{x\varphi} = R \cos \Theta &\implies \frac{\partial}{\partial \Theta} (R \cos \Theta) \neq \frac{\partial}{\partial \varphi} 0. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Solche nichtholonomen Zwangsbedingungen lassen sich mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren behandeln, die wir noch kennenlernen werden. Schwierige Fälle wie in Beispiel 4 müssen individuell behandelt werden.

Eine weitere Unterscheidung der Zwangsbedingungen wird nach ihrer Zeitabhängigkeit vorgenommen. Ist die Zwangsbedingung eine explizite Funktion der Zeit, so heißt sie rheonom, tritt die Zeit nicht explizit auf, nennen wir die Zwangsbedingung skleronom. Beispielsweise handelt es sich bei (1.89) um eine skleronome, holonome Zwangsbedingung, während ein mathematische Pendel mit periodisch veränderter Fadenlänge eine rheonome, holonome Zwangsbedingung darstellt.

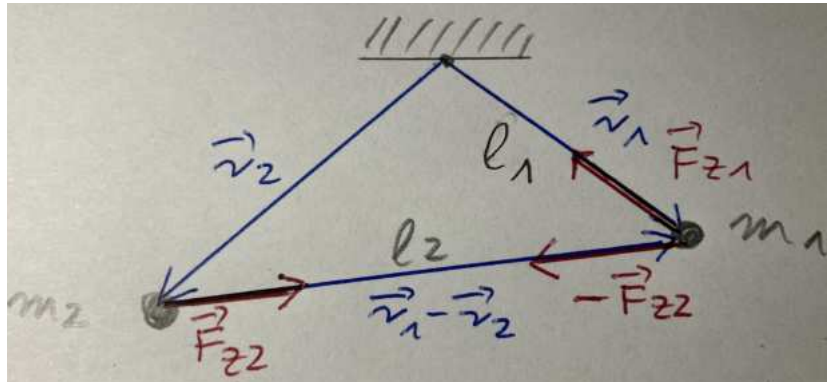


Abbildung 1.8: Ebenes Doppelpendel mit den Zwangsbedingungen (1.96).

### 1.2.3 D'Alembert-Prinzip mit Zwangsbedingungen

Die Ableitung der Lagrange-Gleichungen (1.52) beruhte auf dem d'Alembert-Prinzip (1.27) für beliebige virtuelle Verrückungen. Unterliegt das mechanische System aber noch Zwangsbedingungen, so gibt es zweierlei Veränderungen:

- Die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  sind nicht mehr beliebig. Es dürfen nur noch solche virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  zugelassen werden, die die Zwangsbedingungen erfüllen.
- Aufgrund der Zwangsbedingungen treten auch Zwangskräfte auf, die a priori unbekannt sind. Man kann nun zeigen, dass Zwangskräfte unter virtuellen Verrückungen keine Arbeit verrichten.

Anstelle eines allgemeinen Beweises wollen wir die letztere Aussage durch Beispiele illustrieren. Im Beispiel 1 von Seite 12 steht die Zwangskraft  $\mathbf{F}_Z$  senkrecht zur Fläche, während die virtuelle Verrückung  $\delta \mathbf{r}$  parallel zur Fläche gerichtet ist. Daher gilt offenbar

$$\delta W_Z = \mathbf{F}_Z \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \quad (1.95)$$

Dies gilt auch für eine zeitabhängige Fläche, da die virtuelle Verrückung  $\delta \mathbf{r}$  instantan in der Zeit ist.

Ein komplizierteres Beispiel ist das ebene Doppelpendel mit den Zwangsbedingungen

$$\mathbf{r}_1^2 = l_1^2, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 = l_2^2, \quad (1.96)$$

das in Abb. 1.8 skizziert ist. Die Massenpunkte erfahren Zwangskräfte  $\mathbf{F}_{Z1}$  und  $\mathbf{F}_{Z2}$ , die in der Abbildung eingezeichnet sind. Verrücken wir virtuell die Massenpunkte 1 und 2 um  $\delta \mathbf{r}_1$  und  $\delta \mathbf{r}_2$ , so erhalten wir für die virtuelle Arbeit

$$\delta W_Z = (\mathbf{F}_{Z1} - \mathbf{F}_{Z2}) \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{Z2} \cdot \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{Z1} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{Z2} \cdot (\delta \mathbf{r}_2 - \delta \mathbf{r}_1). \quad (1.97)$$

Diese virtuelle Arbeit verschwindet, da offenbar

$$\mathbf{F}_{Z1} \sim \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{F}_{Z2} \sim \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (1.98)$$

gilt, andererseits folgt aber aus (1.96)

$$\mathbf{r}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 = 0, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\delta \mathbf{r}_1 - \delta \mathbf{r}_2) = 0. \quad (1.99)$$

An diesem Beispiel sehen wir also, dass die Zwangskräfte zwar an jedem Massenpunkt einzeln eine virtuelle Arbeit verrichten, dass aber die Summe all dieser virtuellen Arbeiten verschwindet.

### 1.2.4 Lagrange-Gleichungen mit Zwangsbedingungen

Wir wollen nun die Lagrange-Gleichungen auch für Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen (1.84) ableiten. Dazu gehen wir von den zugrunde liegenden Newtonschen Bewegungsgleichungen aus, die auch die Zwangskräfte explizit enthalten müssen:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{Zi}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.100)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{F}_i$  auch weiterhin die äußere Kraft und  $\mathbf{F}_{Zi}$  die Zwangskraft, die auf den  $i$ ten Massenpunkt einwirkt. Durch Multiplikation von (1.100) mit den virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$ , die mit den holonomen Zwangsbedingungen (1.84) kompatibel sind, und durch Summation über alle Massenpunkte folgt dann

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{Zi}) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.101)$$

Da nun die Zwangskräfte insgesamt keine virtuelle Arbeit leisten, also

$$\delta W_Z = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{Zi} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.102)$$

gilt, reduziert sich (1.101) auf die Gleichung

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (1.103)$$

Hier müssen wir nun aber beachten, dass die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  nicht beliebig sind, sondern durch die holonomen Zwangsbedingungen (1.84) miteinander verknüpft sind. Aus (1.84) erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel  $K$  Kompatibilitätsbedingungen für die virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$ :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0; \quad j = 1, \dots, K. \quad (1.104)$$

Nur diejenigen  $\delta \mathbf{r}_i$ , die dieses homogene lineare Gleichungssystem erfüllen, dürfen in (1.103) verwendet werden. Demnach gibt es von den  $N$  abhängigen virtuellen Verrückungen  $\delta \mathbf{r}_i$  nur  $f = 3N - K$  unabhängige Freiheitsgrade. Um diese explizit herauszuarbeiten, gehen wir gemäß (1.85) von den kartesischen Koordinaten  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  zu den generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  über.

Analog zu (1.104) erhalten wir für deren virtuelle Verrückungen  $\delta q_k$  aus (1.86) mit Hilfe der Kettenregel die Bedingungen

$$\sum_{k=1}^f \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0; \quad j = 1, \dots, K. \quad (1.105)$$

Andererseits folgt aber durch Differentiation von (1.86) nach  $q_k$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = 0; \quad j = 1, \dots, K; \quad k = 1, \dots, f. \quad (1.106)$$

Demnach ist also (1.105) für alle möglichen virtuellen Verrückungen  $\delta q_k$  identisch erfüllt, Dies bedeutet, dass die  $\delta q_k$  gerade  $f$  unabhängige virtuelle Verrückungen darstellen. Man kann also mit ihnen so verfahren, wie wir das im Falle ohne Zwangsbedingungen gewohnt sind. Aus den Transformationsformeln (1.85) folgern wir zunächst

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.107)$$

Damit stellt (1.107) einen wichtigen Zusammenhang zwischen den  $f$  unabhängigen virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten  $\delta q_j$  und den  $N$  abhängigen virtuellen Verrückungen der kartesischen Koordinaten  $\delta \mathbf{r}_i$  her. Der einzige Unterschied zwischen der früheren Gleichung (1.31) und (1.107) besteht damit in der Anzahl der Summanden. Damit geht (1.103) über in

$$\sum_{j=1}^f \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (1.108)$$

Auch hier besteht der Unterschied zu (1.34) einzig und allein in der Zahl der Summanden bei der  $j$ -Summe. Da nun aber die virtuellen Verrückungen der verallgemeinerten Koordinaten  $\delta q_j$  wie gezeigt unabhängig voneinander sind, reduziert sich (1.108) auf

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, \dots, f. \quad (1.109)$$

Demnach lassen sich die Lagrange-Gleichungen analog zur früheren Überlegung ableiten und wir erhalten statt (1.52)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, \dots, f. \quad (1.110)$$

Als Beispiel betrachten wir das Pendel, auf das die äußere Kraft

$$\mathbf{F} = -m g \mathbf{e}_z \quad (1.111)$$

wirkt. Die verallgemeinerte Koordinate  $\varphi$  ist durch (1.87) definiert. Damit erhalten wir aufgrund von (1.51) für die entsprechende verallgemeinerte Kraft

$$Q_\varphi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} l \sin \varphi \\ -l \cos \varphi \end{pmatrix} = -mgl \sin \varphi. \quad (1.112)$$

Für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 \quad (1.113)$$

ergeben sich die partiellen Ableitungen zu

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (1.114)$$

Daher ergibt sich aus (1.110)–(1.114) die Bewegungsgleichung

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0, \quad (1.115)$$

die mit der Pendelgleichung (1.25) übereinstimmt.

## 1.3 Verallgemeinertes Potential

Wir kehren nun wieder zu den Bewegungsgleichungen der Form (1.110) zurück und untersuchen, ob es geschwindigkeitsabhängige verallgemeinerte Potentiale  $U(q, \dot{q}, t)$  geben kann, so dass

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (1.116)$$

gilt. Dann folgt aus (1.110) und (1.116), dass die Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t) \quad (1.117)$$

auf die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, \dots, f \quad (1.118)$$

führt. Andererseits ergibt die Anwendung der Kettenregel in (1.116)

$$Q_j = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (1.119)$$

Da die äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_i$  nicht von den Beschleunigungen  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  abhängen, können die verallgemeinerten Kräfte (1.51) nicht von den verallgemeinerten Beschleunigungen  $\ddot{q}_k$  abhängen. Deshalb folgt aus (1.119), dass das verallgemeinerte Potential höchstens linear von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängen darf:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} = 0. \quad (1.120)$$

Daher muss  $U$  von folgender Form sein:

$$U(q, \dot{q}, t) = V(q, t) + \sum_{k=1}^f M_k(q, t) \dot{q}_k. \quad (1.121)$$

Einsetzen von (1.121) in (1.116) führt dann auf die verallgemeinerte Kraft

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial M_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial M_j}{\partial q_k} - \frac{\partial M_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_k. \quad (1.122)$$

Es gibt nun eine ganz konkrete physikalische Situation, wo solche geschwindigkeitsabhängigen Kräfte bei einer einzelnen Punktmasse auftreten, wo keine Zwangsbedingungen vorliegen. Daher stimmen dann die verallgemeinerten mit den kartesischen Koordinaten überein. Dann gehen die verallgemeinerten Kräfte (1.122) in die äußeren Kraft

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial M_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial M_i}{\partial x_j} - \frac{\partial M_j}{\partial x_i} \right) \dot{x}_j \quad (1.123)$$

über. Sie zeigen in einer späteren Übungsaufgabe, dass (1.123) gerade mit einer geladenen Punktmasse in einem elektromagnetischen Feld auftritt. Dabei werden Sie sehen, dass 1.123) mit der Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (1.124)$$

übereinstimmt. Dabei werden die elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  durch das skalare Potential  $\Phi$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  ausgedrückt:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.125)$$

Dann erhalten Sie nämlich die Identifikation

$$V(\mathbf{r}, t) = Q\Phi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = -Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.126)$$

und die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld lautet:

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - Q\Phi(\mathbf{r}, t) + Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.127)$$

## 1.4 Eichtransformation

Wir zeigen nun, dass es verschiedene Lagrange-Funktionen geben kann, die zu denselben Bewegungsgleichungen führen. Hierzu untersuchen wir die Transformation

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t), \quad (1.128)$$

wobei  $F(q, t)$  eine beliebige Funktion darstellt. Nach der Kettenregel folgt aus (1.128)

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^f \frac{\partial F(q, t)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F(q, t)}{\partial t}. \quad (1.129)$$

Die ersten partiellen Ableitungen von (1.129) nach den verallgemeinerten Koordinaten

$$\frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t} \quad (1.130)$$

und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \quad (1.131)$$

führt schließlich zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}. \quad (1.132)$$

Die  $L$ -Terme entfallen wegen der Lagrange-Gleichungen (1.118). Auch die restlichen Terme kompensieren sich gegenseitig aufgrund des Satzes von Schwarz, da die gemischten partiellen Ableitungen bei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen vertauschen:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_k}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial t}. \quad (1.133)$$

Daher folgt schließlich aus (1.132), dass auch die Lagrange-Funktion  $L'$  die Lagrange-Gleichungen erfüllt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, \dots, f. \quad (1.134)$$

Man kann also die Lagrange-Funktion der mechanischen Eichtransformation (1.128) unterziehen, ohne dass sich die Bewegungsgleichungen ändern. Demnach sind alle Lagrange-Funktionen, die durch (1.128) miteinander verbunden sind, physikalisch gleichwertig. In einer späteren Übungsaufgabe werden wir sehen, dass diese mechanische Eichtransformation mit einer elektrodynamischen Eichtransformation eng verknüpft ist, die die Potentiale  $\Phi, \mathbf{A}$  ändert, aber die elektrodynamischen Felder  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  unverändert lässt.

## 1.5 Punkttransformation

Die Lagrange-Gleichungen (1.118) besitzen neben der Eichtransformation (1.128) noch eine weitere Symmetrie. Hierzu untersuchen wir eine allgemeine Transformation der verallgemeinerten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  zu neuen verallgemeinerten Koordinaten  $Q = (Q_1, \dots, Q_f)$ , die auch als Punkttransformation bezeichnet wird:

$$q_j = q_j(Q, t). \quad (1.135)$$

Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten transformieren sich dann gemäß

$$\dot{q}_j = \sum_{l=1}^f \frac{\partial q_j(Q, t)}{\partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial q_j(Q, t)}{\partial t}. \quad (1.136)$$

Eine Punkttransformation induziert demnach die folgende Transformation der Lagrange-Funktion:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L\left(q(Q, t), \sum_{l=1}^f \frac{\partial q(Q, t)}{\partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial q(Q, t)}{\partial t}, t\right). \quad (1.137)$$

Die ersten partiellen Ableitungen der transformierten Lagrange-Funktion (1.137) nach den verallgemeinerten Koordinaten

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{l=1}^l \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial t} \right) \quad (1.138)$$

und den verallgemeinerten Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} \quad (1.139)$$

föhren schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} &= \sum_{k=1}^f \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{l=1}^l \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_l \partial Q_j} \dot{Q}_l + \frac{\partial^2 q_k}{\partial t \partial Q_j} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{l=1}^l \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial^2 q_k}{\partial Q_j \partial t} \right). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz und der Lagrange-Gleichungen (1.118) erhalten wir schließlich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial Q_j} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} = 0. \quad (1.141)$$

Demnach sind die Lagrange-Gleichungen (1.118) auch unter einer Punkttransformation (1.135) forminvariant.

# Kapitel 2

## Hamiltonsches Prinzip

In diesem Kapitel behandeln wir die elegante Formulierung der Lagrangeschen Mechanik im Rahmen eines Variationsprinzips. Daher wollen wir zunächst einmal die Grundideen der Variationsrechnung an einem einfachen Beispiel kennenlernen.

### 2.1 Variationsrechnung: Ein Beispiel

Die Variationsrechnung ist eine Verallgemeinerung der Bestimmung von Extrempunkten, d.h. von Maxima und Minima, für Funktionen. Das folgende Problem ist charakteristisch für die Variationsrechnung: Welche Kurve ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$  und  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$ ? Die Antwort ist in diesem Falle natürlich offensichtlich – eine Gerade – aber die formale Ableitung ist trotzdem instruktiv. Wir wollen also diejenige Kurve  $y(x)$  durch die Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  finden, die die Länge

$$L = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} ds \quad (2.1)$$

minimiert. Dabei ist das Differential der Bogenlänge  $s$  nach Abb. 2.1a) gegeben durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (2.2)$$

Aus (2.1) und (2.2) erhalten wir dann insgesamt

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (2.3)$$

Die Länge  $L$  ist also ein Funktional der Kurve  $y(x)$ , da sie der Funktion  $y(x)$  eine Zahl  $L$  zuordnet, siehe Abb. 2.1b). Um Funktionale von Funktionen zu unterscheiden, schließen wir deren Argumente mit eckigen statt mit runden Klammern ein.

Wir wollen nun diejenige Kurve  $y(x)$  finden, für die die Länge (2.3) minimal wird. Hierzu nehmen wir an, dass  $y(x)$  die gesuchte Kurve sei. Dann muss die Länge (2.3) für alle benachbarten Kurven  $y(x) + \delta y(x)$  größer werden, wobei alle zugelassenen benachbarten Kurven  $y(x) + \delta y(x)$

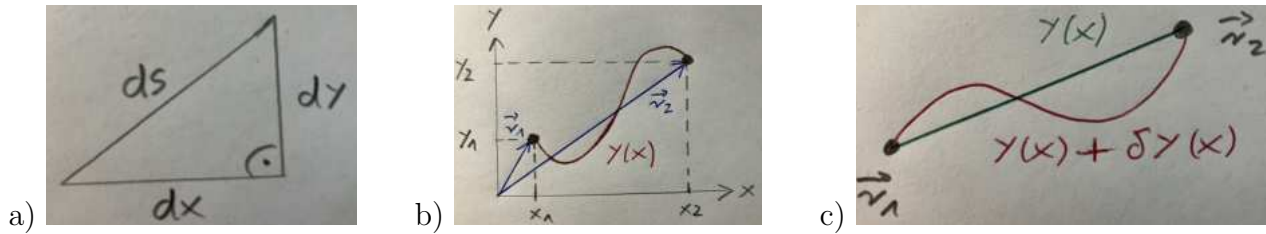


Abbildung 2.1: Illustrationen zur Variationsrechnung: a) Die Länge einer Kurve ist nach (2.3) ein Funktional der Funktion  $y = y(x)$ . b) Das Differential der Bogenlänge (2.2) folgt aus dem Satz des Pythagoras. c) Extremalkurve  $y(x)$  und benachbarte Kurve  $y(x) + \delta y(x)$  mit der Bedingung (2.4).

ebenfalls durch die Punkte  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  gehen sollen, siehe Abb. 2.1c). Daher gilt für die Auslenkungen  $\delta y(x)$  die Dirichletsche Bedingung

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0. \quad (2.4)$$

In Analogie zum Verhalten von Funktionen in der Nähe von Minima bzw. allgemeiner von Extrema ist klar, dass gelten muss

$$\delta L = L[y(x) + \delta y(x)] - L[y(x)] = \mathcal{O}(\delta y^2). \quad (2.5)$$

Berechnen wir als (2.5) bis zur linearen Ordnung in  $\delta y(x)$ , so müssen wir für beliebige Auslenkungen  $\delta y(x)$ , die der Dirichletschen Bedingung (2.4) genügen, Null herausbekommen. Wir werden diese Strategie nun verwenden, um eine Differentialgleichung für die gesuchte Extremalkurve abzuleiten. Zunächst erhalten wir durch Einsetzen von (2.3) in (2.5):

$$\delta L = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{1 + [y'(x) + \delta y'(x)]^2} - \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} dx. \quad (2.6)$$

Dann entwickeln wir den Radikanten bis zur ersten Ordnung in  $\delta y(x)$

$$\delta L = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \sqrt{1 + y'(x)^2 + 2y'(x)\delta y'(x)} - \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} dx, \quad (2.7)$$

klammern den führenden Term im Integranden aus

$$\delta L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2y'(x)\delta y'(x)}{1 + y'(x)^2}} - 1 \right\} dx, \quad (2.8)$$

und entwickeln die Wurzel bis zur ersten Ordnung nach Taylor

$$\delta L = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \delta y'(x) dx. \quad (2.9)$$

Eine partielle Integration führt nun auf

$$\delta L = \left[ \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \delta y(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y(x) \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} dx. \quad (2.10)$$

Dabei verschwinden die Randterme, da die Auslenkungen  $\delta y(x)$  der Dirichletschen Bedingung (2.4) unterworfen sind. Andererseits muss (2.10) aufgrund von (2.5) verschwinden:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y(x) \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} dx = 0. \quad (2.11)$$

Da  $\delta y(x)$  für  $x_1 < x < x_2$  eine beliebige Auslenkung ist, folgern wir aus (2.11)

$$\frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = 0. \quad (2.12)$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die die Extremalkurve  $y(x)$  festlegt. Zunächst folgt aus (2.12) durch Integration

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = C \quad \implies \quad y'(x) = A. \quad (2.13)$$

Eine weitere Integration führt schließlich auf

$$y(x) = Ax + B, \quad (2.14)$$

wobei die beiden Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  durch die Randbedingungen

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (2.15)$$

festgelegt sind. Das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Ax_1 + B &= y_1, \\ Ax_2 + B &= y_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

lautet in Matrix-Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

und besitzt die Lösung

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Lösung des Variationsproblems

$$y(x) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}. \quad (2.19)$$

Damit haben wir tatsächlich bewiesen, dass die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist.

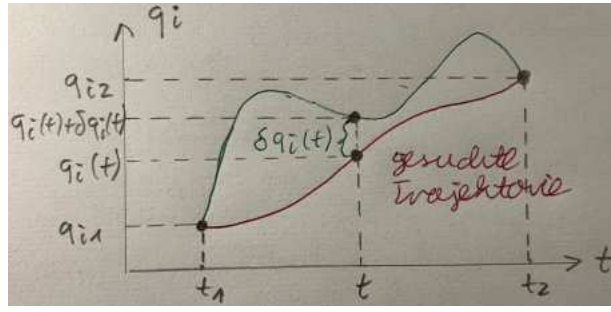


Abbildung 2.2: Illustration des Hamiltonschen Prinzips der Lagrangeschen Mechanik: Die physikalisch realisierte Trajektorie  $q_i(t)$  wird durch Extremalisierung der Wirkung (2.20) bestimmt. Hierzu werden alle mathematisch möglichen Pfade  $q_i(t) + \delta q_i(t)$  zugelassen.

## 2.2 Hamiltonsches Prinzip und Lagrange-Gleichungen

Wir können nun die Lagrangesche Mechanik durch ein Variationsprinzip formulieren. Diese Formulierung beruht auf dem Hamiltonschen Prinzip. Die Wirkung

$$\mathcal{A}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t), t) dt \quad (2.20)$$

nimmt für die tatsächliche Trajektorie bei fest vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten  $q_i(t_1)$  und  $q_i(t_2)$  ein Extremum an. Hierzu ist zu zeigen, dass dieses Variationsprinzip auf die Lagrange-Gleichungen führt. Dazu betrachten wir die tatsächliche Trajektorie  $q_i(t)$  sowie eine infinitesimal benachbarte Trajektorie  $q_i(t) + \delta q_i(t)$ , siehe Fig. 2.2. Da wir laut Hamiltonschem Prinzip nur solche Trajektorien mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt betrachten, gilt offenbar für die Auslenkung  $\delta q_i(t)$  die Dirichletsche Bedingung

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0. \quad (2.21)$$

Die Variation der Wirkung (2.20) lautet nun

$$\delta \mathcal{A} = \mathcal{A}[q(t) + \delta q(t)] - \mathcal{A}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t), t) - L(q, \dot{q}, t) \right\} dt. \quad (2.22)$$

Wir setzen voraus, dass die Auslenkungen  $\delta q_i(t)$  infinitesimal klein sind. Daher können wir (2.22) bis zur ersten Ordnung in den Auslenkungen  $\delta q_i(t)$  entwickeln:

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right\} dt. \quad (2.23)$$

Da Variation und totale Zeitableitung vertauschbar sind

$$\delta \frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{d}{dt} \delta q_i(t), \quad (2.24)$$

lässt sich der zweite Term in (2.23) wie folgt umformen:

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) - \delta q_i(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right\} dt. \quad (2.25)$$

Eine partielle Integration des zweiten Terms führt auf

$$\delta\mathcal{A} = \sum_{i=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt. \quad (2.26)$$

Dabei verschwinden die Randterme aufgrund der Dirichletschen Bedingung (2.21) an den zugelassenen Auslenkungen und wir erhalten

$$\delta\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt. \quad (2.27)$$

Die Trajektorie  $q_i(t)$  stellt ein Extremum dar, wenn (2.27) verschwindet. Da aber die Auslenkung  $\delta q_i(t)$  für jeden Zeitpunkt  $t$  mit  $t_1 < t < t_2$  beliebig ist, folgt hieraus

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0; \quad i = 1, \dots, f. \quad (2.28)$$

Dies sind gerade die Lagrange-Gleichungen. Man bezeichnet sie im Zusammenhang mit dem Hamiltonschen Prinzip auch als Euler-Lagrange-Gleichungen.

Eine interessante Konsequenz des Hamiltonschen Prinzips ist die Tatsache, dass die zu einer Bewegungsgleichung gehörende Lagrange-Funktion nicht eindeutig ist. In der Tat können wir, wie schon in Abschnitt 1.4 diskutiert, zu  $L$  die zeitliche Ableitung einer Funktion  $F(q, t)$  hinzuaddieren

$$L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt} F(q, t), \quad (2.29)$$

ohne die Bewegungsgleichungen zu verändern. Es gilt nämlich

$$\delta\mathcal{A}' = \delta\mathcal{A} + \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q(t), t) dt = \delta\mathcal{A} + \delta \left\{ F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1) \right\}, \quad (2.30)$$

so dass aus der Dirichletschen Bedingung (2.21) unmittelbar folgt:

$$\delta\mathcal{A}' = \delta\mathcal{A}. \quad (2.31)$$

## 2.3 Fata Morgana

Als erste praktische Anwendung behandeln wir nun das Problem, welchen Weg das Licht in einem inhomogenen Medium mit variablem Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  nimmt. Die Antwort hierauf liefert das Fermatsche Prinzip. Es besagt, dass das Licht denjenigen Weg zwischen zwei Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  nimmt, für den es die kürzeste Zeit benötigt. Dies wollen wir nun mathematisch präzise formulieren. Im Vakuum breitet sich das Licht mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus. In einem Medium mit Brechungsindex  $n(\mathbf{r}) \geq 1$  reduziert sich aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu

$$v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}. \quad (2.32)$$

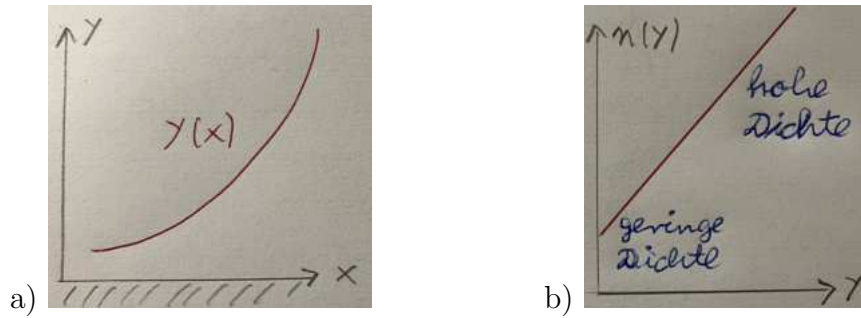


Abbildung 2.3: a) Parametrisierung des Lichtweges  $y = y(x)$ , wobei  $y$  die Höhe oberhalb der Position  $x$  auf dem Boden bezeichnet. b) Zur Vereinfachung nehmen wir in (2.46) eine lineare Abhängigkeit des Brechungsindex  $n$  von der Höhe  $y$  an.

Genauso wie der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem Medium gemäß (2.32) ortsabhängig. Um die Strecke  $ds$  zurückzulegen, benötigt das Licht daher die Zeit

$$dt = \frac{ds}{v(\mathbf{r})} = \frac{ds}{c} n(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Die Laufzeit des Lichtes zwischen zwei Punkten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  beträgt dann

$$T = \frac{1}{c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} n(\mathbf{r}) ds. \quad (2.34)$$

Das Fermatsche Prinzip behauptet nun, dass (2.34) für den tatsächlichen Weg des Lichtes ein Minimum annimmt. Der Vergleich von (2.1) und (2.34) zeigt, dass sich die hier behandelte Anwendung im Spezialfall des Vakuums, also  $n(\mathbf{r}) = 1$ , auf das in Abschnitt 2.1 diskutierte Beispiel reduziert.

Um die Extremalisierung explizit durchführen zu können, müssen wir den Weg des Lichtes geeignet parametrisieren. Hierzu nehmen wir der Einfachheit halber an, dass sich das Licht in einer Ebene, sagen wir der  $xy$ -Ebene, ausbreitet und dass der Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$  nur von der Höhe  $y$  oberhalb des Bodens abhängt:

$$n(\mathbf{r}) = n(y). \quad (2.35)$$

Dann können wir den Weg des Lichtes in der Form  $y = y(x)$  parametrisieren, siehe Abb. 2.3a) und erhalten für das totale Differential die Bogenlänge (2.2). Dadurch reduziert sich die Laufzeit des Lichtes (2.34) zu einem Funktional des Lichtweges  $y(x)$ :

$$T[y(x)] = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} n(y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (2.36)$$

Die Extremalisierung der Lichtlaufzeit (2.36) erfolgt dann analog zur Extremalisierung der Wirkung (2.20) im letzten Abschnitt. Diese Analogie wird in Abb. 2.4 weiter ausgearbeitet, in dem das Hamiltonsche Prinzip mit dem Fermatschen Prinzip verglichen wird. Demnach wird

Hamiltonsches Prinzip	Fermatsches Prinzip
$t$	$x$
$q(t)$	$y(x)$
$\dot{q}(t)$	$y'(x)$
$\mathcal{A}[q(t)]$	$T[y(x)]$
$L(q(t), \dot{q}(t))$	$n(y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}/c$

Abbildung 2.4: Vergleich zwischen dem Hamiltonschen Prinzip von Abschnitt 2.2 und dem Fermatschen Prinzip von Abschnitt 2.3.

der Lichtweg  $y(x)$  durch eine Euler-Lagrange-Gleichung beschrieben, die sich unmittelbar aus (2.28) ergibt:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'(x)} \left\{ \frac{n(y(x))}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial y(x)} \left\{ \frac{n(y(x))}{c} \sqrt{1 + y'(x)^2} \right\} = 0. \quad (2.37)$$

Die Ausführung der beiden partiellen Ableitungen ergibt

$$\frac{d}{dx} \left\{ n(y(x)) \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right\} - n'(y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} = 0. \quad (2.38)$$

Nun ist noch die totale Differentiation zu berechnen:

$$\frac{n'(y(x))y'(x)^2 + n(y(x))y''(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \frac{n(y(x))y'(x)^2 y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}} - n'(y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2} = 0. \quad (2.39)$$

Dies lässt sich zur folgenden Differentialgleichung für den Lichtweg  $y(x)$  zusammenfassen:

$$y''(x)n(y(x)) - [1 + y'(x)^2] n'(y(x)) = 0. \quad (2.40)$$

Im Spezialfall des Vakuums, also  $n(y) = 1$ , besitzt (2.40) tatsächlich die Gerade (2.14) als Lösung. Im allgemeinen Fall eines vorgegebenen Brechungsindex  $n(y)$  lässt sich (2.40) wie folgt integrieren. Zunächst folgt aus (2.40)

$$\frac{y''(x)y'(x)}{1 + y'(x)^2} = \frac{n'(y(x))y'(x)}{n(y(x))}, \quad (2.41)$$

so dass linke und rechte Seite jeweils als totales Differential einer Funktion geschrieben werden können:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{2} \ln [1 + y'(x)^2] = \frac{d}{dx} \ln n(y(x)). \quad (2.42)$$

Die Integration von (2.42) führt auf

$$\frac{1}{2} \ln [1 + y'(x)^2] = \ln n(y(x)) + \ln c_1, \quad (2.43)$$

wobei  $\ln c_1$  eine erste Integrationskonstante darstellt. Aus (2.43) erhalten wir dann

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sqrt{c_1^2 n(y(x))^2 - 1}. \quad (2.44)$$

Durch eine Separation der Variablen ergibt sich

$$\int^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 n(y)^2 - 1}} = x + c_2. \quad (2.45)$$

wobei  $c_2$  eine zweite Integrationskonstante darstellt. Lässt sich das unbestimmte Integral auf der linken Seite für einen bestimmten Brechungsindex  $n(y)$  lösen, so ist (2.45) noch explizit nach  $y(x)$  aufzulösen.

Wir betrachten nun eine flimmernde Straße im Sommer. Durch die Reflektion des Sonnenlichtes am Asphalt wird die Luft oberhalb des Bodens so stark aufgeheizt, dass sie nach oben steigt. Der Brechungsindex der Luft wächst mit der Dichte an, d.h. er nimmt zum Boden hin ab. Als vereinfachte Annahme setzen wir voraus, dass die Höhenabhängigkeit des Brechungsindex linear ist, siehe Abb. 2.3b), also

$$n(y) = ay + b; \quad a > 0. \quad (2.46)$$

Einsetzen von (2.46) in (2.45) führt auf das Integral

$$\int^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{c_1^2 (ay + b)^2 - 1}} = x + c_2. \quad (2.47)$$

Durch die geschickte Substitution

$$\cosh z(y) = c_1(ay + b), \quad dz \sinh z(y) = c_1 a dy \quad (2.48)$$

geht (2.47) über in

$$\frac{1}{c_1 a} \int^{z(y(x))} \frac{\sinh z}{\sqrt{\cosh^2 z - 1}} dz = x + c_2. \quad (2.49)$$

Aufgrund des hyperbolischen Pythagoras

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (2.50)$$

vereinfacht sich (2.49) zu

$$\frac{z(y(x))}{c_1 a} = x + c_2. \quad (2.51)$$

Aus (2.48) und (2.51) folgt dann die gesuchte Lösung zu

$$\cosh(c_1 a x + c_1 c_2 a) = c_1 a y(x) + c_1 b, \quad (2.52)$$

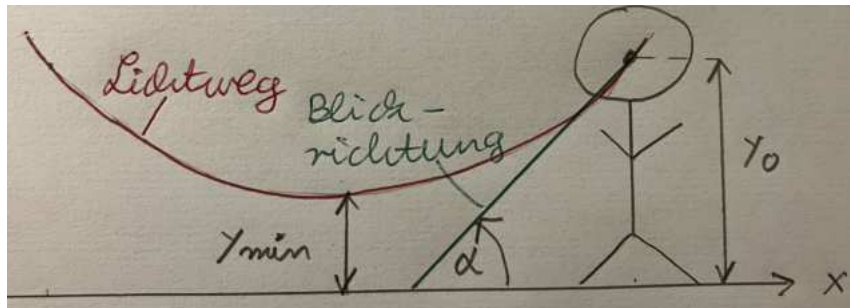


Abbildung 2.5: Aufgrund der linearen Abhängigkeit des Brechungsindex (2.46) ist der Lichtweg laut (2.53) durch einen Kosinus hyperbolicus gegeben. Dabei hängt der minimale Abstand vom Boden  $y_{\min}$  gemäß (2.64) von der Höhe der Augen  $y_0$  und dem Beobachterwinkel  $\alpha$  ab.

was sich wie folgt zusammenfassen lässt:

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A} + C\right) - \frac{b}{a}. \quad (2.53)$$

Damit wird der Lichtweg durch einen Kosinus hyperbolicus beschrieben, siehe Abb. 2.5. Hierbei wurden die beiden Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  ersetzt durch

$$A = \frac{1}{c_1 a}, \quad C = c_1 c_2 a. \quad (2.54)$$

Da die zugrunde liegende gewöhnliche Differentialgleichung (2.40) von zweiter Ordnung ist, treten in der Lösung (2.53) noch die beiden Parameter  $A$  und  $C$  auf. Sie lassen sich wie folgt physikalisch interpretieren.

Zunächst einmal kann man den Ursprung auf der  $x$ -Achse frei wählen. Wir legen den Parameter  $C$  so fest, dass der Abstand des Lichtweges bei  $x = 0$

$$y(0) = A \cosh C - \frac{b}{a} \quad (2.55)$$

minimal wird. Nach (2.55) impliziert dies die Wahl  $C = 0$ . Dadurch reduziert sich der Lichtweg (2.53) auf

$$y(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A}\right) - \frac{b}{a} \quad (2.56)$$

und der minimale Abstand ergibt sich zu

$$y_{\min} = y(0) = A - \frac{b}{a}. \quad (2.57)$$

Nun führen wir noch den Winkel  $\alpha$  ein, unter dem der Beobachter an der Stelle  $x = L$  auf den Asphalt sieht, siehe Abb. 2.6. Unter Berücksichtigung von (2.56) erhalten wir

$$\tan \alpha = y'(L) = \sinh\left(\frac{L}{A}\right). \quad (2.58)$$

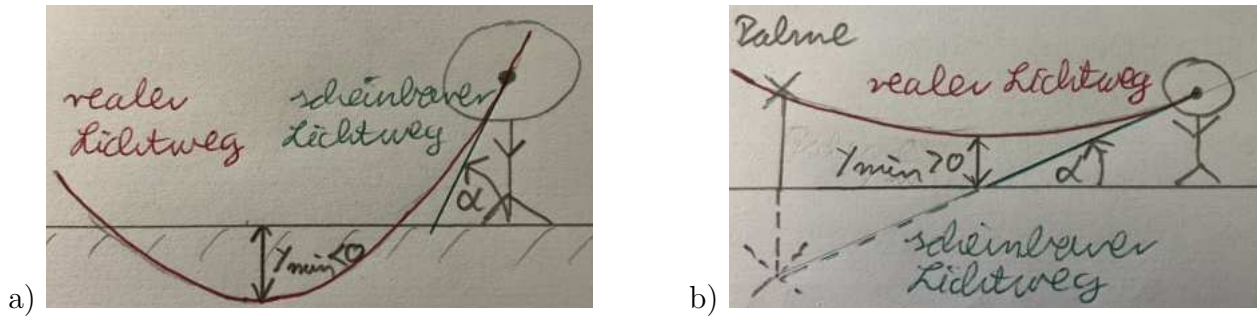


Abbildung 2.6: a) Für große Blickwinkel  $\alpha$  sieht der Beobachter den schwarzen Asphalt, da  $y_{\min} < 0$  aus (2.64) folgt. b) Dagegen sieht der Beobachter im Falle eines kleinen Blickwinkels  $\alpha$  wegen  $y_{\min} > 0$  eine Fata Morgana.

Die Höhe der Augen über dem Asphalt  $y_0$ , siehe Abb. 2.6, ergeben sich mit Hilfe von (2.50) und (2.56) zu

$$y_0 = y(L) = A \cosh\left(\frac{L}{A}\right) - \frac{b}{a} = A \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{L}{A}\right)} - \frac{b}{a}. \quad (2.59)$$

Hieraus ergibt sich mit (2.58)

$$y_0 = A \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - \frac{b}{a}. \quad (2.60)$$

Eine nützliche trigonometrische Umformung unter Verwendung des trigonometrischen Pythagoras lautet

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad (2.61)$$

so dass wir daraus ablesen

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (2.62)$$

Aus (2.61) und (2.62) folgt damit

$$y_0 = \frac{A}{\cos \alpha} - \frac{b}{a} \implies A = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) \cos \alpha. \quad (2.63)$$

Damit ist der Parameter  $A$  durch die Augenhöhe  $y_0$  und den Blickwinkel  $\alpha$  ausgedrückt. Aus (2.57) und (2.63) ergibt sich der minimale Abstand  $y_{\min}$ , siehe Abb. 2.6, schließlich zu

$$y_{\min} = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) \cos \alpha - \frac{b}{a}. \quad (2.64)$$

Für große Blickwinkel  $\alpha$  gilt nach (2.64) offenbar  $y_{\min} < 0$ . Blickt man also auf die Straße in unmittelbarer Nähe, so sieht der Autofahrer den schwarzen Asphalt, siehe Abb. 2.6 a). Für kleine Blickwinkel  $\alpha$  folgt aus (2.64) aber  $y_{\min} > 0$ . Blickt also der Autofahrer in die Ferne, so sieht er auf dem Asphalt effektiv eine Spiegelung des Himmels. Dieses Phänomen führt in der Wüste zur Fata Morgana, siehe Abb. 2.6 b). Der kritische Winkel  $\alpha_{\text{crit}}$ , ab dem eine Fata Morgana möglich ist, folgt also aus der Bedingung  $y_{\min} = 0$ . Aus (2.64) ergibt sich hierfür

$$\cos \alpha_{\text{crit}} = \frac{b/a}{y_0 + b/a}. \quad (2.65)$$

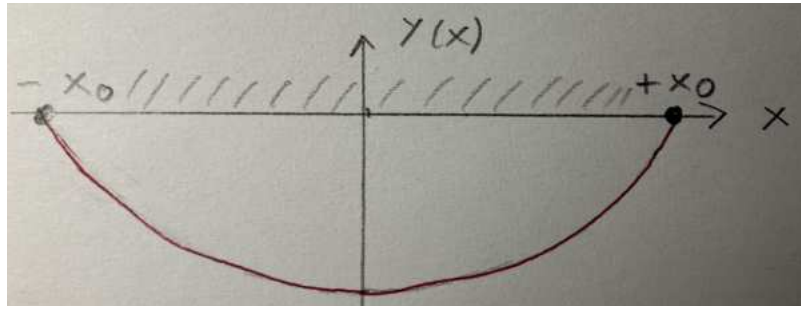


Abbildung 2.7: Kette im Schwerfeld der Erde mit festen Aufhängepunkten (2.66).

## 2.4 Kettenlinie

Häufig müssen Variationsprobleme mit gewissen Nebenbedingungen gelöst werden. In diesem Abschnitt wollen wir das Vorgehen anhand eines Beispiels diskutieren. Hierzu betrachten wir das Problem, dass eine Kette der Länge  $L$  und der konstanten Massendichte  $\mu$  an ihren beiden Endpunkten aufgehängt wird, siehe Abb. 2.7. Gesucht ist die Form  $y(x)$  der Kette, die sich im Schwerfeld der Erde einstellt. Die Kette wird versuchen, ihre potentielle Energie im Schwerfeld zu minimieren. Es handelt sich um ein Variationsproblem für die gesuchte Funktion  $y(x)$ . Dabei ist dieses Variationsproblem unter der Nebenbedingung zu lösen, dass die Länge der Kette fest vorgegeben ist.

Hierzu parametrisieren wir die Kettenlinie  $y = y(x)$  so, dass die Dirichletschen Randbedingungen

$$y(\pm x_0) = 0 \quad (2.66)$$

gelten. Dann ist die potentielle Energie gegeben durch

$$E_{\text{pot}} = \int y g \, dm, \quad (2.67)$$

wobei das Massenelement  $dm$  vom totalen Differential der Bogenlänge  $ds$  abhängt:

$$\mu = \frac{dm}{ds} \quad \implies \quad dm = \mu \, ds. \quad (2.68)$$

Aus (2.2) und (2.66)–(2.68) folgt damit

$$E_{\text{pot}}[y(x)] = \mu g \int_{-x_0}^{x_0} y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx. \quad (2.69)$$

Man könnte nun meinen, dass die Extremalisierung von (2.69) direkt durch die entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen gegeben ist. Das ist jedoch falsch, da bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen davon ausgegangen wird, dass alle möglichen Variationen  $\delta y(x)$  erlaubt sind, die den Dirichletschen Randbedingungen

$$\delta y(\pm x_0) = 0 \quad (2.70)$$

genügen. Stattdessen dürfen nur solche Variationen  $\delta y(x)$  zugelassen werden, die die Länge der Kette konstant lassen. Analog zu (2.3) ist die Länge ein Funktional der Kettenlinie  $y(x)$  gemäß

$$L[y(x)] = \int_{-x_0}^{x_0} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx. \quad (2.71)$$

Es sollen nur diejenigen Kettenlinien  $y(x)$  zugelassen werden, die eine fest vorgegebene Länge  $L$  besitzen:

$$L[y(x)] = L. \quad (2.72)$$

Für die erlaubten Variationen  $\delta y(x)$  erhalten wir dann wie in (2.5) und (2.10)

$$\delta L = - \int_{-x_0}^{x_0} \delta y(x) \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} dx = 0. \quad (2.73)$$

Die Randterme treten wegen der Randbedingung (2.70) nicht auf. Damit stellt (2.73) die gesuchte Nebenbedingung für die Variation  $\delta y(x)$  dar. Andererseits erhalten wir durch Variation der potentiellen Energie (2.69) auf der üblichen Weise die Forderung

$$0 = \delta E_{\text{pot}} = \int_{-x_0}^{x_0} \delta y(x) \left\{ \frac{\partial}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'(x)} \right\} \mu g \sqrt{1 + y'(x)^2} y(x) dx, \quad (2.74)$$

woraus folgt

$$\mu g \int_{-x_0}^{x_0} \left\{ \sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right\} \delta y(x) dx = 0. \quad (2.75)$$

Dabei gilt (2.75) aber nur für die Variationen  $\delta y(x)$ , die die Nebenbedingung (2.73) erfüllen. Aus (2.73) und (2.75) folgt dann offenbar die Identität

$$\mu g \int_{-x_0}^{x_0} \left\{ \sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right\} \delta y(x) dx = 0 \quad (2.76)$$

für eine beliebige Konstante  $\lambda$ . Die Einführung dieses Lagrange-Parameters  $\lambda$  erlaubt es uns nun, das vorliegende Problem in den beiden folgenden Schritten zu lösen:

- 1. Schritt: Leite aus der Bedingung (2.76) eine Differentialgleichung für  $y(x)$  ab, indem die Variationen  $\delta y(x)$  jetzt als unabhängig betrachtet werden:

$$\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{d}{dx} \frac{y(x)y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} + \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = 0. \quad (2.77)$$

- 2. Schritt: Bestimme die allgemeine Lösung von (2.77). Da sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, hat ihre allgemeine Lösung zwei freie Konstanten, die an die Randbedingungen (2.66) angepaßt werden können. Die resultierende Lösung hängt aber noch vom freien Parameter  $\lambda$  ab. Der kann dazu verwendet werden, die Länge der Kette gemäß (2.71), (2.72) auf  $L$  zu fixieren. Ohne diesen Parameter  $\lambda$  in (2.77) wäre es nicht möglich, sowohl die Randbedingungen (2.66) als auch die Länge (2.71), (2.72) anzupassen. Letztendlich benötigen wir also genau so viele Parameter, wie es Bedingungen gibt.

Wir begründen nun dieses Vorgehen wie folgt. Wir betrachten die Hilfsgröße

$$E[y(x)](\lambda) = E_{\text{pot}}[y(x)] + \mu g \lambda \left\{ L - L[y(x)] \right\}, \quad (2.78)$$

die ein Funktional der Kettenlinie  $y(x)$  und eine Funktion des Lagrange-Parameters  $\lambda$  darstellt. Wir suchen das Extremum von (2.78) bezüglich all seiner Freiheitsgrade, d.h. wir extremalisieren sowohl bezüglich  $y(x)$  als auch bezüglich  $\lambda$ . Eine Extremalisierung bezüglich  $\lambda$  gemäß

$$\frac{\partial E[y(x)](\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.79)$$

führt offenbar auf die Nebenbedingung (2.72). Wertet man nun (2.78) für alle Kettenlinien  $y(x)$  aus, bei denen (2.72) erfüllt ist, reduziert sich (2.78) offenbar auf die potentielle Energie (2.69). Da durch den Lagrange-Parameter  $\lambda$  in (2.78) die Nebenbedingung (2.72) berücksichtigt ist, kann die Extremalisierung der Hilfsgröße (2.78) bezüglich aller möglichen Variationen  $\delta y(x)$  erfolgen. Dies führt auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'(x)} \right\} \mu g \left\{ y(x) - \lambda \right\} \sqrt{1 + y'(x)^2} = 0, \quad (2.80)$$

die offenbar mit (2.77) identisch ist.

Anschließend wollen wir die gewöhnliche Differentialgleichung (2.77) lösen. Hierzu beobachten wir, dass sie aufgrund von

$$\frac{d}{dx} \left\{ [y(x) - \lambda] \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right\} - \sqrt{1 + y'(x)^2} = 0 \quad (2.81)$$

genau von der Form (2.38) mit der Identifikation

$$n(y) = y - \lambda \quad (2.82)$$

ist. Offenbar ist (2.46) mit (2.82) für

$$a = 1, \quad b = -\lambda \quad (2.83)$$

identisch. Daher können wir die Lösung der Differentialgleichung (2.81) direkt aus dem vorhergehenden Abschnitt übernehmen. Aus (2.53) und (2.83) folgt zunächst

$$y(x) = A \cosh \left( \frac{x}{A} + C \right) + \lambda. \quad (2.84)$$

Die Einarbeitung der beiden Randbedingungen (2.66) ergibt

$$y(x_0) = A \left[ \cosh C \cosh \left( \frac{x_0}{A} \right) + \sinh C \sinh \left( \frac{x_0}{A} \right) \right] + \lambda = 0, \quad (2.85)$$

$$y(-x_0) = A \left[ \cosh C \cosh \left( \frac{x_0}{A} \right) - \sinh C \sinh \left( \frac{x_0}{A} \right) \right] + \lambda = 0. \quad (2.86)$$

Die Differenz von (2.85) und (2.86) führt auf

$$2A \sinh C \sinh \left( \frac{x_0}{A} \right) = 0 \quad \implies \quad C = 0. \quad (2.87)$$

Aus (2.85) und (2.87) folgt ferner

$$A \cosh\left(\frac{x_0}{A}\right) + \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -A \cosh\left(\frac{x_0}{A}\right). \quad (2.88)$$

Damit ist der Lagrange-Parameter  $\lambda$  festgelegt. Nach (2.84), (2.87), und (2.88) lautet die Form der Kettenlinie

$$y(x) = A \left[ \cosh\left(\frac{x}{A}\right) - \cosh\left(\frac{x_0}{A}\right) \right]. \quad (2.89)$$

Schließlich müssen wir die Konstante  $A$  noch so anpassen, dass die Länge der Kette gleich  $L$  ist. Aus (2.89) folgt

$$y'(x) = A \sinh\left(\frac{x}{A}\right), \quad (2.90)$$

so dass Einsetzen in (2.71), (2.72) zusammen mit (2.50) auf folgendes Integral führt:

$$L = \int_{-x_0}^{x_0} \cosh\left(\frac{x}{A}\right) dx. \quad (2.91)$$

Die Auswertung des Integrals führt auf

$$L = 2A \sinh\left(\frac{x_0}{A}\right). \quad (2.92)$$

Diese Gleichung lässt sich zwar nicht explizit nach  $A$  auflösen, sie legt aber  $A$  durch  $x_0$  und  $L$  implizit fest. Damit ist die Form der Kettenlinie (2.89) vollständig bestimmt.

## 2.5 Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte

Der Lagrange-Formalismus ist insofern sehr elegant und effizient, als er die Zwangskräfte gänzlich aus dem Problem eliminiert. Andererseits kann man sich Situationen vorstellen, in denen es interessant wäre, die Zwangskräfte zu kennen. In diesem Fall kann man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwenden, die wir im folgenden diskutieren werden.

Wir betrachten ein System, das wir durch einen Satz von  $N$  Koordinaten  $q_1, \dots, q_N$  beschreiben. diese Koordinaten sollen über  $K$  rhenome holonome Zwangsbedingungen

$$f_j(q_1(t), \dots, q_N(t), t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (2.93)$$

miteinander zusammenhängen. Aus dem Hamiltonschen Prinzip folgt weiterhin, dass (2.27) verschwinden muss:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt = 0. \quad (2.94)$$

Bis zu diesem Punkt haben wir nämlich nicht von der Unabhängigkeit der Variationen  $\delta q_i(t)$  Gebrauch gemacht. Die Variationen  $\delta q_i(t)$  hängen aufgrund der holonomen Zwangsbedingungen (2.93) über

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (2.95)$$

zusammen. Daher können wir in (2.94) nicht schließen, dass die Ausdrücke in den geschweiften Klammern verschwinden. Wir könnten dieses Problem dadurch lösen, dass wir wieder neue  $N - K$  unabhängige verallgemeinerte Koordinaten einführen. Stattdessen wählen wir einen anderen Weg, der es uns erlaubt, die wirkenden Zwangskräfte zu berechnen.

Offenbar folgt aus (2.94) und (2.95)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt = 0. \quad (2.96)$$

wobei die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)$  beliebige Funktionen darstellen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir die Variationen  $\delta q_1(t), \dots, \delta q_{N-K}(t)$  als unabhängig. Die restlichen Variationen  $\delta q_{N-K+1}(t), \dots, \delta q_N(t)$  sind dann gemäß (2.95) voneinander abhängig. Nun haben wir aber noch die Freiheit, die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)$  geeignet festzulegen. Wir wählen sie so, dass die geschweiften Klammern in (2.96) für  $i = N - K + 1, \dots, N$  verschwinden:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} = 0; \quad i = N - K + 1, \dots, N. \quad (2.97)$$

Dann reduziert sich die Variationsbedingung (2.96) auf

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N-K} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} \right\} \delta q_i(t) dt = 0. \quad (2.98)$$

Da aber die Variationen  $\delta q_i(t)$  für  $i = 1, \dots, N - K$  als unabhängig angesehen werden können, müssen die geschweiften Klammern in (2.98) einzeln verschwinden:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} = 0; \quad i = 1, \dots, N - K. \quad (2.99)$$

Die Gleichungen (2.97) und (2.99) lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} = 0; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.100)$$

Zusammen mit den  $K$  Nebenbedingungen (2.93) sind dies insgesamt  $N + K$  Gleichungen für die  $N + K$  unbekannt Funktionen  $q_1(t), \dots, q_N(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)$ .

Nun wollen wir noch einen Zusammenhang mit den Zwangskräften herstellen. Berücksichtigen wir die Definition der Lagrange-Funktion (1.66), so geht (2.99) zunächst über in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i(t)} - \frac{\partial T}{\partial q_i(t)} = - \frac{\partial V}{\partial q_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.101)$$

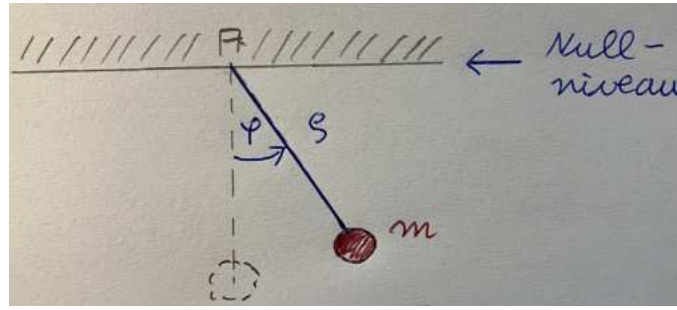


Abbildung 2.8: Pendel mit Nullniveau im Aufhängepunkt.

Dies entspricht der Form der Lagrange-Gleichungen (1.52), wo die rechte Seite verallgemeinerte Kräfte darstellt. Im Falle von kartesischen Koordinaten reduziert sich (2.101) übrigens auf

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}_i(t)}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.102)$$

Gleichungen (2.101) und (2.102) legen nahe, die Ausdrücke

$$Q_{Z,i} = \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial q_i(t)} = 0; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.103)$$

als Zwangskräfte zu interpretieren. Demnach tragen zur  $i$ ten Richtung der Zwangskraft im allgemeinen alle Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  bei. Durch diese Zwangskräfte sorgen die Lagrange-Multiplikatoren dafür, dass die Dynamik im Einklang mit den Zwangsbedingungen abläuft.

Als Beispiel betrachten wir nochmals das Pendel, siehe Abb. 2.8. Die Lagrange-Funktion (1.66) setzt sich aus der kinetischen Energie (1.54) und der entsprechenden potentiellen Energie zusammen, wobei wir das Nullniveau gemäß Abb. 2.8 festlegen:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + mg\rho \cos \varphi. \quad (2.104)$$

Außerdem haben wir die skleronome holonome Zwangsbedingung

$$f(\rho, \varphi) = \rho - l = 0 \quad (2.105)$$

zu beachten. Die Bewegungsgleichungen (2.100) ergeben sich daher zu

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 \quad \implies \quad \ddot{\rho} - m\rho \dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + \lambda = 0, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dt} (m\rho^2 \dot{\varphi}) + mg\rho \sin \varphi = 0. \quad (2.107)$$

Aus (2.105) folgt durch zeitliche Differentiation

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0, \quad (2.108)$$

so dass sich aus (2.106) mit (2.105) der Lagrange-Multiplikator bestimmt zu

$$\lambda = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi. \quad (2.109)$$

Daraus ergeben sich dann mit (2.103) und (2.109) die Komponenten der Zwangskraft zu

$$Q_{Z\rho} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \rho} = \lambda = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi, \quad (2.110)$$

$$Q_{Z\varphi} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.111)$$

was mit dem früheren Ergebnis (1.24) übereinstimmt.

Wir schließen den Abschnitt mit einer Reihe nützlicher Bemerkungen ab:

- Die Extremalisierung der Wirkung (2.20) unter Berücksichtigung der holonomen Nebenbedingungen ergibt sich auch durch folgende Überlegung. Wir betrachten die Hilfsgröße

$$\tilde{\mathcal{A}}[q(t), \lambda(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q(t), \dot{q}(t); \lambda(t), \dot{\lambda}(t); t) dt \quad (2.112)$$

mit dem Integranden

$$\tilde{L}(q(t), \dot{q}(t); \lambda(t), \dot{\lambda}(t); t) = L(q(t), \dot{q}(t); t) + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) f_j(q(t), t) \quad (2.113)$$

als Funktional der verallgemeinerten Koordinaten  $q_1(t), \dots, q_N(t)$  und der Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1(t), \dots, \lambda_K(t)$ . Eine Extremalisierung bezüglich  $q_i(t)$  mit  $q_i(t)$  mit  $i = 1, \dots, N$  führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.100), während eine Extremalisierung bezüglich  $\lambda_j(t)$  mit  $j = 1, \dots, K$  auf die holonomen Nebenbedingungen (2.93) führt.

- Wir können den Formalismus der Lagrange-Multiplikatoren verwenden, um a posteriori das d'Alembertsche Prinzip zu beweisen, dass alle Zwangskräfte zusammen keine virtuelle Arbeit verrichten, siehe Abschnitt 1.2.3. Für die von Zwangskräften bei virtuellen Verrückungen verrichtete Arbeit erhalten wir nämlich mit Hilfe von (2.103)

$$\sum_{i=1}^N Q_{Zi} \delta q_i = \sum_{j=1}^K \lambda_j \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i \right), \quad (2.114)$$

was sich mit Hilfe von (2.95) reduziert auf

$$\sum_{i=1}^N Q_{Zi} \delta q_i = 0. \quad (2.115)$$

- Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren lässt sich ohne weiteres von holonomen Zwangsbedingungen auch auf nichtholonome Zwangsbedingungen vom Typ

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ji} dq_i + \beta_j dt = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (2.116)$$

erweitern. Damit (2.116) wirklich nichtholonom ist, muss eine der Beziehungen

$$\frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial q_k} = \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial t} = \frac{\partial \beta_j}{\partial q_i} \quad (2.117)$$

nicht gelten. Die Variationen  $\delta q_i(t)$  erfüllen dann statt (2.95) die instantanen Bedingungen

$$\sum_{i=1}^N \alpha_{ji} \delta q_i(t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (2.118)$$

und wir erhalten analog zur obigen Ableitung statt (2.100) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} + \sum_{j=1}^K \lambda_j(t) \alpha_{ji} = 0; \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.119)$$

# Kapitel 3

## Symmetrien und Erhaltungssätze

In diesem Kapitel untersuchen wir auf der Grundlage des Hamiltonschen Prinzips den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen in vollster Allgemeinheit. Wir werden zeigen, dass jede einparametrische Schar von Transformationen der generalisierten Koordinaten und der Zeit, unter der das Hamiltonsche Prinzip invariant ist, zu einer Erhaltungsgröße führt. Dieser Zusammenhang wurde von der Mathematikerin Emmy Noether zu Beginn des 20. Jahrhunderts abgeleitet und trägt daher ihren Namen.

### 3.1 Zyklische Koordinaten

Zunächst lesen wir aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (2.28) eine wichtige Folgerung ab. Hängt die Lagrange-Funktion  $L$  nicht explizit von einer generalisierten Koordinate  $q_i$  ab

$$L = L(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t), \quad (3.1)$$

gilt also

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (3.2)$$

so bezeichnet man sie als zyklisch. Für eine solche zyklische generalisierte Koordinate folgt aus (2.28) unmittelbar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (3.3)$$

Das bedeutet, dass die Größe

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.4)$$

die man auch als den zu  $q_i$  kanonisch konjugierten Impuls bezeichnet, eine Erhaltungsgröße darstellt. Ursache für die Existenz dieser Erhaltungsgröße ist die kontinuierliche Symmetrie,

dass die Lagrange-Funktion  $L$  unter einer Translation dieser zyklischen Koordinate  $q_i$  invariant ist. In der Tat ändert sich (3.1) nicht unter der Symmetrietransformation  $q_i \rightarrow q_i + c_i$ , wobei  $c_i$  eine beliebige Translation der generalisierten Koordinate  $q_i$  beschreibt. Diesen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätze wollen wir an zwei Beispielen illustrieren.

Als erstes Beispiel betrachten wir die Bewegung einer Punktemasse in drei Dimensionen in einem eindimensionalen Potential. Die zugrunde liegende Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x) \quad (3.5)$$

hängt offenbar nicht von den Koordinaten  $y$  und  $z$  ab, so dass diese zyklisch sind. Deshalb folgt aus (3.3) und (3.4), dass die dazu kanonische konjugierten Impulse

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad (3.6)$$

Konstanten der Bewegung sind.

Im zweiten Beispiel betrachten wir eine ebene Bewegung in einem Zentralpotential, für das die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - V(\rho). \quad (3.7)$$

Hieraus lesen wir ab, dass der Winkel  $\varphi$  eine zyklische Koordinate ist. Demnach ist der dazu kanonisch konjugierte Impuls, der aus (3.4) und (3.7) folgt, also

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi}, \quad (3.8)$$

eine Erhaltungsgröße. Es handelt sich offenbar gerade um den Drehimpuls. Im ersten Beispiel führt die Translationsinvarianz in  $y$ - und  $z$ -Richtung zur Impulserhaltung. Im zweiten Beispiel liegt ein Zusammenhang von Rotationsinvarianz und Drehimpulserhaltung vor. Im Folgenden wollen wir diesen tiefliegenden Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrien und Erhaltungssätzen allgemein fassen.

## 3.2 Einparametrische Schar von Transformationen

Wir betrachten nun Transformationen der generalisierten Koordinaten und der Zeit, die von einem kontinuierlichen Parameter  $\varepsilon$  abhängen:

$$q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t, \varepsilon), \quad (3.9)$$

$$t' = t'(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t, \varepsilon). \quad (3.10)$$

Für die Herleitung des Noether-Theorems wird es ausreichen, die Transformationen (3.9) und (3.10) für infinitesimal kleine Scharparameter  $\varepsilon$  zu betrachten. Wir entwickeln daher (3.9) und (3.10) in eine Taylor-Reihe bezüglich des Scharparameters  $\varepsilon$ . Dabei soll der Parameter  $\varepsilon = 0$

der identischen Transformation entsprechen, während der erste Term in  $\varepsilon$  eine infinitesimale Transformation darstellt:

$$q'_i = q_i + \varepsilon \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots, \quad (3.11)$$

$$t' = t + \varepsilon \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots. \quad (3.12)$$

Im Folgenden wird sich zeigen, dass die Noetherschen Erhaltungsgrößen von dieser infinitesimalen Transformation (3.11), (3.12) abhängen wird.

### 3.3 Invarianzbedingung

Wir vergleichen nun die Wirkung einer Bahn  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$  zwischen den Zeiten  $t_1$  und  $t_2$

$$\mathcal{A}[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L \left( q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t \right) dt \quad (3.13)$$

mit der Wirkung der entsprechend transformierten Bahn  $q'(t') = (q'_1(t'), \dots, q'_f(t'))$  zwischen den Zeiten  $t'_1$  und  $t'_2$

$$\mathcal{A}[q'(t')] = \int_{t'_1}^{t'_2} L \left( q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) dt'. \quad (3.14)$$

Die Transformation (3.9) und (3.10) stellt eine Symmetrietransformation dar, wenn sie die Bewegungsgleichungen und damit das Hamiltonsche Prinzip nicht ändert. Das ist in jedem Fall gegeben, wenn beide Wirkungen übereinstimmen:

$$\mathcal{A}[q(t)] = \mathcal{A}[q'(t')]. \quad (3.15)$$

Aus (3.13)–(3.15) folgt dann die Identität

$$\int_{t_1}^{t_2} L \left( q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) \frac{dt'}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} L \left( q(t), \frac{dq(t)}{dt}, t \right) dt. \quad (3.16)$$

Dabei ist auf der linken Seite die Transformation (3.9) und (3.10) einzusetzen. Wir untersuchen nun die Konsequenzen, wenn man die Transformation (3.9) und (3.10) auf die infinitesimale Transformation (3.11) und (3.12) einschränkt. Entwickelt man die linke Seite von (3.16) bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$ , so erhalten wir die Invarianzbedingung

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ L \left( q'(t'), \frac{dq'(t')}{dt'}, t' \right) \frac{dt'}{dt} \right] \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.17)$$

### 3.4 Erhaltungssätze

Bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  folgt aus (3.12)

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \varepsilon \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \quad (3.18)$$

und damit für die transformierten generalisierten Geschwindigkeiten unter Berücksichtigung von (3.11) und (3.18)

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dq'_i}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dq_i}{dt} + \varepsilon \left( \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - \frac{dq_i}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) + \dots \quad (3.19)$$

Wir setzen nun (3.11), (3.12), (3.18) und (3.19) in die Invarianzbedingung (3.17) ein:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ L \left( q + \varepsilon \left. \frac{\partial q'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots, \frac{dq}{dt} + \varepsilon \left( \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial q'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - \frac{dq}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) + \dots, t + \varepsilon \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \right) \\ & \times \left( 1 + \varepsilon \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \dots \right) \Big] \Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Auswertung von (3.20) bis zur ersten Ordnung in  $\varepsilon$  führt auf

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial q_i} \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left( \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - \frac{dq_i}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) + \left( \frac{\partial L}{\partial t} + L \frac{d}{dt} \right) \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.21)$$

Andererseits wissen wir von der Bahn  $q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t))$ , dass sie der Euler-Lagrange-Gleichung (2.28) genügt. Deshalb folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \left[ L(q, \dot{q}, t) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{i=1}^f \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right), \quad (3.22)$$

was sich aufgrund von (2.28) reduziert auf

$$\frac{d}{dt} \left[ L(q, \dot{q}, t) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.23)$$

Mit Hilfe von (2.28) und (3.23) geht (3.21) über in

$$\sum_{i=1}^f \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (3.24)$$

$$+ \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{d}{dt} \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3.25)$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right] = 0. \quad (3.26)$$

Hieraus lesen wir das Noether-Theorem ab. Ist die Wirkung unter der einparametrischen Schar von Transformationen (3.9) und (3.10) invariant, so folgt daraus die Erhaltungsgröße

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \left( L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \text{konst.} . \quad (3.27)$$

Es handelt sich dabei um eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die Bahnkurve, die ein erstes Integral der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.28) darstellt. Wir zeigen nun, dass sich die bekannten Erhaltungssätze von Impuls, Drehimpuls und Energie als Spezialfälle des Noether-Theorems (3.27) ergeben.

### 3.5 Zyklische Koordinaten

Liegt eine zyklische Koordinate  $q_i$  vor, so ist die Lagrange-Funktion (3.1) unter einer Translation dieser zyklischen Koordinate

$$q'_j = q_j + \varepsilon \delta_{ij}, \quad t' = t \quad (3.28)$$

invariant. Es gilt daher

$$\frac{\partial q'_j}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.29)$$

und die Erhaltungsgröße (3.27) reduziert sich auf den zur zyklischen Koordinate  $q_i$  kanonisch konjugierten Impuls (3.4).

### 3.6 Impulserhaltung

Aus der Homogenität des Raumes folgt, dass sich die Eigenschaften eines abgeschlossenen mechanischen Vielteilchensystems nicht ändern, wenn man es als Ganzes verschiebt. Wir können also fordern, dass sich die Lagrange-Funktion bei einer solchen Verschiebung nicht ändert:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \boldsymbol{\rho}, \quad t' = t. \quad (3.30)$$

Dabei erfahren also alle Massenpunkte  $i = 1, \dots, N$  dieselbe Verschiebung  $\boldsymbol{\rho}$ . Einsetzen von (3.30) in (3.27) führt zunächst auf

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \text{konst.} . \quad (3.31)$$

Da aber die Verschiebung  $\boldsymbol{\rho}$  beliebig ist, folgt aus der Homogenität des Raumes, dass der Gesamtdrehimpuls des Systems

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad (3.32)$$

also die Summe über die Impulse

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (3.33)$$

aller Teilchen, eine Erhaltungsgröße darstellt.

### 3.7 Drehimpulserhaltung

Aus der Isotropie des Raumes folgt entsprechend, dass sich die Eigenschaften eines abgeschlossenen mechanischen Vielteilchensystems nicht ändern, wenn man es als Ganzes im Raum dreht. Für das Noether-Theorem ist es ausreichend, sich auf eine infinitesimale Drehung zu beschränken:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i + \dots, \quad t' = t. \quad (3.34)$$

Hierbei beschreibt (3.34) eine infinitesimale Rotation um die Achse  $\boldsymbol{\varphi}/|\boldsymbol{\varphi}|$  mit dem Winkel  $\varepsilon|\boldsymbol{\varphi}|$ . Beispielsweise führt eine Rotation um die  $z$ -Achse mit dem infinitesimal kleinen Winkel  $\varepsilon$  auf

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon & 0 \\ \sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

was für  $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon \mathbf{e}_z$  mit (3.34) übereinstimmt. Einsetzen von (3.34) in (3.27) ergibt dann

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\varphi} \cdot \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = \text{konst.} \quad (3.36)$$

Da dies aber für einen beliebigen Vektor  $\boldsymbol{\varphi}$  gilt, folgt aus der Isotropie des Raumes, dass der Gesamtdrehimpuls des Systems

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i, \quad (3.37)$$

also gemäß (3.33) die Summe über die Drehimpulse

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (3.38)$$

aller Teilchen, eine Erhaltungsgröße darstellt.

### 3.8 Energieerhaltung

Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab

$$L = L(q_1, \dots, q_f; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f), \quad (3.39)$$

so lässt die Translation in der Zeit

$$q'_i = q_i, \quad t' = t + \varepsilon \quad (3.40)$$

die Wirkung invariant. Es gilt dann

$$\left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1, \quad (3.41)$$

so dass sich aus (3.38) die folgende Erhaltungsgröße ergibt:

$$L - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \text{konst.} \quad (3.42)$$

Um die physikalische Bedeutung dieser Erhaltungsgröße zu untersuchen, betrachten wir ein abgeschlossenes konservatives System mit skleronomen holonomen Zwangsbedingungen. In diesem Fall lautet der Zusammenhang zwischen kartesischen und generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_f); \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.43)$$

Dann gilt für die Geschwindigkeiten aufgrund der Kettenregel

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (3.44)$$

und die kinetische Energie

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (3.45)$$

reduziert sich auf die Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (3.46)$$

mit der Metrik

$$g_{jk}(q) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = g_{kj}(q). \quad (3.47)$$

Man kann sie als koordinatenabhängige effektive Masse interpretieren. Da das System abgeschlossen und konservativ ist, gibt es ein Potential  $V(q)$ , das nicht explizit von der Zeit abhängt und die Lagrange-Funktion lautet

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k - V(q). \quad (3.48)$$

Für den kanonische konjugierten Impuls erhalten wir mit (3.4) und (3.47)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^f g_{ij}(q) \dot{q}_j, \quad (3.49)$$

so dass es sich bei der Erhaltungsgröße (3.42) gerade um die Gesamtenergie des Systems handelt:

$$\sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f g_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + V(q) = T + V = \text{konst.} \quad (3.50)$$

Führen wir die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - L \quad (3.51)$$

ein, so erhalten wir aus der Invarianz unter Zeittranslationen die Aussage

$$\frac{dH}{dt} = 0, \quad (3.52)$$

d.h.  $H$  ist eine Konstante der Bewegung. Im Falle eines abgeschlossenen konservativen Systems stimmt  $H$  gemäß (3.50) und (3.51) sogar mit der Gesamtenergie des Systems überein.

### 3.9 Zusammenfassung

Ist die Wirkung gemäß (3.15) unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation (3.9), (3.10) invariant, dann besagt das Noether-Theorem, dass es die Erhaltungsgröße (3.27) gibt. Sie hängt zum einen von der infinitesimalen Transformation (3.11), (3.12) und zum anderen sowohl von den kanonisch konjugierten Impulsen (3.4) als auch von der Hamilton-Funktion (3.51) ab:

$$\sum_{i=1}^f p_i \left. \frac{\partial q'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - H \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \text{konst.} \quad (3.53)$$

# Kapitel 4

## Hamiltonsche Mechanik

In der Lagrangeschen Mechanik werden die  $f$  generalisierten Koordinaten als unabhängige Variablen angesehen und deren Bewegungsgleichungen, die Euler-Lagrange-Gleichungen, stellen  $f$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Wir gehen nun zur Hamiltonschen Mechanik über, bei der sowohl die  $f$  generalisierten Koordinaten  $q_i$  als auch die  $f$  dazu kanonisch konjugierten Impulse  $p_i$  aus (3.4) als unabhängige Variablen angesehen werden. Die dazugehörigen Bewegungsgleichungen, die Hamilton-Gleichungen, stellen  $2f$  gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Für die praktische Lösung mechanischer Probleme bietet der Hamilton-Formalismus im Allgemeinen keine Vorteile gegenüber dem Lagrange-Formalismus. Die Hamiltonsche Mechanik ist aber von besonderem theoretischen Interesse, da sie der Ausgangspunkt für den Übergang zur Quantenmechanik darstellt und auch eine wichtige Grundlage der statistischen Mechanik darstellt.

### 4.1 Motivation

Wir betrachten zunächst ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich in einer Dimension unter dem Einfluß des Potentials  $V(x)$  bewegt. Die zugrunde liegende Bewegungsgleichung, die mit der Newton-Gleichung übereinstimmt, lautet

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Nun führen wir den Impuls des Teilchens

$$p = m\dot{x} \quad (4.2)$$

als unabhängige Variable ein und erhalten für die zeitliche Veränderung von  $x$  und  $p$

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad (4.3)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}. \quad (4.4)$$

Dies sind zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, die zur ursprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (4.1) äquivalent sind. In der Tat führt das Einsetzen von (4.3) in (4.4) offenbar wieder auf (4.1). Mit Hilfe der Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (4.5)$$

die als Summe von kinetischer und potentieller Energie gerade die Gesamtenergie des Systems darstellt, können wir (4.3), (4.4) auch schreiben als

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (4.6)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (4.7)$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass sich diese Form der Bewegungsgleichungen ganz allgemein aus den Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten lässt. Hierzu muss man die Lagrange-Funktion mit Hilfe einer Legendre-Transformation in die Hamilton-Funktion umwandeln.

## 4.2 Legendre-Transformation

Eine Funktion  $f = f(x)$  ordnet jedem  $x$ -Wert den Funktionswert  $f(x)$  zu und besitzt das totale Differential

$$df = f'(x)dx. \quad (4.8)$$

Die Funktion

$$p(x) = f'(x) \quad (4.9)$$

gibt dagegen zu jedem  $x$ -Wert die Steigung der Kurve  $f = f(x)$  an. Wir führen nun eine Legendre-Transformation zu einer Funktion  $g = g(p)$  mit der neuen Variablen (4.9) durch, die zur ursprünglichen Funktion  $f = f(x)$  äquivalent ist und damit die gleiche Information enthält. Hiefür ist erforderlich, dass sich  $g = g(p)$  eindeutig aus  $f = f(x)$  berechnen lässt und umgekehrt. Wir betrachten hierzu die Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  an die Kurve  $f = f(x)$ , siehe Abb. 4.1:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.10)$$

Der Achsenabschnitt der Tangente (4.10) führt dann auf

$$g(x_0) = T(0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 \quad (4.11)$$

und hängt natürlich vom betrachteten Punkt  $x_0$  ab. Wir bezeichnen die Funktion  $g(x)$  für eine beliebige Stelle  $x$  als die Legendre-Transformation von  $f(x)$  und erhalten mit Hilfe von (4.9):

$$g(x) = f(x) - p(x)x. \quad (4.12)$$

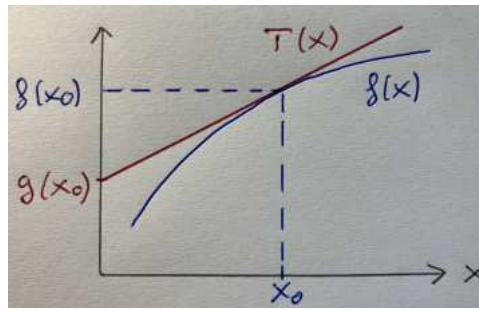


Abbildung 4.1: Eine Funktion lässt sich dadurch charakterisieren, dass einem Wert  $x_0$  der Funktionswert  $f(x_0)$  zugeordnet wird, oder dadurch, dass der Steigung  $p$  der Achsenabschnitt  $g(p)$  zugeordnet wird.

Wir zeigen nun, dass  $g$  nur von der Steigung  $p$  abhängt. Dazu bilden wir das totale Differential von (4.12). Dabei lässt sich

$$dg = df - xdp - p dx \quad (4.13)$$

aufgrund von (4.8) und (4.9) reduzieren auf

$$dg = -x dp. \quad (4.14)$$

Da eine Änderung von  $g$  nur durch eine Änderung von  $p$  hervorgerufen wird, muss es sich bei  $g$  um eine Funktion  $g(p)$  handeln. Um diese Funktion  $g = g(p)$  explizit angeben zu können, müssen wir in (4.12) die Variable  $x$  mit Hilfe von (4.9) eliminieren. Das geht aber nur dann, wenn sich (4.9) eindeutig nach  $x$  auflösen lässt, wenn also zu  $f'$  eine Umkehrfunktion  $f'^{-1}$  existiert. Dann kann man

$$x(p) = f'^{-1}(p) \quad (4.15)$$

in (4.12) einsetzen und erhält explizit

$$g(p) = f(f'^{-1}(p)) - p f'^{-1}(p). \quad (4.16)$$

Wir zeigen nun, dass die Legendre-Transformation involutorisch ist, dass also eine zweimalige Anwendung der Legendre-Transformation wieder auf die ursprüngliche Funktion führt. Die Steigung der Legendre-Transformierte  $g = g(p)$  lautet aufgrund von (4.14)

$$-x = g'(p), \quad (4.17)$$

so dass sich die Legendre-Transformation von  $g = g(p)$  analog zu (4.12) ergibt als

$$g - (-x)p = f. \quad (4.18)$$

Als Beispiel führen wir die Legendre-Transformation für die Funktion

$$f(x) = x^2 \quad (4.19)$$

durch. Der Zusammenhang zwischen alter und neuer Variable lautet dann aufgrund von (4.9) und (4.19)

$$p = 2x, \quad (4.20)$$

so dass aus (4.15) folgt

$$x = \frac{p}{2}. \quad (4.21)$$

Damit ergibt sich die Legendre-Transformierte (4.16) zu

$$g(p) = -\frac{p^2}{4}. \quad (4.22)$$

In einer späteren Vorlesung werden Sie sehen, dass die durch (4.9) und (4.16) definierte Legendre-Transformation auch in der Thermodynamik verwendet wird, um Umrechnungen zwischen den thermodynamischen Potentialen wie der inneren Energie  $U$ , der freien Energie  $F$ , der Enthalpie  $H$  und der freien Enthalpie  $G$  vorzunehmen.

### 4.3 Hamilton-Funktion

Wir betrachten nun eine Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  mit den generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ . Bei einer Legendre-Transformation bezüglich der generalisierten Geschwindigkeiten definiert man die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion  $L$  nach  $\dot{q}_i$  als neue Variablen

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}; \quad i = 1, \dots, f. \quad (4.23)$$

Man bezeichnet  $p_i$  als den zur generalisierten Koordinate  $q_i$  kanonisch konjugierten generalisierten Impuls. Wir nehmen an, dass sich die Beziehung (4.23) zwischen den generalisierten Geschwindigkeiten und den Impulsen invertieren lässt

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t); \quad i = 1, \dots, f \quad (4.24)$$

mit  $p = p(p_1, \dots, p_f)$ . Die Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  ist dann nicht durch (4.16) sondern durch deren Negativen definiert und führt auf die Hamilton-Funktion

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(q, p, t) p_i - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (4.25)$$

Entscheidend ist dabei, dass die Hamilton-Funktion (4.25) aufgrund von (4.24) von den generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und den dazu kanonisch konjugierten Impulsen  $p = (p_1, \dots, p_f)$  und nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$  abhängt.

## 4.4 Hamilton-Gleichungen

Wir berechnen nun die partielle Ableitungen der Hamilton-Funktion (4.25) unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.28):

- Die partielle Ableitung nach einer generalisierten Koordinate  $q_i$  führt zunächst auf

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^f \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} p_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}. \quad (4.26)$$

Dies reduziert sich dann mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.28) und (4.23) schließlich auf

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i; \quad i = 1, \dots, f. \quad (4.27)$$

- Entsprechend ergibt die partielle Ableitung nach einem kanonisch konjugierten Impuls  $p_i$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_{j=1}^f \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \left( p_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad (4.28)$$

was sich aufgrund von (4.23) vereinfachen lässt zu

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i; \quad i = 1, \dots, f. \quad (4.29)$$

- Und dann ist noch die partielle Ableitung nach der Zeit  $t$  auszuwerten:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} p_i - \frac{\partial L}{\partial t} - \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t}, \quad (4.30)$$

so dass sich wegen (4.23) am Ende das folgende Resultat ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.31)$$

Die Gleichungen (4.27), (4.29) sind die sogenannten Hamilton-Gleichungen. Es handelt sich dabei um  $2f$  gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, die die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.28) als  $f$  gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung ersetzen. Daher sind die Euler-Lagrange- und die Hamilton-Gleichungen alternative Formulierungen der Bewegungsgleichungen mechanischer Systeme.

## 4.5 Mathematisches Pendel

Als eindimensionales Beispiel betrachten wir erneut das mathematische Pendel, siehe Abb. 2.8. Die kinetische Energie lautet

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4.32)$$

und die potentielle Energie ergibt sich zu

$$V = -mgl \cos \varphi, \quad (4.33)$$

wenn man das Nullniveau in den Aufhängepunkt verlegt. Aufgrund von (4.32) und (4.33) ist die Lagrange-Funktion (1.66) dieses Systems gegeben durch

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (4.34)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls (4.23) lautet in diesem Fall

$$p = ml^2 \dot{\varphi}. \quad (4.35)$$

Die Invertierung von (4.35) führt dann auf

$$\dot{\varphi} = \frac{p}{ml^2}. \quad (4.36)$$

Damit nimmt die Hamilton-Funktion (4.25) mit Hilfe von (4.34), (4.35) schließlich die folgende Form an

$$H(\varphi, p) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \varphi. \quad (4.37)$$

Sie stellt unter Berücksichtigung von (4.36) gerade die Summe von kinetischer Energie (4.32) und potentieller Energie (4.33) dar. Spezialisieren wir damit die Hamilton-Gleichungen (4.27) und (4.29), so erhalten wir

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2}, \quad (4.38)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi. \quad (4.39)$$

Dabei stimmt (4.38) mit (4.36) überein. Und setzen wir (4.38) in (4.39) ein, so erhalten wir die bekannte Pendelgleichung (1.25).

## 4.6 Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld in SI-Einheiten ist durch (1.127) gegeben. Der entsprechende generalisierte Impuls (4.23) folgt hieraus zu

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (4.40)$$

Er unterscheidet sich vom kinetischen Impuls  $m\dot{\mathbf{r}}$  durch einen zusätzlichen Anteil, der vom elektromagnetischen Feld herrührt. Die Beziehung (4.40) zwischen generalisiertem Impuls  $\mathbf{p}$  und generalisierter Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{r}}$  lässt sich unmittelbar invertieren:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{Q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (4.41)$$

Die Legendre-Transformation (4.25) der Lagrange-Funktion (1.127) führt demnach auf die Hamilton-Funktion

$$H = \mathbf{p} \left[ \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{Q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] - \frac{m}{2} \left[ \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{Q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + Q\Phi(\mathbf{r}, t) - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{Q}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right], \quad (4.42)$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \mathbf{p} - Q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 + Q\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (4.43)$$

Hieraus ergeben sich die entsprechenden Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29):

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left[ p_i - QA_i(\mathbf{r}, t) \right], \quad (4.44)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -Q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} + \frac{Q}{m} \sum_{j=1}^3 \left[ p_j - QA_j(\mathbf{r}, t) \right] \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (4.45)$$

Damit ist (4.44) mit (4.41) identisch. Eliminiert man den Impuls in (4.45) mit Hilfe von (4.41), so ergeben sich die Newton-Gleichungen

$$m\ddot{r}_i = -Q \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - Q \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + Q \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{\partial A_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} \right] \dot{r}_j. \quad (4.46)$$

Unter Berücksichtigung der Umrechnung (1.125) zwischen den Potentialen  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  sowie den Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  folgt aus (4.46), dass auf das geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld gerade die Lorentz-Kraft (1.124) wirkt.

## 4.7 Hamilton-Prinzip

Wir zeigen nun, dass sich die Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29) auch aus dem Hamiltonschen Prinzip ableiten lassen. Hierzu lösen wir die Legendre-Transformation (4.25) nach der Lagrange-Funktion  $L$  auf, so dass die Wirkung (2.20) übergeht in

$$\mathcal{A}[q(t), p(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(t) p_i(t) - H(q(t), p(t)) \right\} dt. \quad (4.47)$$

Demnach wird die Wirkung nun als Funktional aller generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und Impulse  $p = (p_1, \dots, p_f)$  angesehen. Nach dem Hamiltonschen Prinzip ergeben sich die Bewegungsgleichungen durch Extremalisierung der Wirkung (4.47). In der Hamiltonschen Mechanik sind dabei die generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und Impulse  $p = (p_1, \dots, p_f)$  als unabhängig voneinander zu variieren. Dies führt auf die folgende Variation der Wirkung

$$\delta \mathcal{A}[q(t), p(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ p_i(t) \delta \dot{q}_i(t) + \dot{q}_i(t) \delta p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i(t) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i(t) \right\} dt. \quad (4.48)$$

Da die Operationen Zeitableitung und Variation gemäß (2.24) miteinander vertauschen, kann man im ersten Term von (4.48) eine partielle Integration vornehmen und erhält

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}[q(t), p(t)] &= \sum_{i=1}^f \left\{ p_i(t_2)\delta q_i(t_2) - p_i(t_1)\delta q_i(t_1) \right\} \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \left[ \dot{q}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i(t) + \left[ -\dot{p}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i(t) \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Wie in der Variationsrechnung üblich, verlangen wir gemäß (2.21), dass die Variation der generalisierten Koordinaten am Anfangs- und Endpunkt verschwinden, so dass die Randterme in der ersten Zeile von (4.49) entfallen. Demgegenüber wird an den Variationen der generalisierten Impulse am Anfangs- und Endpunkt keine Anforderung gestellt, d.h.  $\delta p_i(t_1)$ ,  $\delta p_i(t_2)$  sind beliebig für  $i = 1, \dots, f$ . Damit reduziert sich (4.49) auf

$$\delta\mathcal{A}[q(t), p(t)] \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^f \left\{ \left[ \dot{q}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] \delta p_i(t) + \left[ -\dot{p}_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \delta q_i(t) \right\} dt. \quad (4.50)$$

Da die Variationen der generalisierten Koordinaten  $\delta q_i(t)$  und Impulse  $\delta p_i(t)$  vollkommen beliebig sind, folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip, dass die Variation der Wirkung (4.50) verschwindet und wir erhalten die Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29).

## 4.8 Erhaltungsgrößen und Poisson-Klammern

Wir werden nun untersuchen, welche formalen Eigenschaften Erhaltungsgrößen in der Hamiltonschen Mechanik besitzen.

### 4.8.1 Zyklische Koordinaten

Im Rahmen der Lagrangeschen Mechanik hatten wir gesehen, dass die Existenz einer zyklischen Koordinate  $q_i$  zur Folge hat, dass der dazugehörige kanonisch konjugierte Impuls  $p_i$  eine Konstante der Bewegung ist. Genauso können wir aus den Hamilton-Gleichungen (4.27) schließen, dass  $p_i$  eine Konstante der Bewegung ist, wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von  $q_i$  abhängt. Es ist leicht einzusehen, dass  $H$  nicht von  $q_i$  abhängt, wenn auch  $L$  nicht von  $q_i$  abhängt. Dazu bemerken wir, dass die Hamilton-Funktion aufgrund der Legendre-Transformation (4.25) nur dann von einer in  $L$  zyklischen Koordinate  $q_i$  abhängen kann, wenn die generalisierte Geschwindigkeit (4.24) explizit von  $q_i$  abhängt. Den Zusammenhang (4.24) erhält man aber durch Invertierung der Relation (4.23). Wenn  $L$  aber eine generalisierte Koordinate  $q_i$  nicht enthält, dann kann auch (4.23) und damit auch (4.24) diese Koordinate  $q_i$  nicht enthalten.

### 4.8.2 Definition der Poisson-Klammer

Wir betrachten nun eine Observable  $O$ , die eine beliebige Funktion  $O(q, p, t)$  der generalisierten Koordinaten  $q = (q_1, \dots, q_f)$  und der dazu kanonisch konjugierten Impulse  $p = (p_1, \dots, p_f)$  ist. Im Folgenden untersuchen wir, wann diese eine Konstante der Bewegung ist. Entlang einer Bahn ändert sie sich zeitlich gemäß der Kettenregel wie folgt

$$\frac{d}{dt} O(q(t), p(t), t) = \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial O}{\partial q_i(t)} \dot{q}_i(t) + \frac{\partial O}{\partial p_i(t)} \dot{p}_i(t) \right\} + \frac{\partial O}{\partial t}. \quad (4.51)$$

Wenn diese Bahn eine Lösung der Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29) darstellt, reduziert sich (4.51) auf

$$\frac{dO}{dt} = \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial O}{\partial q_i(t)} \frac{\partial H}{\partial p_i(t)} - \frac{\partial O}{\partial p_i(t)} \frac{\partial H}{\partial q_i(t)} \right\} + \frac{\partial O}{\partial t}. \quad (4.52)$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, als neues Symbol die Poisson-Klammer zwischen zwei Funktionen  $A(q, p, t)$  und  $B(q, p, t)$  einzuführen:

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right). \quad (4.53)$$

Damit nimmt (4.53) die folgende Form an:

$$\frac{dO}{dt} = \{O, H\}_{q,p} + \frac{\partial O}{\partial t}. \quad (4.54)$$

### 4.8.3 Eigenschaften der Poisson-Klammer

Die Poisson-Klammer (4.53) erfüllt einige allgemeine Relationen, die das Rechnen mit ihnen erleichtert. Zunächst stellen wir die Antisymmetrie fest:

$$\{A, B\}_{q,p} = -\{B, A\}_{q,p}. \quad (4.55)$$

Ferner ist die Poisson-Klammer (4.53) in beiden Argumenten linear:

$$\{A_1 + A_2, B\}_{q,p} = \{A_1, B\}_{q,p} + \{A_2, B\}_{q,p}, \quad (4.56)$$

$$\{A, B_1 + B_2\}_{q,p} = \{A, B_1\}_{q,p} + \{A, B_2\}_{q,p}. \quad (4.57)$$

Aufgrund der Produktregel der Differentiation gilt ferner:

$$\{A_1 A_2, B\}_{q,p} = \{A_1, B\}_{q,p} A_2 + A_1 \{A_2, B\}_{q,p}, \quad (4.58)$$

$$\{A, B_1 B_2\}_{q,p} = \{A, B_1\}_{q,p} B_2 + B_1 \{A, B_2\}_{q,p}. \quad (4.59)$$

Außerdem genügt die Poisson-Klammer der sogenannten Jacobi-Identität:

$$\left\{ A, \left\{ B, C \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ B, \left\{ C, A \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} + \left\{ C, \left\{ A, B \right\}_{q,p} \right\}_{q,p} = 0, \quad (4.60)$$

wie man durch Verwendung von (4.53) explizit nachrechnen kann.

In der Hamiltonschen Mechanik werden die generalisierten Koordinaten  $q_i$  und die dazu kanonisch konjugierten Impulse  $p_i$  als unabhängige Variablen aufgefaßt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij}. \quad (4.61)$$

Deshalb ergeben sich aus (4.53) und (4.61) die fundamentalen Poisson-Klammern:

$$\left\{ q_i, q_j \right\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0, \quad (4.62)$$

$$\left\{ q_i, p_j \right\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij}, \quad (4.63)$$

$$\left\{ p_i, p_j \right\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (4.64)$$

#### 4.8.4 Hamilton-Gleichungen

Wir kommen nun wieder auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen (4.54) zurück. Spezialisiert man sie auf  $O_1(q, p, t) = q$  bzw.  $O_2(q, p, t) = p$ , so folgen aus (4.53), (4.54) und (4.61) die Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29):

$$\frac{dq_i}{dt} = \left\{ q_i, H \right\}_{q,p} = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial q_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (4.65)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \left\{ p_i, H \right\}_{q,p} = \sum_{j=1}^f \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.66)$$

#### 4.8.5 Erhaltungsgrößen

Verschwindet die Poisson-Klammer zwischen zwei Größen  $A$  und  $B$ , gilt also

$$\left\{ A, B \right\}_{q,p} = 0, \quad (4.67)$$

so sagt man, dass diese beiden Größen miteinander vertauschbar sind. Diese Begriffsbildung ist für Erhaltungsgrößen nützlich. Es sei  $O(q, p)$  eine Observable, die nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt

$$\frac{\partial O}{\partial t} = 0 \quad (4.68)$$

und die mit der Hamilton-Funktion  $H$  vertauscht:

$$\left\{ O, H \right\}_{q,p} = 0. \quad (4.69)$$

Dann folgt offenbar aus (4.54), dass es sich um eine Erhaltungsgröße handelt. Insbesondere kommt es häufig vor, dass die Hamilton-Funktion selbst zeitunabhängig ist:

$$H = H(q, p). \quad (4.70)$$

Da die Hamilton-Funktion aufgrund der Antisymmetrie (4.55) mit sich selbst vertauscht, ist dann die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße entlang der klassischen Bahn.

Abschließend beweisen wir noch den Poissonschen Satz, wonach die Poisson-Klammer zweier Integrale der Bewegung selbst wieder ein Integral der Bewegung ist. Es seien  $A$  und  $B$  zwei Integrale der Bewegung, d.h. es gelte

$$\left\{ A, H \right\}_{q,p} = \left\{ B, H \right\}_{q,p} = 0 \quad (4.71)$$

und ferner

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (4.72)$$

Dann ist auch die Poisson-Klammer von  $A$  und  $B$  zeitunabhängig

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ A, B \right\}_{q,p} = 0 \quad (4.73)$$

und aus der Jacobi-Identität (4.60) folgt

$$\left\{ \left\{ A, B \right\}_{q,p}, H \right\}_{q,p} = 0. \quad (4.74)$$

Damit ist auch die Poisson-Klammer  $\left\{ A, B \right\}_{q,p}$  ein Integral der Bewegung.

### 4.8.6 Phasenraum

In der Hamiltonschen Mechanik werden die generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  und die dazu kanonisch konjugierten Impulse  $p_1, \dots, p_f$  als unabhängige Variablen aufgefaßt. Faßt man diese  $2f$  unabhängigen Variablen zusammen, so entsteht ein  $2f$ -dimensionaler Phasenraum  $\Gamma$ . Der Zustand eines mechanischen Systems zur Zeit  $t$  wird dann durch den Punkt  $(q_1(t), \dots, q_f(t), p_1(t), \dots, p_f(t))$  im Phasenraum  $\Gamma$  charakterisiert, siehe Abb. 4.2a).

Wir betrachten als erstes Beispiel den eindimensionalen harmonischen Oszillator, dessen Lagrange-Funktion durch

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \quad (4.75)$$

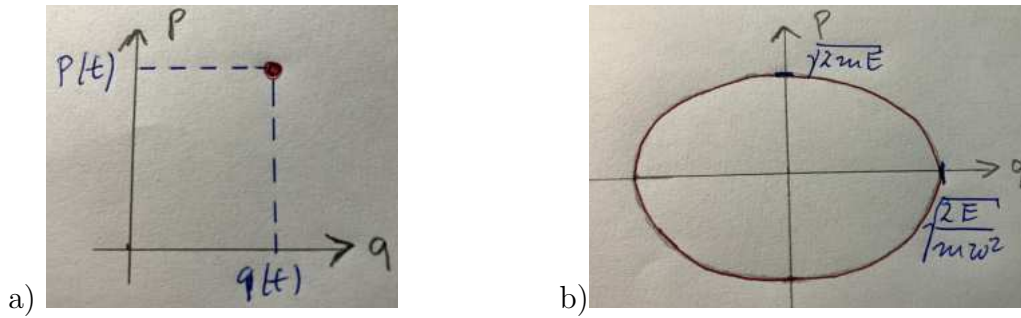


Abbildung 4.2: a) Der Zustand eines mechanischen Systems zur Zeit  $t$  wird durch einen Punkt  $(q(t), p(t))$  im Phasenraum  $\Gamma$  charakterisiert. b) Die Trajektorie eines harmonischen Oszillators durchläuft im Laufe der Zeit eine Ellipse mit den Halbachsen (4.79).

gegeben ist. Der entsprechende kanonisch konjugierte Impuls (4.23) lautet dann

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{q} = \frac{p}{m}. \quad (4.76)$$

Durch die Legendre-Transformation (4.25) erhalten wir dann die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 q^2. \quad (4.77)$$

Da sie nicht explizit von der Zeit abhängt, stellt sie eine Erhaltungsgröße in Form der Energie  $E$  dar. Für die Trajektorie im Phasenraum  $\Gamma$  bedeutet dies, dass sie eine Ellipse

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\omega^2} \quad (4.78)$$

mit den Halbachsen

$$a_p = \sqrt{2mE}, \quad a_q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (4.79)$$

darstellt, siehe Abb. 4.2b). Je größer die Energie  $E$  ist, um so größer sind die Halbachsen.

Als zweites Beispiel betrachten wir erneut das Pendel mit der Hamilton-Funktion (4.37). Auch hier hängt sie nicht explizit von der Zeit ab, so dass sie die Erhaltungsgröße Energie  $E$  darstellt. Dann lässt sich aus (4.37) der generalisierte Impuls berechnen, der dem Drehimpuls des Pendels entspricht:

$$p = \sqrt{2ml^2 (E + mgl \cos \varphi)}. \quad (4.80)$$

Damit dieser generalisierte Impuls reell ist, muss der Radikant positiv sein

$$\cos \varphi \geq -\frac{E}{mgl}. \quad (4.81)$$

Es gibt demnach zwei Fälle:

- $E < mgl$ : Es handelt sich um eine Libration, da eine Auslenkung nur im begrenzten Winkelbereich  $[-\varphi_0, +\varphi_0]$  mit  $\varphi_0 = \arccos(-E/mgl)$  möglich ist.
- $E > mgl$ : Hier liegt eine Rotation vor, da alle Winkel  $\varphi$  möglich sind und das Pendel sich überschlägt.

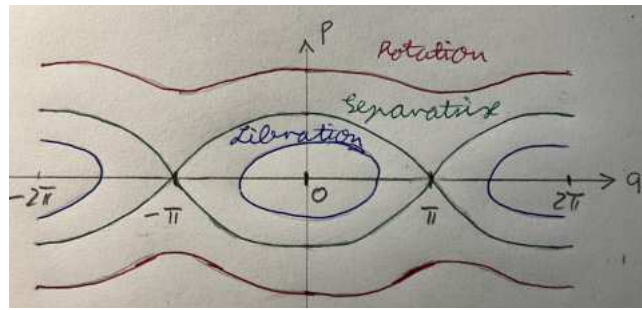


Abbildung 4.3: Die Trajektorie des Pendels im Phasenraum  $\Gamma$  stellt abhängig von der vorgegebenen Energie eine Libration oder eine Rotation dar, die durch eine Separatrix getrennt sind.

Diese beiden Fälle lassen sich im Phasenraum  $\Gamma$  unterscheiden. Dabei werden Libration und Rotation durch eine Separatrix getrennt, siehe Abb. 4.3.

## 4.9 Liouvillscher Satz

Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Fall zurück und betrachten ein hochdimensionales mechanisches System, wie beispielsweise ein ideales Gas, bestehend aus  $10^{23}$  Teilchen, das in einem Volumen eingeschlossen ist. Obwohl in der klassischen Mechanik die genaue Bewegung des Systems vollständig durch die Anfangsbedingungen bestimmt ist, ist es für solch komplizierte Systeme unmöglich, die Lösungen der Bewegungsgleichungen zu berechnen. Hinzu kommt, dass die Anfangsbedingungen oft nur unvollständig bekannt sind. Wir können zwar festlegen, dass zur Anfangszeit  $t_0$  eine gegebene Masse eines Gases eine bestimmte Energie hat, aber wir können nicht die Anfangskoordinaten und -geschwindigkeiten jedes Moleküls bestimmen. Die statistische Mechanik, die sich mit solchen Systemen beschäftigt, die sehr viele Teilchen enthalten, versucht daher nicht, eine vollständige Lösung zu gewinnen. Ihr Ziel besteht vielmehr darin, Voraussagen über mittlere Eigenschaften zu machen, indem die Bewegung einer großen Zahl identischer Systeme untersucht wird. Wir betrachten demnach ein Ensemble von vielen mechanischen Systemen mit derselben Hamilton-Funktion  $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ , die sich nur durch ihre Anfangsbedingungen voneinander unterscheiden. Da jedes System durch einen einzelnen Punkt im Phasenraum  $\Gamma$  dargestellt wird, entspricht dem Ensemble von Systemen ein Punktschwarm im Phasenraum  $\Gamma$ . Zur Anfangszeit  $t_0$  führen wir deshalb eine Punktschwarmdichte  $\rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0)$  ein, wobei  $\rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0$  die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass im Ensemble die Anfangsbedingung  $(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)$  vorliegt. Da mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendeine Anfangsbedingung realisiert ist, lautet die Normierung der Punktschwarmdichte

$$\int_{\Gamma} \rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0 = 1. \quad (4.82)$$

Die Punktschwarmdichte  $\rho$  entwickelt sich mit der Zeit von  $\rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0)$  zu  $\rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t)$  und es stellt sich die Frage, welcher Bewegungsgleichung die Punktschwarmdichte  $\rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t)$  genügt. Hierzu betrachten wir ein beliebiges Gebiet  $M^0$  im Phasenraum  $\Gamma$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass im Ensemble Anfangsbedingungen in  $M^0$  vorliegen, ist gegeben durch

$$W(M^0) = \int_{M^0} \rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0. \quad (4.83)$$

Die Trajektorien jedes einzelnen Systems genügen den Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29) mit den Anfangsbedingungen

$$q_i^t \Big|_{t=t_0} = q_i^0, \quad p_i^t \Big|_{t=t_0} = p_i^0; \quad i = 1, \dots, f. \quad (4.84)$$

Durch die zeitliche Entwicklung haben die einzelnen Punkte  $(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)$  in  $M^0$  neue Stellen  $(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)$  im Phasenraum  $\Gamma$  erreicht. Insgesamt gesehen wird dadurch  $M^0$  zur Zeit  $t_0$  in eine neue Untermenge  $M^t$  zur Zeit  $t$  übergeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Ensemble zur Zeit  $t$  der Punktschwarm in  $M^t$  liegt, lautet

$$W(M^t) = \int_{M^t} \rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t) dq_1^t \dots dq_f^t dp_1^t \dots dp_f^t. \quad (4.85)$$

Der Liouvillsche Satz besagt nun, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten (4.83) und (4.85) gleich sind, da keine Schwarpunkte im Phasenraum  $\Gamma$  erzeugt oder vernichtet werden können:

$$\begin{aligned} & \int_{M^0} \rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0 \\ &= \int_{M^t} \rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t) dq_1^t \dots dq_f^t dp_1^t \dots dp_f^t. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Um hieraus eine Differentialgleichung für die Punktschwarmdichte  $\rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t)$  gewinnen zu können, muss man auf der rechten Seite von (4.86) eine Koordinatentransformation durchführen und die neuen Koordinaten  $(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)$  in die alten Koordinaten  $(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)$  umrechnen:

$$\begin{aligned} & \int_{M^0} \rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0 \\ &= \int_{M^0} \rho \left( q_1^t(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t), \dots, q_f^t(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t), \right. \\ & \quad \left. p_1^t(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t), \dots, p_f^t(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t), t \right) \\ & \quad \times \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Dabei transformiert sich ein infinitesimales Volumenelement im Phasenraum mit der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1^t}{\partial q_1^0} & \dots & \frac{\partial q_f^t}{\partial q_1^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial q_1^0} & \dots & \frac{\partial p_f^t}{\partial q_1^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial q_f^0} & \dots & \frac{\partial q_f^t}{\partial q_f^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial q_f^0} & \dots & \frac{\partial p_f^t}{\partial q_f^0} \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial p_1^0} & \dots & \frac{\partial q_f^t}{\partial p_1^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial p_1^0} & \dots & \frac{\partial p_f^t}{\partial p_1^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1^t}{\partial p_f^0} & \dots & \frac{\partial q_f^t}{\partial p_f^0} & \frac{\partial p_1^t}{\partial p_f^0} & \dots & \frac{\partial p_f^t}{\partial p_f^0} \end{vmatrix}. \quad (4.88)$$

Führt man zwei Koordinatentransformationen hintereinander aus

$$q_i^{t_1} = q_i^{t_1}(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0), \quad p_i^{t_1} = p_i^{t_1}(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0); \quad i = 1, \dots, f, \quad (4.89)$$

$$q_i^{t_2} = q_i^{t_2}(q_1^{t_1}, \dots, q_f^{t_1}, p_1^{t_1}, \dots, p_f^{t_1}, t_1), \quad p_i^{t_2} = p_i^{t_2}(q_1^{t_1}, \dots, q_f^{t_1}, p_1^{t_1}, \dots, p_f^{t_1}, t_1); \quad i = 1, \dots, f, \quad (4.90)$$

so gilt mit Hilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial(q_1^{t_2}, \dots, q_f^{t_2}, p_1^{t_2}, \dots, p_f^{t_2})}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} = \frac{\partial(q_1^{t_2}, \dots, q_f^{t_2}, p_1^{t_2}, \dots, p_f^{t_2})}{\partial(q_1^{t_1}, \dots, q_f^{t_1}, p_1^{t_1}, \dots, p_f^{t_1})} \frac{\partial(q_1^{t_1}, \dots, q_f^{t_1}, p_1^{t_1}, \dots, p_f^{t_1})}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)}. \quad (4.91)$$

Setzen wir  $t_2 = t_1 + \epsilon$ , so ergibt die Taylor-Entwicklung von (4.90) im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$q_i^{t_1+\epsilon} = q_i^{t_1} + \dot{q}_i^{t_1} \epsilon + \dots, \quad p_i^{t_1+\epsilon} = p_i^{t_1} + \dot{p}_i^{t_1} \epsilon + \dots; \quad i = 1, \dots, f \quad (4.92)$$

und die erste Jacobi-Determinante auf der rechten Seite von (4.91) lautet

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(q_1^{t_1+\epsilon}, \dots, q_f^{t_1+\epsilon}, p_1^{t_1+\epsilon}, \dots, p_f^{t_1+\epsilon})}{\partial(q_1^{t_1}, \dots, q_f^{t_1}, p_1^{t_1}, \dots, p_f^{t_1})} \\ &= \begin{vmatrix} 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{q}_1^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{q}_f^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_1^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_f^{t_1}}{\partial q_1^{t_1}} + \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon \frac{\partial \dot{q}_1^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}} + \dots & \dots & 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{q}_f^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_1^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_f^{t_1}}{\partial q_f^{t_1}} + \dots \\ \epsilon \frac{\partial \dot{q}_1^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{q}_f^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}} + \dots & 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{p}_1^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}} + \dots & \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_f^{t_1}}{\partial p_1^{t_1}} + \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon \frac{\partial \dot{q}_1^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{q}_f^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}} + \dots & \dots & \epsilon \frac{\partial \dot{p}_1^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}} + \dots & \dots & 1 + \epsilon \frac{\partial \dot{p}_f^{t_1}}{\partial p_f^{t_1}} + \dots \end{vmatrix} \\ &= 1 + \epsilon \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial \dot{q}_i^{t_1}}{\partial q_i^{t_1}} + \frac{\partial \dot{p}_i^{t_1}}{\partial p_i^{t_1}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.93)$$

Damit kann die Zeitableitung der Jacobi-Determinante (4.88) als Differenzenquotient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{\partial(q_1^{t+\epsilon}, \dots, q_f^{t+\epsilon}, p_1^{t+\epsilon}, \dots, p_f^{t+\epsilon})}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} - \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} \right] \end{aligned} \quad (4.94)$$

unter Berücksichtigung von (4.91) und (4.93) berechnet werden

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial q_i^{t_1}}{\partial q_i^t} + \frac{\partial p_i^{t_1}}{\partial p_i^t} \right) \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)}. \quad (4.95)$$

Mit Hilfe der Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29) folgt dann schließlich

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} = 0, \quad (4.96)$$

da wir annehmen wollen, dass die Hamilton-Funktion dem Satz von Schwarz genügt, also gemischte zweite partielle Ableitungen vertauschen:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i^{t_1} \partial p_i^{t_1}} = \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^{t_1} \partial q_i^{t_1}}. \quad (4.97)$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung

$$\left. \frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} \right|_{t=t_0} = 1 \quad (4.98)$$

führt die Integration von (4.96) auf

$$\frac{\partial(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t)}{\partial(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0)} = 1. \quad (4.99)$$

Einsetzen von (4.99) in (4.87) ergibt

$$\int_{M^0} \left\{ \rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) - \rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t) \right\} dq_1^0 \dots dq_f^0 dp_1^0 \dots dp_f^0 = 0 \quad (4.100)$$

für alle Gebiete  $M^0$ , so dass die Punktschwarmdichte an einer mit dem Hamilton-Strom mit-schwimmenden Stelle zeitlich konstant bleibt:

$$\rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) = \rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t). \quad (4.101)$$

Setzen wir beispielsweise

$$\rho(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t_0) = \begin{cases} \rho_0; & (q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0) \in M^0 \\ 0; & (q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0) \notin M^0, \end{cases} \quad (4.102)$$

so lesen wir aus (4.101) ab

$$\rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t) = \begin{cases} \rho_0; & (q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t) \in M^t \\ 0; & (q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t) \notin M^t. \end{cases} \quad (4.103)$$

Dann besagt (4.100), dass das Volumen des Gebietes  $M^0$  mit dem des Gebietes  $M^t$  übereinstimmt:

$$V(M^0) = V(M^t). \quad (4.104)$$

Hieraus ergibt sich die Aussage des Liouvillschen Satzes, wonach das Volumen eines beliebigen Gebietes im Phasenraum erhalten bleibt, wenn sich die Punkte seiner Begrenzung entsprechend durch den Hamilton-Gleichungen bewegen. Der Fluß im Phasenraum entspricht also demnach dem einer inkompressiblen Flüssigkeit. Differenzieren wir (4.101) nach der Zeit  $t$ , so folgt

$$\frac{d}{dt} \rho(q_1^t, \dots, q_f^t, p_1^t, \dots, p_f^t, t) = 0. \quad (4.105)$$

Demnach ergibt sich aus (4.54) und (4.105) die Liouville-Gleichung für die Punktschwarmdichte im Phasenraum:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left\{ \rho, H \right\}_{q,p}. \quad (4.106)$$



# Kapitel 5

## Kanonische Transformationen

In diesem Kapitel untersuchen wir die grundlegende Eigenschaft des Hamilton-Formalismus, inwieweit sich die generalisierten Koordinaten und Impulse so transformieren lassen, dass sich die Struktur der Hamilton-Gleichungen nicht ändert. Wir werden sehen, dass sich solche kanonischen Transformationen aus einer einzigen skalaren Funktion ergeben, die deshalb auch als Erzeugende bezeichnet wird.

### 5.1 Transformation von Koordinaten und Impulsen

Zunächst erinnern wir daran, dass bei der Formulierung der Newtonschen Mechanik die kartesischen Koordinaten ausgezeichnet sind. Demgegenüber gelang die Formulierung der Lagrangeschen Mechanik in beliebigen generalisierten Koordinaten. Deshalb konnten wir in Abschnitt 1.5 zeigen, dass man in der Lagrangeschen Mechanik von den ursprünglichen generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  durch eine Punkttransformation im Konfigurationsraum

$$q_i = q_i(Q, t); \quad i = 1, \dots, f \quad (5.1)$$

zu neuen generalisierten Koordinaten  $Q_1, \dots, Q_f$  mit  $i = 1, \dots, f$  übergehen kann, ohne dass sich die Form der Euler-Lagrange-Gleichungen ändert:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0; \quad i = 1, \dots, f \quad (5.2)$$

↓ Punkttransformation (5.1)

$$\frac{\partial L'}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_i} = 0; \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.3)$$

Hierzu muss man lediglich die Transformation der generalisierten Koordinaten und die daraus folgende Transformation der generalisierten Geschwindigkeiten in die ursprüngliche Lagrange-

Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  einsetzen, um die neue Lagrange-Funktion  $L'(Q, \dot{Q}, t)$  gemäß

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L\left(q(Q, t), \sum_{l=1}^f \frac{\partial q(Q, t)}{\partial Q_l} \dot{Q}_l + \frac{\partial q(Q, t)}{\partial t}, t\right). \quad (5.4)$$

zu erhalten. Durch Verwendung einer geeigneten Punkttransformation (5.1) kann man hoffen, ein gegebenes mechanisches Problem zu vereinfachen und gegebenenfalls zu lösen.

Nun untersuchen wir in der Hamiltonschen Mechanik Transformationen der  $2f$  unabhängigen Variablen, d.h. wir betrachten Transformationen der generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und der dazu kanonisch konjugierten Impulse  $p_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  in neue Koordinaten  $Q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und Impulse  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  im Phasenraum:

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t); \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.5)$$

Bei diesem Ansatz handelt es sich um eine größere Klasse von Transformationen als die in Abschnitt 1.5 untersuchten Punkttransformationen (5.1). Eine solche Transformation (5.5) heißt kanonisch, wenn sie die Form der Hamilton-Gleichungen erhält. Dies bedeutet, dass die von der ursprünglichen Hamilton-Funktion  $H(q, p, t)$  abgeleiteten Hamilton-Gleichungen durch den Ansatz (5.5) so transformiert werden, dass es eine neue Hamilton-Funktion  $H'(Q, P, t)$  gibt, die auf die neuen Hamilton-Gleichungen führen:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f \quad (5.6)$$

↓ Kanonische Transformation (5.5)

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}; \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.7)$$

Dabei stellt sich die Frage, wie im Falle einer solchen kanonischen Transformation (5.5) die neue Hamilton-Funktion  $H'(Q, P, t)$  aus der alten Hamilton-Funktion  $H(q, p, t)$  hervorgeht. Zur Beantwortung dieser Frage erinnern wir daran, dass sich die ursprünglichen Hamilton-Gleichungen (5.6) gemäß Abschnitt 4.7 aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(t) p_i(t) - H(q(t), p(t), t) \right\} dt = 0 \quad (5.8)$$

ableiten lassen. Ganz entsprechend ergeben sich die neuen Hamilton-Gleichungen (5.7) aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i(t) P_i(t) - H'(Q(t), P(t), t) \right\} dt = 0. \quad (5.9)$$

Aus der Identität von (5.8) und (5.9) folgt jedoch nicht notwendiger Weise, dass die beiden Integranden gleich sein müssen. Es ist aber hinreichend, dass sie sich um die totale Ableitung

	$Q$	$P$
$q$	$F_1(q, Q, t)$	$F_2(q, P, t)$
$p$	$F_3(p, Q, t)$	$F_4(p, P, t)$

Abbildung 5.1: Übersicht über die vier generischen Erzeugenden kanonischer Transformationen.

einer beliebigen Funktion  $F = F(q, p, Q, P, t)$  nach der Zeit unterscheiden:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^f \dot{q}_i(t)p_i(t) - H(q(t), p(t)) - \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i(t)P_i(t) + H'(Q(t), P(t)) \\ = \frac{d}{dt} F(q(t), p(t), Q(t), P(t), t) . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Beim Hamiltonschen Prinzip führt nämlich ein solcher Zusatzterm zu Variationen am Anfangs- und Endpunkt  $t_1$  und  $t_2$ , die nach den Regeln der Variationsrechnung verschwinden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q(t), p(t), Q(t), P(t), t) dt = \delta \left[ F(q(t), p(t), Q(t), P(t), t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0 . \quad (5.11)$$

Wie wir gleich sehen werden, bestimmt die Funktion  $F$  die Transformationsgleichungen (5.5). Man bezeichnet sie deshalb als die Erzeugende oder die erzeugende Funktion der kanonischen Transformation.

Bei einer kanonischen Transformation kann man von den insgesamt  $4f$  Variablen lediglich  $2f$  als unabhängig ansehen. Deshalb kann man davon ausgehen, dass die Erzeugende eine Funktion dieser  $2f$  unabhängigen Variablen ist. In der Regel wählt man diese  $2f$  unabhängigen Variablen so aus, dass  $f$  Variablen den alten Koordinaten bzw. Impulsen und  $f$  weitere Variablen den neuen Koordinaten bzw. Impulsen entsprechen. Aus historischer Sicht sind dabei die folgenden vier Fälle von Erzeugenden bedeutsam, siehe Abb. 5.1:

$$F_1 = F_1(q, Q, t), \quad F_2 = F_2(q, P, t), \quad F_3 = F_3(p, Q, t), \quad F_4 = F_4(p, P, t) . \quad (5.12)$$

Wir untersuchen zuerst den Fall der Erzeugenden  $F_1$  und zeigen dann, wie sich daraus die anderen Fälle ergeben.

## 5.2 Erste Erzeugende

Wir betrachten (5.10) für die erste Erzeugende:

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - H(q, p, t) - \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i P_i + H'(Q, P, t) = \frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) . \quad (5.13)$$

Da die erste Erzeugende von den alten und den neuen Koordinaten  $q_i$  und  $Q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  abhängt, lautet deren totale Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} F_1(q, Q, t) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (5.14)$$

Einsetzen von (5.14) in (5.13) führt dann auf

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}_i \left( p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) - \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i \left( P_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \right) + H'(Q, P, t) - H(q, p, t) = \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (5.15)$$

Da die generalisierten Koordinaten  $q_i$  und  $Q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  als unabhängig anzusehen sind, müssen die Koeffizienten vor den entsprechenden generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{q}_i$  und  $\dot{Q}_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  einzeln verschwinden. Dadurch erhalten wir die folgenden Transformationsgleichungen:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.16)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.17)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (5.18)$$

Die  $f$  Gleichungen (5.16) enthalten nur die Größen  $q_i, p_i, Q_i, t$ . Sie können daher nach den  $f$  neuen generalisierten Koordinaten  $Q_i$  als Funktion der  $q_i, p_i$  und  $t$  aufgelöst werden:

$$Q_i = Q_i(q, p, t); \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.19)$$

Setzt man diese Beziehung in (5.17) ein, so ergeben sich auch die neuen generalisierten Impulse  $P_i$  als Funktion der  $q_i, p_i, t$

$$P_i = P_i(q, p, t); \quad i = 1, \dots, f. \quad (5.20)$$

Durch Invertieren des Zusammenhang zwischen alten und neuen Variablen gehen (5.19) und (5.20) in (5.5) über. Die neue Hamilton-Funktion ergibt sich damit gemäß zu

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_1(q(Q, P, t), Q, t)}{\partial t}. \quad (5.21)$$

### 5.3 Harmonischer Oszillator

Wir untersuchen, wie sich die Erzeugende

$$F_1(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q \quad (5.22)$$

auf den harmonischen Oszillator auswirkt, dessen Hamilton-Funktion schon in (4.77) bestimmt wurde. Zunächst erhalten wir für die Transformationsgleichungen (5.16), (5.17) mit (5.22):

$$p = \frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \quad (5.23)$$

$$P = -\frac{\partial F_1(q, Q)}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}. \quad (5.24)$$

Hierbei lässt sich (5.24) unmittelbar nach  $q$  auflösen:

$$q(Q, P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad (5.25)$$

so dass auch  $p(Q, P)$  mit Hilfe von (5.23) und (5.25) berechnet werden kann:

$$p(Q, P) = m\omega q(Q, P) \cot Q = \sqrt{2m\omega P} \cos Q. \quad (5.26)$$

Aufgrund von (5.21), (5.22) können wir die neue Hamilton-Funktion wie folgt berechnen

$$H'(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P)), \quad (5.27)$$

was schließlich mit (4.77), (5.25) und (5.26) auf das Ergebnis

$$H'(Q, P) = \omega P \quad (5.28)$$

führt. Die Erzeugende (5.22) bewirkt demnach eine kanonische Transformation, bei der der neue Impuls  $P$  mit der neuen Hamilton-Funktion  $H'$  identifiziert werden kann. Der Vergleich von (4.77) mit (5.28) zeigt, dass die durchgeführte kanonische Transformation die Hamilton-Funktion insofern vereinfacht hat, als die neue generalisierte Koordinate  $Q$  zyklisch ist. Damit ist der neue generalisierte Impuls  $P$  erhalten und kann wegen (5.28) mit der Energie identifiziert werden. Die neuen Hamilton-Gleichungen (5.7) lauten mit (5.28)

$$\dot{Q}(t) = \frac{\partial H'}{\partial P(t)} = \omega, \quad \dot{P}(t) = -\frac{\partial H'}{\partial Q(t)} = 0 \quad (5.29)$$

und führen auf die Lösung

$$Q(t) = \omega t + Q_0, \quad P(t) = \frac{H'}{\omega} = \frac{E}{\omega} = \text{konst.} \quad (5.30)$$

Einsetzen von (5.30) in (5.25) und (5.26) ergibt die bekannte Lösung des harmonischen Oszillators für die ursprünglichen Koordinaten und Impulse:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + Q_0), \quad p(t) = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + Q_0). \quad (5.31)$$

Das hier behandelte Beispiel des harmonischen Oszillators lässt die Frage offen, wie man eine geeignete Erzeugende findet, so dass sich die Hamilton-Funktion und damit die Hamilton-Gleichungen vereinfachen. Ein Standardverfahren zur Bestimmung einer geeigneten Erzeugenden wird erst im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie im nächsten Kapitel diskutiert. Das hier behandelte Beispiel illustriert aber, dass jede Erzeugende zu einer bestimmten kanonischen Transformation führt und damit das vorgegebene mechanische System transformiert. In der Regel wird dies aber nicht zu einer Vereinfachung der Hamilton-Funktion führen.

## 5.4 Zweite Erzeugende

Um von der ersten Erzeugenden  $F_1(q, Q, t)$  zu der zweiten Erzeugenden  $F_2(q, P, t)$  zu gelangen, muss man die neuen generalisierten Koordinaten  $Q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  durch die neuen generalisierten Impulse  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  austauschen, siehe Abb. 5.1. Da sich die neuen Impulse  $P_i$  gemäß (5.17) durch eine partielle Ableitung der ersten Erzeugenden  $F_1(q, Q, t)$  nach den neuen Koordinaten  $Q_i$  ergeben, liegt es nahe,  $F_2(q, P, t)$  durch eine Legendre-Transformaton aus  $F_1(q, Q, t)$  zu gewinnen. Aufgrund von (4.11) erhalten wir zunächst

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^f \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i} Q_i, \quad (5.32)$$

was sich mit Hilfe von (5.17) reduziert auf

$$F_2(q, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1}^f P_i Q_i. \quad (5.33)$$

Zur Kontrolle bilden wir das totale Differential von (5.33)

$$dF_2 = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^f \left( Q_i dP_i + P_i dQ_i \right), \quad (5.34)$$

was sich aufgrund von (5.17) reduziert auf

$$dF_2 = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + Q_i dP_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \quad (5.35)$$

Offenbar ist die Erzeugende  $F_2$  tatsächlich eine Funktion von  $q_i, P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und  $t$ , so dass  $F_2 = F_2(q, P, t)$  gilt. Löst man (5.33) nach der ersten Erzeugenden  $F_1$  auf und setzt sie in (5.13) ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^f \dot{q}_i p_i - H(q, p, t) = - \sum_{i=1}^f Q_i \dot{P}_i - H'(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_2(q, P, t). \quad (5.36)$$

Mit der totalen Zeitableitung von  $F_2$

$$\frac{d}{dt} F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad (5.37)$$

geht (5.36) über in

$$\sum_{i=1}^f \left( p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \dot{P}_i \left( Q_i - \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \right) = H(q, p, t) - H'(Q, P, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.38)$$

Da die alten generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und die neuen generalisierten Impulse  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  als unabhängig angesehen werden, ergibt der Koeffizientenvergleich in (5.38) die Transformationsgleichungen

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.39)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.40)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.41)$$

Die  $f$  Gleichungen (5.39) lassen sich nach den neuen Impulsen  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  auflösen und führen deshalb auf (5.20). Setzt man (5.20) dann in (5.40) ein, so erhält man auch noch (5.19). Invertiert man dann (5.19) und (5.20), so ergibt sich die neue Hamilton-Funktion dann gemäß

$$H'(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F_2(q(Q, P, t), P, t)}{\partial t}. \quad (5.42)$$

Als Beispiel betrachten wir die Erzeugende

$$F_2(q, P, t) = \sum_{i=1}^f q_i P_i. \quad (5.43)$$

Die Transformationsgleichungen (5.39)–(5.41) zeigen, dass es sich bei (5.43) um die identische Transformation handelt:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.44)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.45)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H. \quad (5.46)$$

## 5.5 Dritte und vierte Erzeugende

Der Vollständigkeit halber diskutieren wir noch die letzten beiden Erzeugenden in (5.12). Die dritte Erzeugende  $F_3(p, Q, t)$  geht aus der ersten Erzeugenden  $F_1(q, Q, t)$  durch Vertauschung der alten generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  und Impulse  $p_1, \dots, p_f$  hervor. Aufgrund von (4.11) und (5.16) führen wir hierzu die Legendre-Transformation

$$F_3(p, Q, t) = F_1(q, Q, t) - \sum_{i=1}^f q_i p_i \quad (5.47)$$

durch. Das totale Differential von (5.47) führt auf

$$dF_3 = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^f \left( q_i dp_i + p_i dq_i \right), \quad (5.48)$$

was sich aufgrund von (5.16) reduziert auf

$$dF_3 = \sum_{i=1}^f \left( -q_i dp_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt. \quad (5.49)$$

Damit ist  $F_3 = F_3(p, Q, t)$  tatsächlich eine Funktion von  $p_i, Q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und  $t$ . Mit der totalen Zeitableitung von  $F_3$

$$\frac{d}{dt} F_3(p, Q, t) = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_3}{\partial t} \quad (5.50)$$

sowie (5.13) und (5.47) folgt dann

$$-\sum_{i=1}^f q_i \dot{p}_i - H(q, p, t) = \sum_{i=1}^f \dot{Q}_i P_i - H'(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_3(p, Q, t). \quad (5.51)$$

Hieraus lesen wir die folgenden Transformationsgleichungen ab:

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.52)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.53)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}. \quad (5.54)$$

Entsprechend ergibt sich die vierte Erzeugende  $F_4(p, P, t)$  aus der ersten Erzeugenden aufgrund von (4.11) sowie (5.16) und (5.17) durch die doppelte Legendre-Transformation

$$F_4(p, P, t) = F_1(q, Q, t) + \sum_{i=1}^f (Q_i P_i - q_i p_i). \quad (5.55)$$

Dadurch geht (5.13) über in

$$-\sum_{i=1}^f q_i \dot{p}_i - H(q, p, t) = -\sum_{i=1}^f Q_i \dot{P}_i - H'(Q, P, t) + \frac{d}{dt} F_4(p, Q, t), \quad (5.56)$$

so dass hier die Transformationsgleichungen gegeben sind durch

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.57)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.58)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}. \quad (5.59)$$

Wir lesen aus (5.18), (5.41), (5.54) und (5.59) ab, dass sich die Hamilton-Funktion für alle Erzeugenden transformiert durch

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.60)$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Erzeugende

$$F_4(p, P, t) = \sum_{i=1}^f p_i P_i. \quad (5.61)$$

Die entsprechenden Transformationsgleichungen (5.57)–(5.59) lauten dann

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} = -P_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.62)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} = p_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (5.63)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} = H. \quad (5.64)$$

Wir erhalten damit eine kanonische Transformation, bei der gerade die generalisierten Koordinaten und die dazu kanonisch konjugierten Impulse miteinander vertauscht werden.

## 5.6 Bedingungen für kanonische Transformationen

Wir betrachten nun eine beliebige Transformation der alten generalisierten Koordinaten  $q_i$  und Impulse  $p_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  zu neuen generalisierten Koordinaten  $Q_i$  und Impulse  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  gemäß (5.5). Dabei wollen wir der Frage nachgehen, ob es eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gibt, dass diese Transformation kanonisch ist.

Zunächst werden wir eine notwendige Bedingung ableiten. Wenn es eine kanonische Transformation gibt, dann muss es dazu eine Erzeugende dafür geben. Und durch entsprechende Legendre-Transformationen muss man schließlich alle vier Erzeugenden  $F_1(q, Q, t)$ ,  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$ ,  $F_4(p, P, t)$  für diese kanonische Transformation konstruieren können. Aufgrund des Satzes von Schwarz können wir dann verwenden, dass bei allen vier Erzeugenden  $F_1(q, Q, t)$ ,  $F_2(q, P, t)$ ,  $F_3(p, Q, t)$ ,  $F_4(p, P, t)$  die gemischten zweiten partiellen Ableitungen vertauschen:

$$\frac{\partial^2 F_1(q, Q, t)}{\partial Q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_1(q, Q, t)}{\partial q_i \partial Q_j}, \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial P_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_2(q, P, t)}{\partial q_i \partial P_j}, \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial^2 F_3(p, Q, t)}{\partial Q_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 F_3(p, Q, t)}{\partial p_i \partial Q_j}, \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial^2 F_4(p, P, t)}{\partial P_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 F_4(p, P, t)}{\partial p_i \partial P_j}. \quad (5.68)$$

Aufgrund der entsprechenden Transformationsgleichungen (5.16), (5.17), (5.39), (5.40), (5.52),

(5.53), (5.57), (5.58) gehen (5.65)–(5.68) über in

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}, \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}, \quad (5.70)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}, \quad (5.71)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}. \quad (5.72)$$

Mit Hilfe von (4.53) und (5.69)–(5.72) erhalten wir für die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial p_k}{\partial P_i} \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial P_i} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial Q_j}{\partial P_i} = 0, \quad (5.73)$$

$$\{P_i, P_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) = \frac{\partial P_i}{\partial Q_j} = 0, \quad (5.74)$$

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial P_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) = \frac{\partial Q_i}{\partial Q_j} = \delta_{ij}. \quad (5.75)$$

Mit (5.73)–(5.75) haben wir gezeigt, dass die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern eine notwendige Bedingung dafür ist, dass eine kanonische Transformation vorliegt.

Nun wollen wir umgekehrt zeigen, dass die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern für das Vorliegen einer kanonischen Transformation auch hinreichend ist. Hierzu untersuchen wir zunächst, wie sich die Poisson-Klammer (4.53) zwischen zwei beliebigen Funktionen  $A(q, p, t)$  und  $B(q, p, t)$  unter einer Transformation (5.5) verändert. Die Verwendung der Kettenregel führt zunächst auf

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{q,p} &= \sum_{i,j,k=1}^f \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial B}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial B}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.76)$$

was sich schließlich zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned} \{A, B\}_{q,p} &= \sum_{j,k=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial Q_k} \{Q_j, Q_k\}_{q,p} + \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_k} \{Q_j, P_k\}_{q,p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial Q_k} \{P_j, Q_k\}_{q,p} + \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial P_k} \{P_j, P_k\}_{q,p} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Gilt nun (5.73)–(5.75) für (5.5), so folgt aus (5.78)

$$\{A, B\}_{q,p} = \left( \frac{\partial A}{\partial Q_j} \frac{\partial B}{\partial P_j} - \frac{\partial A}{\partial P_j} \frac{\partial B}{\partial Q_j} \right) = \{A, B\}_{Q,P}. \quad (5.78)$$

Demnach folgt aus der Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern die Invarianz beliebiger Poisson-Klammern. Ist (5.5) nicht explizit zeitabhängig, so ergeben Sie mit Hilfe der Kettenregel die folgenden Schlußfolgerungen:

- Für die Zeitableitung der neuen Koordinate  $Q_i$  gilt zunächst mit den Hamilton-Gleichungen (4.27), (4.29) und der Definition der Poisson-Klammer (4.53)

$$\dot{Q}_i = \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \left\{ Q_i, H \right\}_{q,p}. \quad (5.79)$$

Aufgrund von (5.78) sowie (4.53) ergibt sich dann

$$\dot{Q}_i = \left\{ Q_i, H \right\}_{Q,P} = \sum_k \left( \frac{\partial Q_i}{\partial Q_k} \frac{\partial H}{\partial P_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial P_k} \frac{\partial H}{\partial Q_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial P_i}. \quad (5.80)$$

Und aufgrund der Annahme, dass die Transformation (5.5) nicht explizit zeitabhängig ist, lesen wir aus (5.60) die Gleichheit der beiden Hamilton-Funktionen, also  $H = H'$ , ab und erhalten schließlich

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}. \quad (5.81)$$

- Ganz analog erhalten wir aus (4.27), (4.29) und (4.53)

$$\dot{P}_i = \sum_k \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = \sum_k \left( \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \left\{ P_i, H \right\}_{q,p}. \quad (5.82)$$

Aufgrund von (5.78) sowie (4.53) ergibt sich dann

$$\dot{P}_i = \left\{ P_i, H \right\}_{Q,P} = \sum_k \left( \frac{\partial P_i}{\partial Q_k} \frac{\partial H}{\partial P_k} - \frac{\partial P_i}{\partial P_k} \frac{\partial H}{\partial Q_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \quad (5.83)$$

Und wegen der angenommenen Zeitunabhängigkeit der Transformation (5.5) folgt nach (5.60) gerade  $H = H'$ , so dass sich (5.83) reduziert auf

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}. \quad (5.84)$$

Demnach ist bei einer nicht explizit zeitabhängigen Transformation (5.5) die Invarianz der fundamentalen Poisson-Klammern hinreichend dafür, dass die Transformation kanonisch ist.

Damit sind (5.73)–(5.75) notwendig und hinreichende Bedingungen dafür, dass eine nicht explizit zeitabhängige Transformation (5.5) kanonisch ist. Im Falle eines einzelnen Freiheitsgrades reduzieren sich (5.73)–(5.75) auf

$$\left\{ Q, P \right\}_{q,p} = 1 \quad (5.85)$$

bzw. durch Vertauschung der alten und neuen Variablen auf

$$\left\{ q, p \right\}_{Q,P} = 1. \quad (5.86)$$

Als Beispiel betrachten wir erneut die nicht explizit zeitabhängige Transformation (5.25), (5.26) und berechnen deren Poisson-Klammer

$$\begin{aligned} \{q, p\}_{Q, P} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2m\omega P}} \sin Q \left( -\sqrt{2m\omega P} \right) \sin Q = 1, \end{aligned} \quad (5.87)$$

was gerade (5.86) entspricht. Demnach handelt es sich bei (5.25), (5.26) tatsächlich um eine kanonische Transformation.

# Kapitel 6

## Hamilton-Jacobi-Theorie

Wir stellen nun ein Standardverfahren vor, wie man systematisch eine kanonische Transformation finden kann, die eine vorgegebene Hamilton-Funktion und damit die zugrunde liegenden Hamilton-Gleichungen vereinfacht. Dies führt auf eine partielle Differentialgleichung für die Erzeugende der gesuchten kanonischen Transformation. Diese Hamilton-Jacobi-Gleichung lässt sich häufig mit der Methode der Separation der Variablen lösen.

### 6.1 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Gegeben sei eine Hamilton-Funktion  $H(q, p, t)$ , so dass die Hamilton-Gleichungen (5.6) zu lösen sind. Wir wollen nun eine kanonische Transformation dahingehend auswählen, dass die neue Hamilton-Funktion  $H'(Q, P, t)$  und damit die neuen Hamilton-Gleichungen (5.7) vereinfacht sind. Die denkbar einfachste neue Hamilton-Funktion  $H'(Q, P, t)$  ist trivial

$$H'(Q, P, t) = 0 \tag{6.1}$$

und führt auf Hamilton-Gleichungen

$$\dot{Q}_i(t) = 0, \quad \dot{P}_i(t) = 0; \quad i = 1, \dots, f, \tag{6.2}$$

die sich unmittelbar integrieren lassen:

$$Q_i(t) = Q_\alpha = \text{konstant}, \quad P_i(t) = P_i = \text{konstant}; \quad i = 1, \dots, f. \tag{6.3}$$

Wir suchen nun die Erzeugende  $F_2(q, P, t)$  derjenigen kanonischen Transformation, die die vorgegebene Hamilton-Funktion  $H(q, p, t)$  auf die triviale Hamilton-Funktion (6.1) abbildet. Aus (5.41) und (6.1) folgt zunächst die Bedingung

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0. \tag{6.4}$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen (5.39) geht dann (6.4) in die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über:

$$H \left( q_1, \dots, q_f, \frac{\partial F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial q_f}, t \right) + \frac{\partial F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.5)$$

Es handelt sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Erzeugende  $F_2(q, P, t)$ , wobei die alten generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und die Zeit  $t$  als Variablen auftreten. Die vollständige Lösung von (6.5) beinhaltet deshalb  $f + 1$  Integrationskonstanten. Davon ist eine Integrationskonstante trivial, da  $F_2(q, P, t)$  selbst nicht explizit in (6.5) enthalten ist. Mit  $F_2(q, P, t)$  ist offensichtlich auch  $F_2'(q, P, t) = F_2(q, P, t) + f(P)$  eine Lösung von (6.5). Die restlichen  $f$  nichttrivialen Integrationskonstanten können wegen (6.3) mit den neuen generalisierten Impulsen  $P_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  identifiziert werden.

Wir denken uns nun die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.5) gelöst. Wir wollen also mit der als bekannt vorausgesetzten Erzeugenden  $F_2(q, P, t)$  die Lösung der ursprünglichen Hamilton-Gleichungen (5.6)

$$q_i = q_i(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t), \quad p_i = p_i(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0, t); \quad i = 1, \dots, f \quad (6.6)$$

berechnen. Hierbei bezeichnen  $q_i^0$  und  $p_i^0$  mit  $i = 1, \dots, f$  die Anfangsdaten der generalisierten Koordinaten  $q_i$  und Impulse  $p_i$  zur Zeit  $t = 0$ . Zunächst werten wir die Transformationsgleichungen (5.39) und (5.40) zur Zeit  $t = 0$  aus:

$$p_i^0 = \frac{\partial F_2(q_1^0, \dots, q_f^0, P_1, \dots, P_f, 0)}{\partial q_i^0}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.7)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2(q_1^0, \dots, q_f^0, P_1, \dots, P_f, 0)}{\partial P_i}; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.8)$$

Es handelt sich um  $2f$  algebraische Gleichungen, aus denen sich die nach (6.3) vorliegenden Integrationskonstanten  $Q_i$  und  $P_i$  als Funktion der Anfangsdaten  $q_i^0$  und  $p_i^0$  ausdrücken lassen:

$$Q_i = Q_i(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0), \quad P_i = P_i(q_1^0, \dots, q_f^0, p_1^0, \dots, p_f^0); \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.9)$$

Für beliebige Zeiten  $t$  lauten die Transformationsgleichungen (5.39) und (5.40)

$$p_i = \frac{\partial F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.10)$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f, t)}{\partial P_i}; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.11)$$

Zunächst kann (6.11) nach den alten generalisierten Koordinaten aufgelöst werden:

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t); \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.12)$$

Setzt man (6.12) in (6.10) ein, so ergeben sich schließlich auch die alten generalisierten Impulse

$$p_i = p_i(Q_1, \dots, Q_f, P_1, \dots, P_f, t); \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.13)$$

Aus (6.9), (6.12) und (6.13) folgen schließlich die gesuchten Lösungen (6.6) der Hamilton-Gleichungen (5.7).

Die Erzeugende  $F_2(q, P, t)$  als Lösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.5) lässt sich physikalisch interpretieren. Hierzu betrachten wir deren totale Zeitableitung,

$$\frac{dF_2(q, P, t)}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (6.14)$$

Aufgrund der Transformationsgleichungen (5.39) sowie (6.2) und (6.4) reduziert sich dies unter Berücksichtigung von (4.25) auf die Lagrange-Funktion:

$$\frac{dF_2(q, P, t)}{dt} = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (6.15)$$

Die Integration von (6.15) zeigt, dass die Erzeugende  $F_2(q, P, t)$  bis auf eine Integrationskonstante die Wirkung entlang der Bahnkurve darstellt. Deshalb wird sie häufig auch als Hamiltonsche Wirkungsfunktion bezeichnet.

## 6.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten nun eine Hamilton-Funktion  $H(q, p)$ , die nicht explizit von der Zeit abhängt. Zur Lösung der entsprechenden zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.5) machen wir den Ansatz

$$F_2(q, P, t) = \tilde{F}_2(q, P) - \tilde{H}(P)t, \quad (6.16)$$

der die Abhängigkeiten von den alten generalisierten Koordinaten  $q_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  und der Zeit  $t$  separiert und die Separationskonstante  $\tilde{H}(P)$  enthält. Einsetzen von (6.16) in (6.5) führt auf die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H \left( q_1, \dots, q_f, \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_f} \right) = \tilde{H}(P_1, \dots, P_f), \quad (6.17)$$

und die Transformationsgleichungen (6.10), (6.11) lauten

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.18)$$

$$Q_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial P_i} - \frac{\partial \tilde{H}(P_1, \dots, P_f)}{\partial P_i} t; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.19)$$

Da die Hamilton-Funktion  $H(q, p)$  nicht explizit von der Zeit abhängt, kann man die Separationskonstante  $\tilde{H}(P)$  in (6.17) mit der Energie des Systems identifizieren.

Bisher wurde die Hamiltonsche charakteristische Funktion  $\tilde{F}_2(q, P)$  lediglich als Bestandteil der Hamiltonschen Wirkungsfunktion  $F_2(q, P, t)$  betrachtet. Wir können aber  $\tilde{F}_2(q, P)$  als die

Erzeugende einer eigenen kanonischen Transformation auffassen, deren Eigenschaften von der durch  $F_2(q, P, t)$  erzeugten kanonischen Transformation etwas verschieden sind. Aus (5.41) und (6.17) folgt, dass die neue Hamiltonsche Funktion gegeben ist durch

$$\tilde{H}'(\tilde{Q}, P) = \tilde{H}(P), \quad (6.20)$$

so dass die neuen generalisierten Koordinaten  $\tilde{Q}_i$  mit  $i = 1, \dots, f$  zyklisch sind. Die neuen Hamilton-Gleichungen gemäß (5.7) und (6.20)

$$\dot{\tilde{Q}}_i(t) = \frac{\partial \tilde{H}(P_1(t), \dots, P_f(t))}{\partial P_i(t)}, \quad \dot{P}_i(t) = 0; \quad i = 1, \dots, f \quad (6.21)$$

lassen sich unmittelbar integrieren:

$$\tilde{Q}_i(t) = \frac{\partial \tilde{H}(P_1(t), \dots, P_f(t))}{\partial P_i(t)} t + Q_i, \quad P_i(t) = P_i; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.22)$$

Damit sind die zu den zyklischen generalisierten Koordinaten  $\tilde{Q}_i$  kanonisch konjugierten Impulse tatsächlich Erhaltungsgrößen. Die Transformationsgleichungen (5.39), (5.40) von  $\tilde{F}_2(q, P)$  lauten

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.23)$$

$$\tilde{Q}_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial P_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.24)$$

Sie sind wegen (6.22) offenbar mit denen von  $F_2(q, P, t)$  in (6.18) und (6.19) identisch.

Die Hamiltonsche charakterische Funktion  $\tilde{F}_2(q, P)$  besitzt eine physikalische Bedeutung, die der der Hamiltonschen Wirkungsfunktion  $F_2(q, P, t)$  sehr ähnlich ist. Für die totale Zeitableitung erhalten wir mit Hilfe von (6.21) und (6.23)

$$\frac{d\tilde{F}_2(q, P)}{dt} = \sum_{i=1}^f \left( \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_i} \dot{P}_i \right) = \sum_{i=1}^f p_i \dot{q}_i, \quad (6.25)$$

so dass die Zeitintegration ergibt

$$\tilde{F}_2(q, P) = \sum_{i=1}^f \int p_i dq_i. \quad (6.26)$$

### 6.3 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als Beispiel den harmonischen Oszillator, dessen Hamilton-Funktion schon in (4.77) aufgestellt wurde. Die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.5) für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion  $F_2(q, P, t)$  lautet in diesem Fall

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.27)$$

Da die Hamilton-Funktion (4.77) des harmonischen Oszillators nicht explizit zeitabhängig ist, lässt sich die Hamiltonsche Wirkungsfunktion gemäß (6.16) separieren:

$$F_2(q, P, t) = \tilde{F}_2(q, P) - \tilde{H}(P)t, \quad (6.28)$$

wobei die Separationskonstante  $\tilde{H}(P)$  als Energie des Systems mit dem neuen Impuls als Erhaltungsgröße identifiziert werden kann. Aufgrund von (5.30) setzen wir

$$\tilde{H}(P) = \omega P. \quad (6.29)$$

Durch (6.28) und (6.29) geht (6.27) in die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(q, P)}{\partial q} \right)^2 + \frac{m}{2} \omega^2 q^2 = \omega P. \quad (6.30)$$

Eine algebraische Umformung von (6.30) ergibt

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q, P)}{\partial q} = \sqrt{2m \left( \omega P - \frac{m}{2} \omega^2 q^2 \right)}, \quad (6.31)$$

so dass sich durch Integration die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt:

$$\tilde{F}_2(q, P) = \int^q \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2\tilde{q}^2} d\tilde{q}. \quad (6.32)$$

Hierbei wurde eine nur von  $P$  abhängige Integrationskonstante weggelassen. Das Standardintegral

$$\int^x \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \quad (6.33)$$

führt dann (6.32) über in

$$\tilde{F}_2(q, P) = \sqrt{\frac{m\omega P}{2}} q \sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P} q^2} + P \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right). \quad (6.34)$$

Mit dieser Hamiltonschen charakteristischen Funktion lässt sich der Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Variablen berechnen. Als Nebenrechnung betrachten wir zunächst deren partielle Ableitung nach  $q$

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q, P)}{\partial q} = \sqrt{2m\omega P} \sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P} q^2}, \quad (6.35)$$

was gerade (6.31) entspricht. Entsprechend ergibt die partielle Ableitung von (6.34) nach  $P$

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q, P)}{\partial P} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right). \quad (6.36)$$

Aus der Transformationsgleichung (6.19) folgt dann mit (6.29) und (6.35)

$$Q = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right) - \omega t \quad \implies \quad q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(Q + \omega t). \quad (6.37)$$

Außerdem ergibt sich aus (6.18), (6.31) und (6.37)

$$p(t) = \sqrt{2m\omega P} \cos(Q + \omega t). \quad (6.38)$$

Unter Berücksichtigung von (6.29) stimmen (6.37), (6.38) mit (5.31) überein.

Abschließend führen wir bei der Hamiltonschen charakteristischen Funktion  $\tilde{F}_2(q, P)$  in (6.34) eine Legendre-Transformation bezüglich des neuen Impulses  $P$  durch, um die entsprechende Erzeugende  $\tilde{F}_1(q, \tilde{Q})$  zu bestimmen. Aus der Transformationsgleichung (6.24) ergibt sich mit (6.35)

$$\tilde{Q} = \arcsin \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} q \right) \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 \tilde{Q}}. \quad (6.39)$$

Die Legendre-Transformierte  $\tilde{F}_1(q, \tilde{Q})$  zu  $\tilde{F}_2(q, P)$  ergibt sich dann gemäß (5.33) und (6.34) zu

$$\tilde{F}_1(q, \tilde{Q}) = \tilde{F}_2(q, P) - \tilde{Q}P = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot \tilde{Q}. \quad (6.40)$$

Als Ergebnis haben wir damit die in (5.22) verwendete Erzeugende erhalten.

## 6.4 Separation der Variablen

Das Verfahren von Hamilton-Jacobi zur Lösung mechanischer Probleme scheint auf den ersten Blick nur von geringer praktischer Bedeutung zu sein. Anstatt die  $2f$  gewöhnlichen Hamilton-Gleichungen muss man die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung lösen und partielle Differentialgleichungen sind bekanntlich schwerer als gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die einzelnen Variablen in der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu separieren, so dass die Lösung stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Praktisch ist das Hamilton-Jacobi-Verfahren nur dann eine nützliche Rechenhilfe, wenn sich eine solche Separation erreichen lässt.

Wir betrachten den Fall, dass die Hamilton-Funktion eines mechanischen Systems von der Form

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^f H_i(q_i, p_i) \quad (6.41)$$

ist, so dass die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.17) lautet

$$\sum_{i=1}^f H_i \left( q_i, \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_i} \right) = \tilde{H}(P_1, \dots, P_f). \quad (6.42)$$

Für die Hamiltonsche charakteristische Funktion  $\tilde{F}_2(q, P)$  machen wir dann den Separationsansatz

$$\tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f) = \sum_{i=1}^f \tilde{F}_{2i}(q_i, P_1, \dots, P_f), \quad (6.43)$$

so dass (6.42) übergeht in

$$\sum_{i=1}^f H_i \left( q_i, \frac{\partial \tilde{F}_{2i}(q_i, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_i} \right) = \tilde{H}(P_1, \dots, P_f). \quad (6.44)$$

In der gesamten Gleichung (6.44) tritt die Variable  $q_i$  nur im  $i$ -ten Summanden auf der linken Seite auf. Demnach zerfällt die Separationskonstante  $\tilde{H}(P)$  als Gesamtenergie gemäß

$$\tilde{H}(P_1, \dots, P_f) = \sum_{i=1}^f \tilde{H}_i(P_1, \dots, P_f), \quad (6.45)$$

und es gilt

$$H_i \left( q_i, \frac{\partial \tilde{F}_{2i}(q_i, P_1, \dots, P_f)}{\partial q_i} \right) = \tilde{H}_i(P_1, \dots, P_f); \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.46)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Separationskonstanten  $\tilde{H}_i(P_1, \dots, P_f)$  mit den neuen Impulsen identifizieren:

$$\tilde{H}_i(P_1, \dots, P_f) = P_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.47)$$

wobei deren Summe gemäß (6.45) die Energie des Systems ergibt:

$$\tilde{H}(P_1, \dots, P_f) = \sum_{i=1}^f P_i. \quad (6.48)$$

Setzt man (6.47) in (6.46) ein, so gilt offensichtlich

$$\tilde{F}_{2i}(q_i, P_1, \dots, P_f) = \tilde{F}_{2i}(q_i, P_i). \quad (6.49)$$

Aufgrund der Abkürzung

$$\frac{\partial \tilde{F}_{2i}(q_i, P_i)}{\partial q_i} = f_i(q_i, P_i) \quad (6.50)$$

führt eine unmittelbare Integration auf

$$\tilde{F}_{2i}(q_i, P_i) = \int^{q_i} f_i(\tilde{q}_i, P_i) d\tilde{q}_i, \quad (6.51)$$

wobei eine nur von  $P_i$  abhängige Integrationskonstante weggelassen wurde. Durch Einsetzen von (6.49) und (6.51) in (6.43) ist die gesuchte Hamiltonsche charakteristische Funktion  $\tilde{F}_2(q, P)$  bestimmt.

## 6.5 Ebene Bewegung im Zentralfeld

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einer Ebene in einem Zentralfeld. In ebenen Polarkoordinaten wurde dessen kinetische Energie schon in (1.54) angegeben, so dass die Lagrange-Funktion gegeben ist durch

$$L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - V(\rho). \quad (6.52)$$

Die zu den generalisierten Koordinaten  $\rho$  und  $\varphi$  kanonisch konjugierten Impulse lauten dann gemäß (6.52)

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \quad (6.53)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}. \quad (6.54)$$

Durch eine Legendre-Transformation (4.25) mit (6.53) und (6.54) geht die Lagrange-Funktion (6.52) in die entsprechende Hamilton-Funktion über:

$$H(\rho, \varphi, p_\rho, p_\varphi) = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} - L(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + V(\rho). \quad (6.55)$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit in (6.55) vorliegt, ist die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.17) für die Hamiltonsche charakteristische Funktion zu lösen:

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{2m\rho^2} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + V(\rho) = \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi). \quad (6.56)$$

Eine Umformung von (6.56) ergibt

$$\left( \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 = 2m\rho^2 \left[ \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi) - V(\rho) - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \rho} \right)^2 \right]. \quad (6.57)$$

Die linke Seite von (6.57) hängt nur von  $\varphi$ , während die rechte Seite nur von  $\rho$  abhängt. Deshalb müssen beide Seiten gleich einer Separationskonstanten  $c^2(P_\rho, P_\varphi)$  sein. Aus der linken Seite von (6.57) folgt dann die Gleichung

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \varphi} = c(P_\rho, P_\varphi) \quad (6.58)$$

was zum folgenden Separationsansatz der Variablen führt

$$\tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi) = \varphi c(P_\rho, P_\varphi) + \tilde{F}_2(\rho, P_\rho, P_\varphi). \quad (6.59)$$

Einsetzen von (6.59) in (6.57) führt dann auf

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, P_\rho, P_\varphi)}{\partial \rho} = \sqrt{2m \left[ \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi) - V(\rho) - \frac{c^2(P_\rho, P_\varphi)}{2m\rho^2} \right]}, \quad (6.60)$$

was unmittelbar integriert werden kann:

$$\tilde{F}_2(\rho, P_\rho, P_\varphi) = \int^\rho \sqrt{2m \left[ \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi) - V(\tilde{\rho}) - \frac{c^2(P_\rho, P_\varphi)}{2m\tilde{\rho}^2} \right]} d\tilde{\rho}. \quad (6.61)$$

Der Einfachheit halber werden die beiden Konstanten  $\tilde{H}(P_\rho, P_\varphi)$  und  $c(P_\rho, P_\varphi)$  mit den neuen Impulsen  $P_\rho$  und  $P_\varphi$  identifiziert:

$$\tilde{H}(P_\rho, P_\varphi) = P_\rho, \quad c(P_\rho, P_\varphi) = P_\varphi. \quad (6.62)$$

Die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt sich dann aus (6.59), (6.61), (6.62) zu

$$\tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi) = \varphi P_\varphi + \int^\rho \sqrt{2m \left[ P_\rho - V(\tilde{\rho}) - \frac{P_\varphi^2}{2m\tilde{\rho}^2} \right]} d\tilde{\rho}. \quad (6.63)$$

Die Transformationsgleichungen (6.19) lauten dann mit Hilfe von (6.62), (6.63)

$$Q_\rho = \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial P_\rho} - \frac{\partial \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi)}{\partial P_\rho} t = \int^\rho \frac{m\tilde{\rho}}{\sqrt{2m\tilde{\rho}^2 [P_\rho - V(\tilde{\rho})] - P_\varphi^2}} d\tilde{\rho} - t, \quad (6.64)$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial \tilde{F}_2(\rho, \varphi, P_\rho, P_\varphi)}{\partial P_\varphi} - \frac{\partial \tilde{H}(P_\rho, P_\varphi)}{\partial P_\varphi} t = \varphi - \int^\rho \frac{P_\varphi^2}{\sqrt{2m\tilde{\rho}^2 [P_\rho - V(\tilde{\rho})] - P_\varphi^2}} d\tilde{\rho}. \quad (6.65)$$

Hierbei stellt (6.64) eine implizite Gleichung für  $\rho(t)$  dar, die in (6.65) eingesetzt  $\varphi(t)$  ergibt. Ist man dagegen an der Bahnkurve  $\rho(\varphi)$  interessiert, so lässt sich diese direkt aus (6.65) berechnen.

## 6.6 Wirkungs- und Winkelvariablen

Wir diskutieren nun eine wichtige Modifikation des Hamilton-Jacobi-Verfahrens, das auf periodische Systeme zugeschnitten ist, bei denen man sich häufig mehr für die Frequenzen der Bewegung als z.B. für die konkrete Gestalt der Bahn interessiert. Hierzu betrachten wir zunächst ein einzelnes Paar von kanonisch konjugierten Variablen  $q$  und  $p$ , d.h. die Projektion des Phasenraumes auf eine einzelne  $pq$ -Ebene. Man unterscheidet dann zwei Typen von Periodizitäten, siehe Abb. 6.1:

1. Bei einer Libration ist die Phasenbahn eine geschlossene Kurve, so dass  $q$  und  $p$  periodisch mit der gleichen Periodendauer  $T$  sind:

$$q(t) = q(t + T), \quad p(t) = p(t + T). \quad (6.66)$$

Die Libration ist typisch für schwingende Systeme wie z.B. eine Feder.

2. Bei einer Rotation ist auch  $p$  periodisch

$$p(t) = p(t + T), \quad (6.67)$$

$q$  dagegen nicht mehr. Die generalisierte Koordinate ändert sich vielmehr nach der Periode  $T$  um einen konstanten Wert  $q_0$ :

$$q(t + T) = q(t) + q_0. \quad (6.68)$$

Die Phasenbahn ist nun offen, wobei  $p$  jedoch eine periodische Funktion von  $q$  ist. Die Rotation tritt beispielsweise bei der Achsendrehung eines starren Körpers auf.

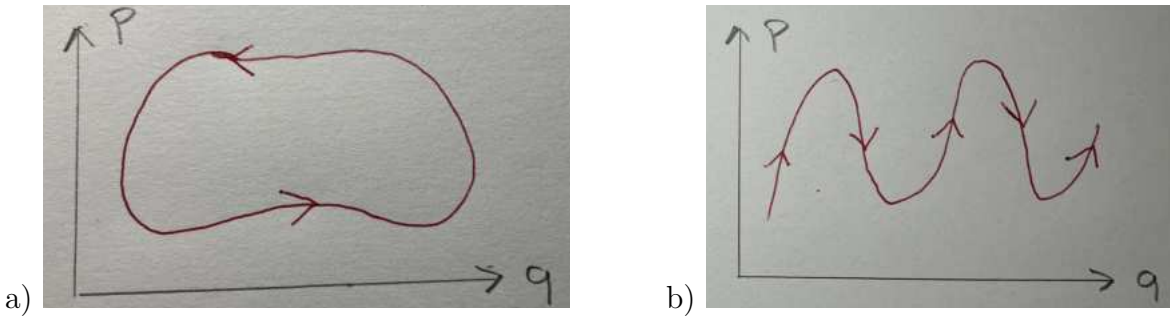


Abbildung 6.1: Illustration periodischer Trajektorien: a) Libration (6.66) und b) Rotation (6.67), (6.68).

Diese beiden Bewegungstypen lassen sich unter Umständen auch an ein- und demselben System beobachten. Bei der Diskussion des mathematischen Pendels im Phasenraum in Abschnitt 4.5 haben wir gesehen, dass für kleine Energien eine Libration auftritt, für große Energien aber eine Rotation vorliegt. Dabei werden Libration und Rotation durch eine Separatrix getrennt, siehe Abb. 4.3.

Wir behandeln nun periodische Systeme im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie und betrachten die Hamiltonsche charakteristische Funktion  $\tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f)$  als bekannt. Die bei der Lösung der zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.17) auftretenden Integrationskonstanten wurden bisher immer unmittelbar mit den neuen Impulsen  $P_1, \dots, P_f$  identifiziert. Diese Wahl ist aber nicht eindeutig, da wir auch irgendwelche Funktionen der Integrationskonstanten mit den neuen Impulsen identifizieren könnten. Für periodische Systeme ist es geschickt, die sogenannten Wirkungsvariablen

$$J_i = \oint p_i dq_i; \quad i = 1, \dots, f \quad (6.69)$$

als neue Impulse anzusehen. Dabei erfolgt die Integration über eine volle Periode der Libration bzw. der Rotation, so dass wir die Wirkungsvariablen gemäß Abb. 6.2 mit entsprechenden Flächeninhalten identifizieren können.

Wir identifizieren nun die neuen Impulse  $P_1, \dots, P_f$  in der Hamiltonschen charakteristischen Funktion  $\tilde{F}_2$  mit den Wirkungsvariablen  $J_1, \dots, J_f$ :

$$\tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, P_1, \dots, P_f) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, J_1, \dots, J_f). \quad (6.70)$$

Nach der zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.17) ist dann auch die neue Hamilton-Funktion  $\tilde{H}$  ausschließlich eine Funktion der Wirkungsvariablen  $J_1, \dots, J_f$ :

$$\tilde{H}(P_1, \dots, P_f) \quad \Longrightarrow \quad \tilde{H}(J_1, \dots, J_f). \quad (6.71)$$

Wir kommen nun zu den Winkelvariablen  $\omega_1, \dots, \omega_f$ , die man als die zu den Wirkungsvariablen  $J_1, \dots, J_f$  kanonisch konjugierten Variablen einführt:

$$P_i = J_i \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{Q}_i = \omega_i; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.72)$$

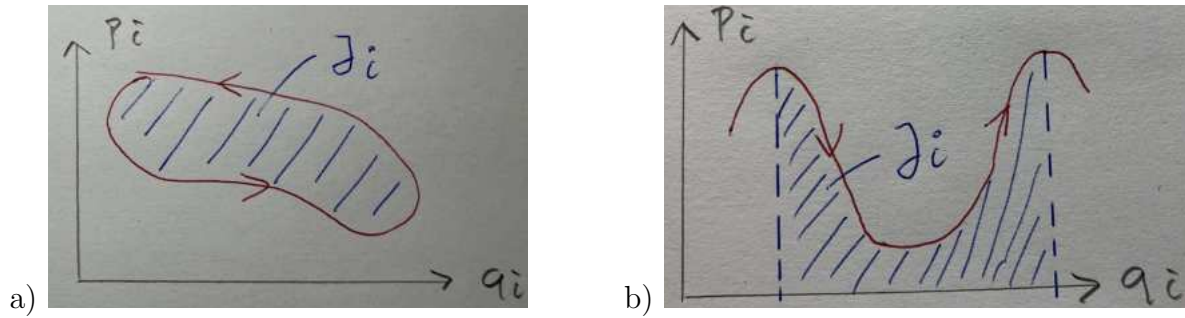


Abbildung 6.2: Identifikation der Wirkungsvariablen (6.69) mit Flächeninhalten für a) Libration und b) Rotation.

Wie aus der neuen Hamilton-Funktion (6.71) hervorgeht, sind die Winkelvariablen  $\omega_1, \dots, \omega_f$  alle zyklisch. Die Lösung der neuen Hamilton-Gleichungen (6.21)

$$\dot{\omega}_i(t) = \frac{\partial \tilde{H}(J_1(t), \dots, J_f(t))}{\partial J_i(t)}, \quad \dot{J}_i(t) = 0; \quad i = 1, \dots, f \quad (6.73)$$

ist dann trivial gegeben durch

$$\omega_i(t) = \nu_i t + Q_i, \quad J_i(t) = J_i; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.74)$$

wobei die Frequenzen

$$\nu_i = \frac{\partial \tilde{H}(J_1, \dots, J_f)}{\partial J_i}; \quad i = 1, \dots, f \quad (6.75)$$

auftreten. Außerdem lauten die Transformationsgleichungen (6.23), (6.24) der Hamiltonschen charakteristischen Funktion (6.70)

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, J_1, \dots, J_f)}{\partial q_i}; \quad i = 1, \dots, f, \quad (6.76)$$

$$\omega_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1, \dots, q_f, J_1, \dots, J_f)}{\partial J_i}; \quad i = 1, \dots, f. \quad (6.77)$$

Damit haben wir das in Abschnitt 6.2 geschilderte Hamilton-Jacobi-Verfahren lediglich auf Wirkungs- und Winkelvariablen umgeschrieben, aber noch keinen besonderen Vorteil erarbeitet. Deshalb untersuchen wir nun die physikalische Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen. Hierzu berechnen wir die Änderung der Winkelvariable  $\omega_i$  bei einer Änderung der generalisierten Koordinate  $q_j$  über eine volle Periode:

$$\delta_j \omega_i = \oint_j d\omega_i = \oint_j \frac{\partial \omega_i}{\partial q_j} dq_j. \quad (6.78)$$

Verwendet man (6.77) und den Satz von Schwarz, so folgt:

$$\delta_j \omega_i = \oint \frac{\partial^2 \tilde{F}_2}{\partial q_j \partial J_i} dq_j = \oint \frac{\partial^2 \tilde{F}_2}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j} dq_j. \quad (6.79)$$

Unter Verwendung von (6.69) und (6.76) ergibt sich dann schließlich

$$\delta_j \omega_i = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j dq_j = \frac{\partial J_j}{\partial J_i} = \delta_{ij}. \quad (6.80)$$

Dies bedeutet, dass sich die Winkelvariable  $\omega_i$  nur dann ändert, wenn sich  $q_j = q_i$  über eine Periode ändert. Bezeichnet  $T_i$  die Periodendauer von  $q_i$ , so gilt in diesem Fall wegen (6.80)

$$\omega_i(t + T_i) = \omega_i(t) + 1. \quad (6.81)$$

Mit Hilfe von (6.74) besagt dies

$$\nu_i(t + T_i) + Q_i = \nu_i t + Q_i + 1 \quad \implies \quad \nu_i = \frac{1}{T_i}. \quad (6.82)$$

Demnach ist die durch (6.75) definierte Größe  $\nu_i$  gerade die Frequenz der zu  $q_i$  gehörenden periodischen Bewegung. Hierin liegt die eigentliche Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen, da sie durch (6.75) eine Bestimmung der Frequenzen periodischer Bewegungen gestattet, ohne die vollständige Lösung für die Systembewegung gewonnen zu haben.

Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel des harmonischen Oszillators. Wie schon in Abschnitt 4.8.6 erläutert, ist die Trajektorie im Phasenraum eine Ellipse mit den Halbachsen (4.79). Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist dann gerade die Wirkungsvariable (6.69), die mit Hilfe von (4.79) berechnet werden kann:

$$J = \oint p dq = \pi a_p a_q = \frac{2\pi}{\omega} E. \quad (6.83)$$

Die neue Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators, die mit der Energie  $E$  identifiziert werden kann, hat dann gemäß (6.83) die einfache Gestalt

$$\tilde{H}(J) = \frac{\omega}{2\pi} J. \quad (6.84)$$

Für die Frequenz  $\nu$  der periodischen Bewegung erhalten wir dann aufgrund von (6.75) und (6.84) das erwartete Ergebnis

$$\nu = \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (6.85)$$

Das Beispiel des harmonischen Oszillators diene lediglich dazu, die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen zu illustrieren. Der Nutzen dieser Methode zeigt sich erst bei anspruchsvolleren Problemen, wie z.B. der Himmelsmechanik.

## 6.7 Kepler-Problem

Wir betrachten im folgenden das dreidimensionale Kepler-Problem, dessen Lagrange-Funktion in kartesischen Koordinaten durch

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (6.86)$$

gegeben ist, wobei die reduzierte Masse

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.87)$$

und die Abkürzung

$$\alpha = Gm_1 m_2 > 0 \quad (6.88)$$

eingeführt wurde. Aufgrund der Rotationssymmetrie wählen wir als generalisierte Koordinaten die Kugelkoordinaten  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \vartheta$ ,  $q_3 = \varphi$ :

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \dot{x} = \dot{r} \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} r \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (6.89)$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} r \cos \vartheta \sin \varphi + \dot{\varphi} r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (6.90)$$

$$z = r \cos \vartheta, \quad \dot{z} = \dot{r} \cos \vartheta - \dot{\vartheta} r \sin \vartheta. \quad (6.91)$$

Einsetzen von (6.89)–(6.91) in die Lagrange-Funktion (6.86) führt auf

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \dot{\vartheta}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{\alpha}{r}. \quad (6.92)$$

Die zu den generalisierten Koordinaten  $r, \vartheta, \varphi$  kanonisch konjugierten Impulse lauten

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \quad \iff \quad \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad (6.93)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m r^2 \dot{\vartheta} \quad \iff \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{m r^2}, \quad (6.94)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} \quad \iff \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \vartheta}. \quad (6.95)$$

Durch die Legendre-Transformation

$$H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = p_\varphi \dot{\varphi} + p_r \dot{r} + p_\vartheta \dot{\vartheta} - L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \quad (6.96)$$

geht die Lagrange-Funktion (6.92) mit Hilfe von (6.93)–(6.95) in die entsprechende Hamilton-Funktion über:

$$H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\vartheta^2}{2m r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{\alpha}{r}. \quad (6.97)$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt, ist die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (6.17) für die Hamiltonsche charakteristische Funktion  $\tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi, J_r, J_\vartheta, J_\varphi)$  zu lösen

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2m r^2} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{1}{2m r^2 \sin^2 \vartheta} \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{\alpha}{r} = E, \quad (6.98)$$

wobei die neue Hamilton-Funktion  $\tilde{H}(J_r, J_\vartheta, J_\varphi)$  mit der Energie  $E$  identifiziert wird:

$$\tilde{H}(J_r, J_\vartheta, J_\varphi) = E. \quad (6.99)$$

Das Problem ist separierbar:

$$\tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi) = \tilde{F}_{2r}(r) + \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta) + \tilde{F}_{2\varphi}(\varphi). \quad (6.100)$$

Da die Variable  $\varphi$  gemäß (6.97) zyklisch ist, wählen wir für  $\tilde{F}_{2\varphi}(\varphi)$  die identische Transformation analog zu (5.43):

$$\tilde{F}_{2\varphi}(\varphi) = C_\varphi \varphi. \quad (6.101)$$

Einsetzen von (6.100) und (6.101) in (6.98) führt auf

$$r^2 \left( \frac{\partial \tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\alpha}{r} + E \right) 2mr^2 = - \left( \frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (6.102)$$

Da die linke Seite nur von  $r$  und die rechte nur von  $\vartheta$  abhängig ist, muss jede Seite für sich bereits eine Konstante sein:

$$\left( \frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 + \frac{C_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = C_\vartheta^2, \quad (6.103)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r} \right)^2 + \frac{C_\vartheta^2}{r^2} = 2m \left( E + \frac{\alpha}{r} \right). \quad (6.104)$$

Hierbei stellen  $E$ ,  $C_\varphi$ ,  $C_\vartheta$  die Integrationskonstanten dar. Die physikalische Bedeutung von  $E$  ist offensichtlich die Energie des Systems. Um auch die anderen Integrationskonstanten  $C_\varphi$  und  $C_\vartheta$  physikalisch interpretieren zu können, betrachten wir die Komponenten des Drehimpulsvektors

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y\dot{z} - z\dot{y} \\ z\dot{x} - x\dot{z} \\ x\dot{y} - y\dot{x} \end{pmatrix} m. \quad (6.105)$$

Es liegt nahe, dann auch die einzelnen Komponenten des Drehimpulsvektors (6.105) mit Hilfe von (6.89)–(6.91) in Kugelkoordinaten auszudrücken:

$$L_x = mr^2 \left( -\dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \right), \quad (6.106)$$

$$L_y = mr^2 \left( \dot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \right), \quad (6.107)$$

$$L_z = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta. \quad (6.108)$$

Für das Quadrat des Drehimpulsvektors erhalten wir dann aufgrund von (6.94), (6.95) sowie (6.106)–(6.108) in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = m^2 r^4 \left( \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}. \quad (6.109)$$

Aus den Transformationsgleichungen (6.75) folgt für die generalisierte Koordinate  $\varphi$  unter Beachtung von (6.100), (6.101) sowie (6.95), (6.108)

$$p_\varphi = \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \tilde{F}_{2\varphi}(\varphi)}{\partial \varphi} = C_\varphi \quad \Longrightarrow \quad C_\varphi = p_\varphi = L_z. \quad (6.110)$$

Entsprechend erhalten wir für die generalisierte Koordinate  $\vartheta$  aus (6.75), (6.100), (6.103), (6.110)

$$p_\vartheta^2 = \left( \frac{\partial \tilde{F}_2(r, \vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right)^2 = \left( \frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 = C_\vartheta^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = C_\vartheta^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad (6.111)$$

was sich aufgrund von (6.109) reduziert auf

$$C_\vartheta^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} = \mathbf{L}^2. \quad (6.112)$$

Demnach entspricht die Integrationskonstante  $C_\varphi$  gerade der  $z$ -Komponente des Drehimpulses  $\mathbf{L}$  und die Integrationskonstante  $C_\vartheta$  dem Betrag des Drehimpulsvektors  $\mathbf{L}$ .

Wir berechnen nun die einzelnen Wirkungsvariablen

$$J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi, \quad (6.113)$$

$$J_\vartheta = \oint p_\vartheta d\vartheta, \quad (6.114)$$

$$J_r = \oint p_r dr. \quad (6.115)$$

Die Wirkungsvariable  $J_\varphi$  ergibt sich unmittelbar aus (6.75), (6.100), (6.101) und (6.113):

$$J_\varphi = 2\pi C_\varphi. \quad (6.116)$$

Bei der Berechnung der Wirkungsvariable  $J_\vartheta$  ist zu beachten, dass der entsprechende Impuls gemäß (6.75), (6.100), (6.103)

$$P_\vartheta = \frac{\partial \tilde{F}_{2\vartheta}(\vartheta)}{\partial \vartheta} = \pm \sqrt{C_\vartheta^2 - \frac{C_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}} \quad (6.117)$$

reell sein muss. Es gilt demnach

$$\sin^2 \vartheta \geq \frac{1}{c^2}, \quad c = \frac{C_\vartheta}{C_\varphi}, \quad (6.118)$$

so dass es Umkehrpunkte  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  gibt mit

$$\vartheta_1 = \arcsin \frac{1}{c}, \quad \vartheta_2 = \pi - \vartheta_1, \quad (6.119)$$

siehe Abb. 6.3. Wertet man das Umlaufintegral (6.114) aus, so muss man in (6.117) für das Integral von  $\vartheta_1$  nach  $\vartheta_2$  das positive und für das Integral von  $\vartheta_2$  nach  $\vartheta_1$  das negative Vorzeichen verwenden. Deshalb ist nach (6.114), (6.117)-(6.119) zu berechnen

$$J_\vartheta = 2C_\varphi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta. \quad (6.120)$$

Die Stammfunktion des in (6.120) auftretenden Integrals lautet

$$\int \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{\cos \vartheta} + c \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{c \cos \vartheta}, \quad (6.121)$$

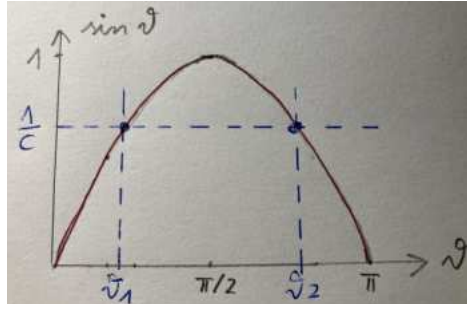


Abbildung 6.3: Illustration der Umkehrpunkte  $\vartheta_{1,2}$  von (6.119).

wie man durch explizites Differenzieren nachweisen kann. Bei der Integration von  $\vartheta_1 < \pi/2$  nach  $\vartheta_2 > \pi/2$  in (6.120) werden die Argumente der arctan- und der arccot-Funktion in (6.121) an der Stelle  $\vartheta = \pi/2$  singularär. Deshalb ist das Integral in (6.120) von  $\vartheta_1$  nach  $\vartheta_2$  in die beiden Integrale von  $\vartheta_1$  nach  $\pi/2$  und von  $\pi/2$  nach  $\vartheta_2$  aufzuspalten

$$J_\vartheta = 2C_\varphi \left( \int_{\vartheta_1}^{\pi/2} \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \int_{\pi/2}^{\vartheta_2} \sqrt{c^2 - \frac{1}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta \right) \quad (6.122)$$

und dann mit Hilfe von (6.121) auszuwerten.

$$J_\vartheta = 2C_\varphi \left\{ \left[ \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{\cos \vartheta} + c \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{c \cos \vartheta} \right]_{\vartheta_1}^{\pi/2} \right. \quad (6.123)$$

$$\left. + \left[ \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{\cos \vartheta} + c \operatorname{arctan} \frac{\sqrt{c^2 \sin^2 \vartheta - 1}}{c \cos \vartheta} \right]_{\pi/2}^{\vartheta_2} \right\}. \quad (6.124)$$

Wertet man als Integrationsgrenzen die beiden Umkehrpunkte  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  aus, so ergeben sich aufgrund von (6.119) keine Beiträge. An der Integrationsgrenze  $\pi/2$  erhält man wegen der Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctan} x = +\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctan} x = -\frac{\pi}{2}, \quad (6.125)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = -\pi \quad (6.126)$$

sowie (6.118) das Ergebnis

$$J_\vartheta = 2\pi C_\varphi (-1 + c) = 2\pi (C_\vartheta - C_\varphi). \quad (6.127)$$

Wir bemerken, daß für die Berechnung der Wirkungsvariablen  $J_\varphi$  und  $J_\vartheta$  nicht die konkrete Form des Kepler-Potentials eingegangen ist. Die Resultate (6.116) und (6.127) gelten deshalb für jedes zentralsymmetrische Potential, bei dem die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung durch Separation der Variablen gelöst werden kann.

Bei der Berechnung der Wirkungsvariable  $J_r$  in (6.115) mit Hilfe von (6.75), (6.100), (6.104) ist ebenfalls zu beachten, dass der Impuls

$$p_r = \frac{\partial \tilde{F}_{2r}(r)}{\partial r} = \pm \sqrt{2m[E - V_{\text{eff}}(r)]} \quad (6.128)$$

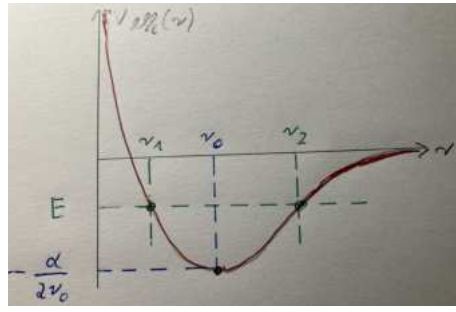


Abbildung 6.4: Effektives Potential (6.129) mit Minimum (6.130), (6.131) und Umkehrpunkten (6.132).

sowohl positiv als auch negativ sein kann. Das in (6.128) eingeführte effektive Potential lautet aufgrund von (6.116), (6.127)

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{C_{\vartheta}^2}{2mr^2} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2}{8\pi^2mr^2}, \quad (6.129)$$

siehe Abb. 6.4. Das effektive Potential (6.129) besitzt ein Minimum bei  $r_0$  mit

$$V'_{\text{eff}}(r_0) = \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2}{4\pi^2mr_0^3} = 0 \quad \implies \quad r_0 = \frac{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2}{4\pi^2m\alpha} \quad (6.130)$$

und nimmt dort unter Berücksichtigung von (6.129), (6.130) den Wert

$$V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{\alpha}{2r_0} \quad (6.131)$$

an. Für gebundene Zustände können wir  $E < 0$  voraussetzen, so daß eine periodische Bewegung vorliegt. Die Umkehrpunkte  $r_1$  und  $r_2$  dieser periodischen Bewegung ergeben sich als die Nullstellen des Radikanten in (6.128), so dass aus 6.129 folgt

$$E = V_{\text{eff}}(r_{1,2}) \quad \implies \quad E + \frac{\alpha}{r_{1,2}} - \frac{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2}{8\pi^2mr_{1,2}^2} = 0. \quad (6.132)$$

Wertet man das Umlaufintegral (6.115) aus, so muss man in (6.128) für das Integral von  $r_1$  nach  $r_2$  das positive und für das Integral von  $r_2$  nach  $r_1$  das negative Vorzeichen verwenden. Deshalb ist nach (6.115), (6.128) und (6.129) zu berechnen

$$J_r = 2\sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{Er^2 + \alpha r - \frac{(J_{\varphi} + J_{\vartheta})^2}{8\pi^2m}} \frac{dr}{r}. \quad (6.133)$$

Aus den Formeln (2.261), (2.266) und (2.267.1) der Integraltafel von Gradshteyn und Ryzhik lesen wir ab

$$\int \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x} dx = \sqrt{a + bx + cx^2} - \sqrt{-a} \arcsin \frac{2a + bx}{x\sqrt{b^2 - 4ac}} - \frac{b}{2\sqrt{-c}} \arcsin \frac{2cx + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad a < 0, c < 0, b^2 - 4ac > 0. \quad (6.134)$$

	$\alpha$	$\beta$
$xy \geq 0$ oder $x^2 + y^2 \leq 1$	0	1
$x > 0, y < 0$ und $x^2 + y^2 > 1$	$\pi$	-1
$x < 0, y > 0$ und $x^2 + y^2 > 1$	$-\pi$	-1

Abbildung 6.5: Wertet man (6.138) aus, so sind die hier zusammengefassten Fallunterscheidungen zu beachten.

Mit den Identifikationen

$$a = -\frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m} < 0, \quad b = \alpha, \quad c = E < 0, \quad b^2 - 4ac = \alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m} > 0 \quad (6.135)$$

erhalten wir aus (6.133) und (6.134)

$$J_r = 2\sqrt{2m} \left[ \sqrt{Er^2 + \alpha r - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{8\pi^2 m}} - \frac{J_\varphi + J_\vartheta}{2\pi\sqrt{2m}} \arcsin \frac{\alpha r - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} - \frac{\alpha}{2\sqrt{-E}} \arcsin \frac{2Er + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (6.136)$$

Die Auswertung von (6.136) unter Berücksichtigung von (6.132) führt auf

$$J_r = -2\sqrt{2m} \left\{ \frac{J_\varphi + J_\vartheta}{2\pi\sqrt{2m}} \left( \arcsin \frac{\alpha r_2 - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_2\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} - \arcsin \frac{\alpha r_1 - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_1\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} \right) - \frac{\alpha}{2\sqrt{-E}} \left( \arcsin \frac{2Er_2 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} - \arcsin \frac{2Er_1 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} \right) \right\}. \quad (6.137)$$

Die Differenzen zweier arcsin-Funktionen berechnen sich gemäß

$$\arcsin x - \arcsin y = \alpha + \beta \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} \right), \quad (6.138)$$

wobei für die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  die Fallunterscheidungen von Abb. 6.5 gelten. Für die erste Differenz in (6.137) gilt

$$x = \frac{\alpha r_2 - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_2\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}}, \quad y = \frac{\alpha r_1 - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m}}{r_1\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}} \quad (6.139)$$

und wir erhalten mit Hilfe von (6.132)

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}} \left\{ \left[ \alpha - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m r_2} \right]^2 + \left[ \alpha - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m r_1} \right]^2 \right\} = 2, \quad (6.140)$$

wobei aufgrund von (6.130) die Ungleichungen

$$\alpha r_{1,2} - \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2}{4\pi^2 m} = \alpha(r_{1,2} - r_0) \begin{cases} < 0 & \text{für } r_1 \\ > 0 & \text{für } r_2 \end{cases} \quad (6.141)$$

vorliegen. Für die zweite Differenz in (6.137) gilt entsprechend

$$x = \frac{2Er_2 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}}, \quad y = \frac{2Er_1 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}}}, \quad (6.142)$$

so dass wir wegen (6.132)

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \frac{(J_\varphi + J_\vartheta)^2 E}{2\pi^2 m}} \left[ (2Er_2 + \alpha)^2 + (2Er_1 + \alpha)^2 \right] = 2 \quad (6.143)$$

erhalten, wobei gemäß (6.130), (6.132) die Ungleichungen

$$2Er_{1,2} + \alpha = \alpha \left( \frac{r_0}{r_{1,2}} - 1 \right) \begin{cases} > 0 & \text{für } r_1 \\ < 0 & \text{für } r_2 \end{cases} \quad (6.144)$$

gelten. Aus (6.137)-(6.144) folgt nach einigen Umformungen und unter Berücksichtigung von (6.132)

$$J_r = -(J_\varphi + J_\vartheta) + \pi\alpha \sqrt{\frac{2m}{-E}}. \quad (6.145)$$

Die neue Hamilton-Funktion  $\tilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r)$  kann mit der Energie  $E$  identifiziert werden kann und es folgt aus (6.145)

$$\tilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r) = -\frac{2\pi^2 m \alpha^2}{(J_\varphi + J_\vartheta + J_r)^2}. \quad (6.146)$$

Da die drei Wirkungsvariablen  $J_\varphi$ ,  $J_\vartheta$  und  $J_r$  gleichberechtigt in der neuen Hamilton-Funktion (6.146) auftreten, sind die aus (6.75) folgenden drei Frequenzen

$$\nu_\varphi = \frac{\partial \tilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r)}{\partial J_\varphi}, \quad \nu_\vartheta = \frac{\partial \tilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r)}{\partial J_\vartheta}, \quad \nu_r = \frac{\partial \tilde{H}(J_\varphi, J_\vartheta, J_r)}{\partial J_r} \quad (6.147)$$

der periodischen Bewegung gleich

$$\nu = \nu_\varphi = \nu_\vartheta = \nu_r = \frac{4\pi^2 m \alpha}{(J_\varphi + J_\vartheta + J_r)^3}. \quad (6.148)$$

Man spricht deshalb auch davon, da diese Bewegung entartet ist. Für die entsprechende Periodendauer erhalten wir nach (6.145), (6.148)

$$T = \frac{1}{\nu} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}. \quad (6.149)$$

Berücksichtigt man, dass die große Halbachse der Kepler-Ellipse gegeben ist durch

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (6.150)$$

so folgt aus (6.149) mit Hilfe von (6.87) und (6.88) das dritte Keplersche Gesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (6.151)$$