

Und Gott sprach

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

...und es ward Licht

## Elektrodynamik-Vorlesung im Modul G2

### 1. Mathematische Grundlagen

- (a) Vektoranalysis: Gradient, Divergenz, Rotation
- (b) Integralsätze: Gauß, Stokes

### 2. Elektrostatik

- (a) Fluß und Zirkulation der elektrischen Feldstärke
- (b) Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik
- (c) Skalares Potential: Poisson-Gleichung, Greensche Funktion

### 3. Magnetostatik

- (a) Fluß und Zirkulation der magnetischen Feldstärke
- (b) Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik
- (c) Vektorpotential: Biot-Savart-Gesetz

### 4. Maxwell-Gleichungen

- (a) Helmholtzscher Vektorzerlegungssatz
- (b) Phänomenologie
- (c) Mathematische Formulierung

### 5. Elektrodynamische Wellen im Vakuum

- (a) Wellengleichung
- (b) Allgemeine Lösung
- (c) Monochromatische ebene Welle

### 6. Retardierte Potentiale

- (a) Kontinuitätsgleichung
- (b) Eichtransformation: Lorentz-Eichung
- (c) Greensche Funktion der Wellengleichung

## 7. Hertzscher Dipol

- (a) Fernfeld
- (b) Strahlungsleistung

## 8. Elektrodynamik in Materie

- (a) Maxwell-Gleichungen in Materie
- (b) Materialgleichungen
- (c) Grenzflächen

## 9. Elektromagnetische Wellen in Materie

- (a) Telegraphengleichung
- (b) Reflexion und Brechung
- (c) Brewster-Winkel
- (d) Totalreflexion

## 10. Interferenz und Beugung

- (a) Huygensche Elementarwellen
- (b) Doppelspalt
- (c) Gitter

## Empfohlene Literatur:

- M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan, A. Wipf, *Theoretische Physik, Teil II: Elektrodynamik*, Springer (2018)
- T. Fließbach, *Elektrodynamik*, Springer (2012)
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*, Springer (2013)

## Weiterführende Literatur:

- W. Greiner, *Theoretische Physik Bd. 3: Theoretische Elektrodynamik*, Harri Deutsch (2008)
- C. Witte, M. Diestelhorst, J.D. Jackson, und K. Müller, *Klassische Elektrodynamik*, De Gruyter (2013)

## Spezieller Hinweis:

Kurzfrist hinzugefügtes online-Angebot im Wahl- und Wahlpflichtbereich Physik laut KIS: **Theoretische Elektrodynamik und Spezielle Relativitätstheorie** im Umfang von 4 SWS von Michael Fleischhauer.

# 1. Mathematische Grundlagen:

Wir entwickeln zunächst die mathematischen Grundlagen, die für die Formulierung der Elektrodynamik notwendig sind. Hierzu beginnen wir mit der Vektoranalysis und erläutern die Definitionen der drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation. Darauf aufbauend diskutieren wir dann die Integralformeln von Gauß und Stokes.

## 1.1 Anschauliche Definitionen:

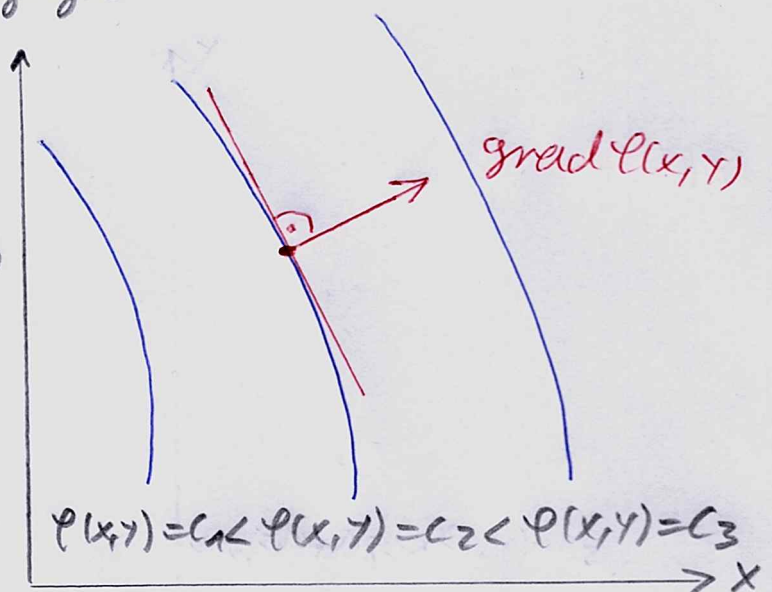
Wir betrachten ein beliebiges Skalarfeld  $\varphi(\vec{r})$  und ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$ . Für die im folgenden untersuchten partiellen Ortsableitungen spielt eine eventuelle zusätzliche Zeitabhängigkeit dieser Felder keine Rolle, so dass diese in der Notation unterdrückt wird.

### 1.1.1 Gradient:

Der Gradient eines Skalarfeldes  $\varphi(\vec{r})$  wird mit  $\text{grad} \varphi(\vec{r})$  bezeichnet. Eine infinitesimale Änderung des Skalarfeldes  $d\varphi(\vec{r})$  ist durch das Skalarprodukt des Vektorfeldes  $\text{grad} \varphi(\vec{r})$  mit einem infinitesimalen Ortsvektor  $d\vec{r}$  gegeben:

$$d\varphi(\vec{r}) = \text{grad} \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.1)$$

Der Vektor  $\text{grad} \varphi(\vec{r})$  steht senkrecht auf den Flächen  $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$ . Er zeigt in Richtung des stärksten Anstieges und sein Betrag ist proportional zu diesem Anstieg.

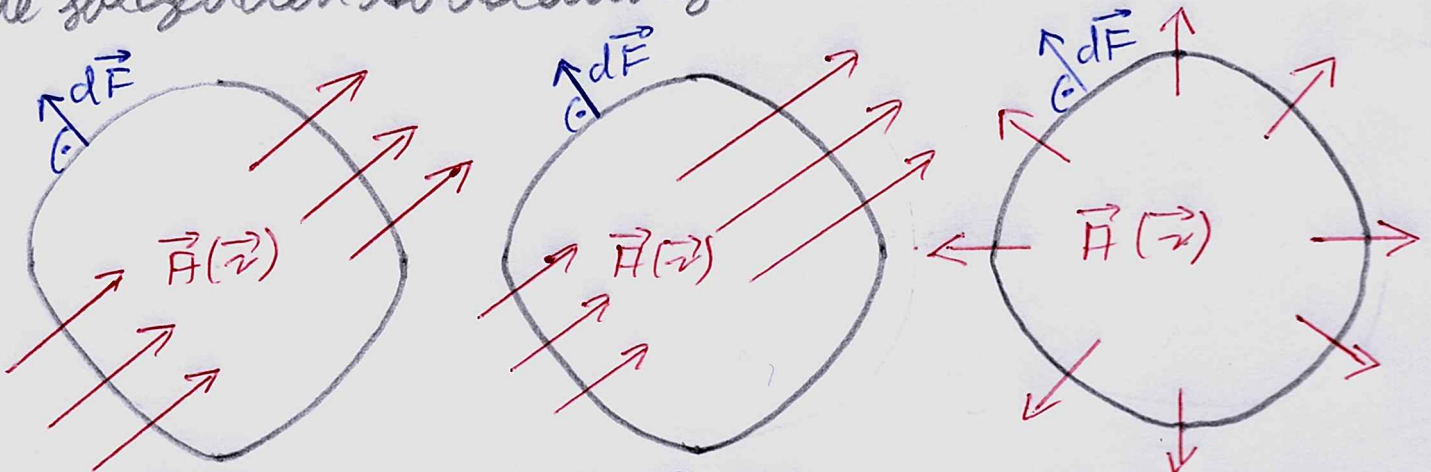


### 1.1.2 Divergenz:

Die Divergenz eines Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  wird mit  $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$  bezeichnet. Zur Definition des Skalarfeldes  $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$  wird der Fluss  $\oint_{\Delta F} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$  des Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  durch die Oberfläche  $\Delta F$  eines Volumens  $\Delta V$  auf das Volumen  $\Delta V$  bezogen:

$$\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.2)$$

Man bezeichnet  $\oint_{\Delta F} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$  auch als die Quellstärke und  $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$  als die Quelldichte des Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$ . Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch die folgenden Abbildungen:



a)  $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) = 0$       b)  $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) > 0$       c)  $\text{div } \vec{F}(\vec{r}) \gg 0$

a) Wenn  $\vec{F}(\vec{r})$  im Bereich des Volumens konstant ist, verschwindet die Divergenz  $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$ . b) Nimmt  $\vec{F}(\vec{r})$  dagegen innerhalb des Volumens zu, so ist  $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$  positiv. c) Die Divergenz wird maximal, wenn das Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  immer parallel zum Flächenvektor  $d\vec{F}$  ist.

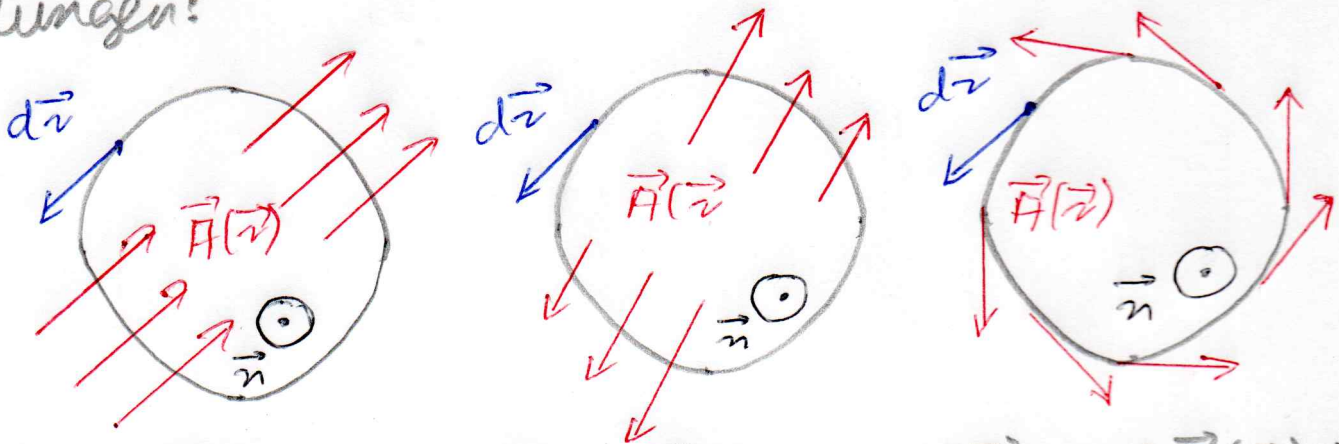
### 1.1.3 Rotation:

Die Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  wird mit  $\text{rot } \vec{F}(\vec{r})$  bezeichnet. Die Komponente des Vektorfeldes  $\text{rot } \vec{F}(\vec{r})$  in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors  $\vec{n}$  wird folgendermaßen definiert. Wir betrachten ein Flächenelement  $\Delta F$  parallel zu  $\vec{n}$  am Orte  $\vec{r}$  und beziehen die Zirkulation  $\oint_{\Delta C} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  entlang

des Randes  $\Delta C$  des Flächenelementes  $\Delta F$  auf das Flächenelement  $\Delta F$ :

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta F} \quad (1.3)$$

Man bezeichnet  $\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  auch als die Wirbelstärke und  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$  als die Wirbeldichte des Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$  in Richtung von  $\vec{n}$ . Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch die folgenden Abbildungen:



a)  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = 0$     b)  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) > 0$     c)  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) < 0$

a) Wenn  $\vec{A}(\vec{r})$  im Bereich des Flächenelementes konstant ist, verschwindet die Rotation. b) Nimmt  $\vec{A}(\vec{r})$  wie gezeigt zu, ist  $\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$  positiv. c) Die Rotation wird maximal, wenn das Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  immer parallel zum Element  $d\vec{r}$  ist.

## 1.2 Charakteristische Koordinaten:

Die Definitionen (1.1) – (1.3) verdeutlichen die Bedeutung der drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation für physikalische Felder. Außerdem sind sie von der Koordinatenwahl unabhängig, d.h. aus ihnen können die Differentialoperatoren in beliebigen Koordinaten wie z.B. in Kugelkoordinaten oder in charakteristischen Koordinaten abgeleitet werden.

### 1.2.1 Gradient:

Wir wenden nun (1.1) in charakteristischen Koordinaten an. Für die linke Seite erhalten wir:

$$d\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} dz \quad (1.4)$$

entsprechend geht die rechte Seite über in

$$d\varphi(\vec{r}) = (\text{grad } \varphi(\vec{r}))_x dx + (\text{grad } \varphi(\vec{r}))_y dy + (\text{grad } \varphi(\vec{r}))_z dz \quad (1.5)$$

Der Vergleich von (1.4) und (1.5) führt auf

$$\text{grad } \varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Demnach sind die Komponenten des Vektorfeldes  $\text{grad } \varphi(\vec{r})$  gerade die ersten partiellen Ableitungen des Skalarfeldes  $\varphi(\vec{r})$ . Mit Hilfe des Nabla-Operators

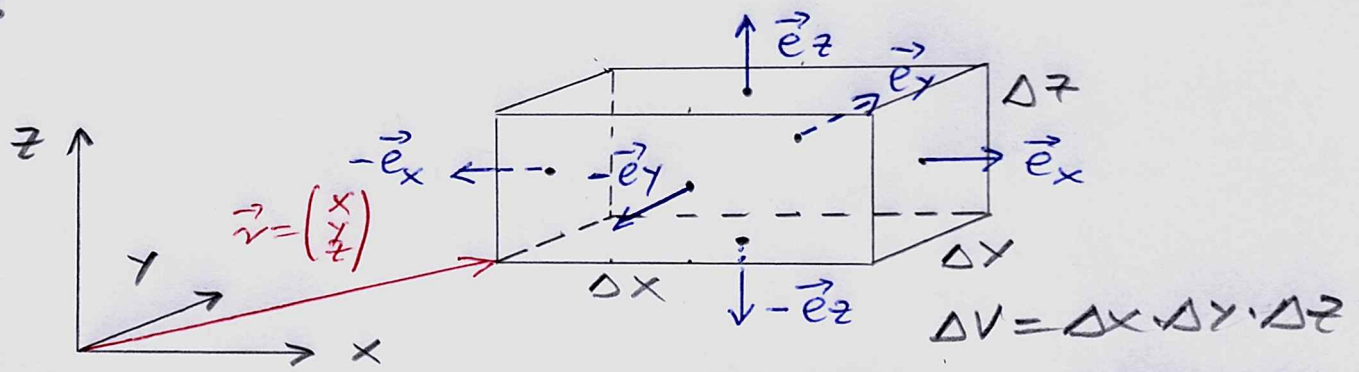
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

erhalten wir

$$\text{grad } \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}). \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Divergenz:

Zur Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten wählen wir (1.2) für einen infinitesimalen Quader mit achsenparallelen Kanten aus:



Wir nehmen an, dass eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes  $\vec{F}(\vec{r})$  außerhalb des Quaders liegen. Der Fluss  $\oint_{\partial V} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$  setzt sich insgesamt aus sechs Summanden zusammen:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_y^{y+\Delta y} dy' \int_z^{z+\Delta z} dz' \left\{ \vec{A}(x+\Delta x, y', z') \cdot \vec{e}_x + \vec{A}(x, y', z') \cdot (-\vec{e}_x) \right\} + 4 \text{ weitere Terme} \quad (1.9)$$

Es sollen nun  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  so klein gewählt werden, dass sich das Vektorfeld im Inneren des Quaders nur schwach ändert:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \approx \int_y^{y+\Delta y} dy' \int_z^{z+\Delta z} dz' \left\{ A_x(x, y, z) + \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x - A_x(x, y, z) \right\} + \text{weitere Terme}$$

$$\approx \left\{ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \right\} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.10)$$

Mit dem Volumenelement  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  folgt aus (1.2) und (1.10) die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$ :

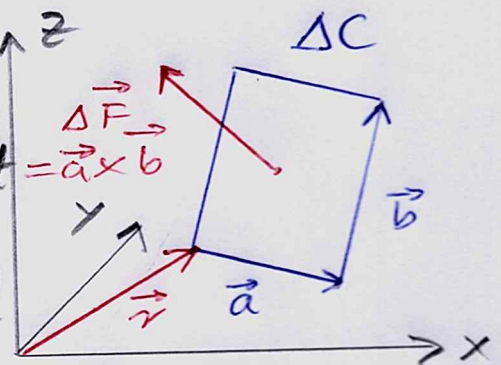
$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \quad (1.11)$$

Mit Hilfe des Divergenz-Operators, in (1.7) geht (1.11) über in

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.12)$$

### 1.2.3 Rotation:

Wir betrachten ein Parallelogramm im Raum mit den Leitervektoren  $\vec{a}, \vec{b}$ , das den Punkt  $\vec{r}$  als Eckpunkt enthält und setzen  $\Delta \vec{F} = \vec{a} \times \vec{b}$ . Es bezeichnet  $\Delta C$  den orientierten Rand des Parallelogramms, wobei der Umlaufsinn von  $\Delta C$  mit  $\Delta \vec{F}$  eine Rechtsschraube ist. Das bedeutet, dass das Parallelogramm entlang von  $\Delta C$  immer links liegt.



Wir nehmen an, dass eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes  $\vec{A}(\vec{r})$  außerhalb des Parallelogramms liegen. Um die Zirkulation  $\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$  zu berechnen, wird der Integrationsweg wie folgt parametrisiert:

von  $\vec{r}$  nach  $\vec{r} + \vec{a}$ :  $\vec{r}(s) = \vec{r} + s\vec{a}, 0 \leq s \leq 1$

von  $\vec{r} + \vec{a}$  nach  $\vec{r} + \vec{a} + \vec{b}$ :  $\vec{r}(t) = \vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}, 0 \leq t \leq 1$

von  $\vec{r} + \vec{a} + \vec{b}$  nach  $\vec{r} + \vec{b}$ :  $\vec{r}(s) = \vec{r} + (1-s)\vec{a} + \vec{b}$ ,  $0 \leq s \leq 1$

von  $\vec{r} + \vec{b}$  nach  $\vec{b}$ :  $\vec{r}(t) = \vec{r} + (1-t)\vec{b}$ ,  $0 \leq t \leq 1$

Daraus ergibt sich für die Zirkulation:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 ds \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a}) \cdot \vec{a} + \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &+ \int_0^1 ds \vec{A}(\vec{r} + (1-s)\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a}) + \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + (1-t)\vec{b}) \cdot (-\vec{b}) \\ &= \int_0^1 dt \{ \vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \} \cdot \vec{b} \\ &- \int_0^1 ds \{ \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a} + \vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a}) \} \cdot \vec{a} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Für ein Skalarfeld  $\varphi(\vec{r})$  gilt für kleine  $d\vec{r}$ :

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \stackrel{(1.1)}{\approx} \text{grad } \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \stackrel{(1.8)}{=} (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \varphi(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Elementarwiegend erhalten wir bei einem Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  für kleine  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \approx (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \quad (1.15)$$

$$\vec{A}(\vec{r} + s\vec{a} + \vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a}) \approx (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a}) \quad (1.16)$$

Das hat für die Zirkulation (1.13) zur Folge

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 dt (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b})] - \int_0^1 ds (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r} + s\vec{a})] \\ &\approx (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) [\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r})] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Als Nebenrechnung betrachten wir die folgenden Vektoridentitäten. Zunächst wenden wir die zyklische Vertauschbarkeit beim Spatprodukt an

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (1.18)$$

und erhalten

$$[\vec{B} \times \vec{A}(\vec{r})] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \{ \vec{b} \times [\vec{B} \times \vec{A}(\vec{r})] \} \quad (1.19)$$

Ausschließend wenden wir die "BAC-CAB"-Regel für das doppelte Vektorprodukt an

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (1.20)$$

auf (1.19) an:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{B} \times \vec{A}(\vec{r})] &= \vec{a} \cdot \{ \vec{B} [\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\vec{b} \cdot \vec{B}) \vec{A}(\vec{r}) \} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{B}) [\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\vec{b} \cdot \vec{B}) [\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r})] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Aus (1.17) und (1.21) folgt dann mit  $\vec{\Delta F} = \vec{a} \times \vec{b}$  für die Zirkulation:

$$\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\Delta F} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] \quad (1.22)$$

Aufgrund der Zerlegung  $\vec{\Delta F} = \vec{n} \cdot \Delta F$  führt der Vergleich von (1.3) und (1.22) auf

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{n} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] \quad (1.23)$$

Wegen der Beliebigkeit des Normalenvektors  $\vec{n}$  lässt sich auch die Rotation des Vektorfeldes durch den Nabla-Operator ausdrücken:

$$\text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (1.24)$$

Einsetzen von (1.7) in (1.24) ergibt die Komponenten

$$\text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(\vec{r}) & A_y(\vec{r}) & A_z(\vec{r}) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

### 1.3 Integralsätze:

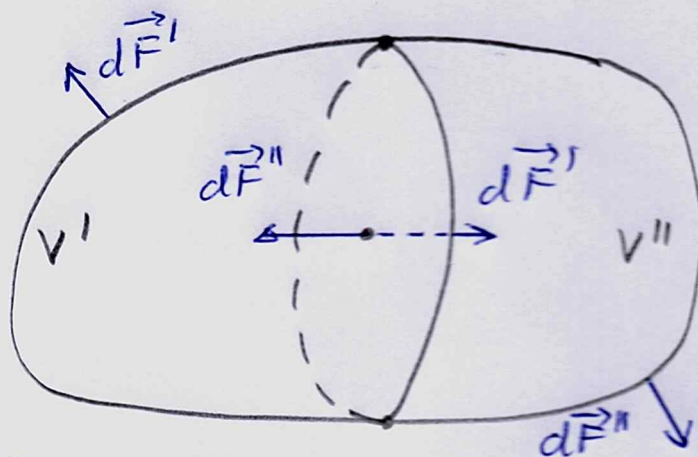
Aus den Definitionen der Divergenz in (1.2) und der Rotation in (1.3) lassen sich die Integralsätze von Gauß und Stokes ableiten.

#### 1.3.1 Integralsatz von Gauß:

Gegeben sei ein Volumen  $V$  mit einer geschlossenen Fläche  $F$ . Hierbei sollen die Flächenelemente  $d\vec{F}$  nach außen zeigen. Außerdem sei ein Vektorfeld  $\vec{A}(\vec{r})$  gegeben, bei dem eventuelle Singularitäten außerhalb von  $V$  liegen sollen. Man berechne den Fluss  $\Phi$  von  $\vec{A}(\vec{r})$  durch  $F$ :

$$\Phi = \oint_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.26)$$

Man zerlegt  $V$  durch eine Trennfläche in zwei Teilmolumina  $V'$  und  $V''$ . Es gilt dann:



$$\Phi = \oint_{F'} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{F}' + \oint_{F''} \vec{F}(\vec{r}'') \cdot d\vec{F}'' \quad (1.27)$$

da für jedes Flächenelement der gemeinsamen Trennfläche gilt

$$\vec{F}(\vec{r}') = -\vec{F}(\vec{r}''), \quad d\vec{F}' = -d\vec{F}'' \quad (1.28)$$

dennach kompensieren sich die zusätzlichen Beiträge der Trennflächen gerade gegenseitig.

Durch weitere Schnittflächen parzelliere man das Volumen  $V$  in Volumenelemente  $\Delta V_i$  mit  $i=1, \dots, n$ . Alle Beiträge zum Fluss von inneren Oberflächen heben sich dann analog zu (1.28) gegenseitig auf:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \oint_{F_i} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.29)$$

Für eine hinreichend kleine Parzellierung folgt dann mit  $\vec{r}_i \in V_i$  aus (1.2):

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^n \text{div } \vec{F}(\vec{r}_i) \Delta V_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_V \text{div } \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (1.30)$$

Aus (1.26) und (1.30) erhalten wir insgesamt den Satz von Gauß:

$$\oint_F \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_V \text{div } \vec{F}(\vec{r}) dV \quad (1.31)$$

Als Anwendung betrachten wir das Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a} f(\vec{r})$ , sodass (1.31) übergeht in

$$\vec{a} \cdot \oint_F f(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_V \text{grad } f(\vec{r}) dV \quad (1.32)$$

Da (1.32) für jeden beliebigen Vektor  $\vec{a}$  gilt, folgt die Identität

$$\oint_F f(\vec{r}) d\vec{F} = \int_V \text{grad } f(\vec{r}) dV \quad (1.33)$$

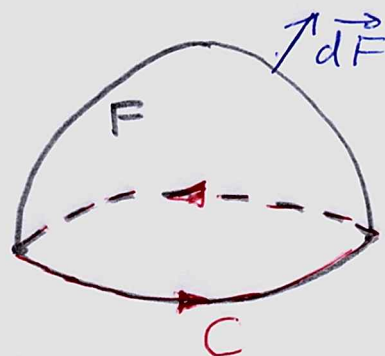
Spezialisiert man (1.33) für die Funktion  $f(\vec{r})=1$ , so folgt hieraus

$$\oint_F d\vec{F} = \vec{0} \quad (1.34)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Oberfläche  $F$  die Summe aller Oberflächenvektoren  $d\vec{F}$  den Nullvektor ergibt.

### 1.3.2 Integralsatz von Stokes:

Gegeben sei eine orientierte Fläche  $F$  im Raum mit einem geschlossenen orientierten Rand  $C$ . Dabei werden die Orientierungen von  $F$  und  $C$  nach der Rechts-schraubenregel gewählt. Außerdem sei ein Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  gegeben, dessen Singularitäten außerhalb von  $F$  liegen sollen. Man berechne die Zirkulation von  $\vec{F}(\vec{r})$  entlang des Randes  $C$ :

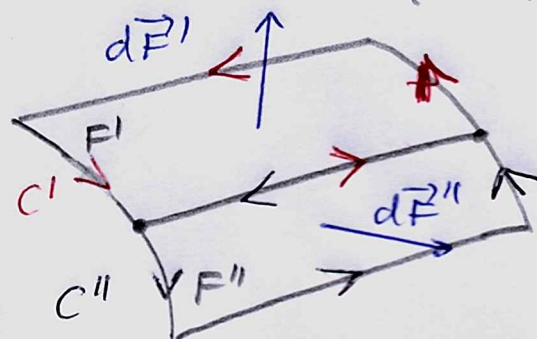


Man zerlege  $F$  durch eine Trennlinie in zwei Teilflächen  $F'$  und  $F''$ . Es folgt dann für die Zirkulation

$$Z = \oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.35)$$

denn für jedes Linienelement der gemeinsamen Trennlinie gilt

$$Z = \oint_{C'} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \oint_{C''} \vec{F}(\vec{r}'') \cdot d\vec{r}'' \quad (1.36)$$



so dass sich die beiden zusätzlichen Beiträge der Trennlinie genau gegenseitig kompensieren.

$$\vec{F}(\vec{r}') = \vec{F}(\vec{r}''), \quad d\vec{r}' = -d\vec{r}'' \quad (1.37)$$

Durch weitere Linien parallele man  $F$  in Flächenelemente  $\Delta F_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ . In der Summe

$$Z = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.38)$$

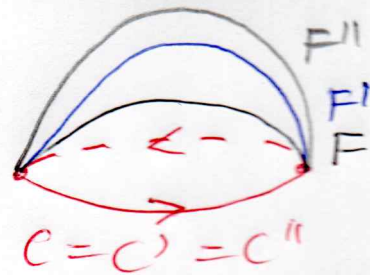
heben sich dann alle Beiträge von inneren Rändern analog zu (1.37) gegenseitig weg. Bei hinreichend kleiner Parallelierung folgt mit  $\vec{r}_i \in \Delta F_i$  aus (1.3)

$$Z \approx \sum_{i=1}^n \Delta F_i \cdot \text{rot } \vec{F}(\vec{r}_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_F \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.39)$$

Aus (1.35) und (1.39) lesen wir dann den Satz von Stokes ab:

$$\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (1.40)$$

Man beachte dabei, dass es mehrere Flächen  $F, F', F'', \dots$  mit ein- und demselben Rand  $C, C', C'' = \dots$  gibt.



Auch hier betrachten wir als Anwendung das Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a} f(\vec{r})$ , sodass (1.40) übergeht in

$$\vec{a} \cdot \oint_C f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F [\text{grad} f(\vec{r}) \times \vec{a}] \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_F d\vec{F} \times \text{grad} f(\vec{r}) \quad (1.41)$$

Da (1.41) für jeden konstanten Vektor  $\vec{a}$  gilt, folgt

$$\oint_C f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F d\vec{F} \times \text{grad} f(\vec{r}) \quad (1.42)$$

Spezialisiert man (1.42) für die Funktion  $f(\vec{r}) = 1$ , so folgt die Aussage

$$\oint_C d\vec{r} = \vec{0} \quad (1.43)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Kurve die Summe aller Tangentialvektoren  $d\vec{r}$  den Nullvektor ergibt.

### 1.3.3 Weitere Anwendung:

Zum Schluss betrachten wir noch eine weitere nützliche Anwendung des Satzes von Gauß. Hierzu spezialisieren wir uns auf das Vektorfeld  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}$ , für das gilt

$$\text{div} [\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a}(\vec{r}) \quad (1.44)$$

Damit erhalten wir für den Satz von Gauß (1.31):

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}] dV &= \vec{b} \cdot \int_V \text{rot} \vec{a}(\vec{r}) dV \\ &= \oint_F d\vec{F} \cdot [\vec{a}(\vec{r}) \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \oint_F d\vec{F} \times \vec{a}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Da (1.45) für jeden konstanten Vektor  $\vec{b}$  gilt, folgt

$$\int_V \text{rot} \vec{a}(\vec{r}) dV = \oint_F d\vec{F} \times \vec{a}(\vec{r}) \quad (1.46)$$

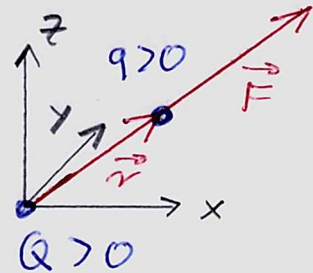
Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir die Spezialfälle (1.33) und (1.46) des Satzes von Gauß benötigen.

## 2. Elektrostatik:

Mit Hilfe der in Kapitel 1 eingeführten mathematischen Grundlagen formulieren wir nun die Gesetze der Elektrostatik. Insbesondere leiten wir dabei mit den Integralsätzen von Gauss und Stokes die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik ab.

### 2.1 Fluß der elektrischen Feldstärke:

Wir betrachten die Coulomb-Kraft, die eine im Ursprung lokalisierte Ladung  $Q$  auf eine Probeladung  $q$  am Orte  $\vec{r}$  ausübt. Im SI-Einheitensystem gilt



$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.1)$$

wobei die Dielektrizitätskonstante im Vakuum gegeben ist durch

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \quad (2.2)$$

Demnach erzeugt die Ladung  $Q$  am Orte  $\vec{r}$  eine elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad (2.3)$$

die von der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.4)$$

ist. Wir berechnen nun den Fluß dieser elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  durch die Oberfläche einer Kugel  $K(R)$  mit Radius  $R$ :

$$\Phi = \oint_{K(R)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (2.5)$$

Dieses Oberflächenintegral berechnet sich in Kugelkoordinaten wie folgt:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} R^2 \cdot \frac{\vec{r}}{R} \quad (2.6)$$

Berücksichtigt man, dass auf der Kugeloberfläche  $|\vec{r}|^2 = |\vec{r}|^2 = R^2$  gilt, reduziert sich (2.6) auf

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \right) = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

Dieses Ergebnis lässt sich in der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern. Der Fluss der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  durch eine geschlossene Oberfläche  $F$  ergibt die umschlossene Ladung  $Q$  nach dem Gauß-Gesetz

$$\Phi = \oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

## 2.2 Überlegung:

Wir betrachten wieder die elektrische Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung  $Q$ . Differenziert man deren  $x$ -Komponente

$$E_x(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.9)$$

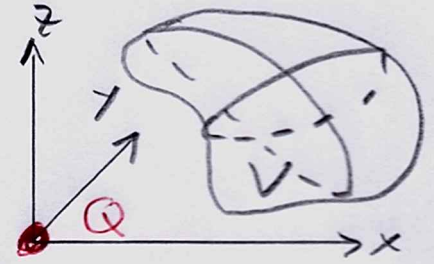
nach  $x$ , so folgt

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} \quad (2.10)$$

Deshalb erhalten wir für die Divergenz der elektrischen Feldstärke für  $\vec{r} \neq \vec{0}$ :

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r}) \stackrel{(1.11)}{=} \frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z} \\ \stackrel{(2.10)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\} = 0 \quad (2.11)$$

Wir betrachten nun ein beliebiges Volumen  $V$ , das den Ursprung nicht enthält und berechnen den Fluss der elektrischen Feldstärke (2.4) durch die Oberfläche  $F$  mit Hilfe des Satzes von Gauß



$$\oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \stackrel{(1.31)}{=} \int_V \text{div } \vec{E}(\vec{r}) dV \stackrel{(2.11)}{=} 0 \quad (2.12)$$

Dieses Ergebnis besagt, dass im Mittel gleich viele Feldlinien in das Volumen  $V$  hinein- und hinausgehen. Der Fluss der elektrischen Feldstärke (2.4) verschwindet auch gemäß dem Gauß-Gesetz (2.8), weil sich im betrachteten Volumen  $V$  keine Ladungen befinden.

### 2.3 Erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

Aus dem ersten Grundgesetz der Elektrostatik (2.8) folgt einerseits mit dem Satz von Gauß (1.31)

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) dV \quad (2.13)$$

wobei  $V$  das Volumen bezeichnet, das von der Fläche  $F$  umschlossen wird. Andererseits läßt sich die Ladung  $Q$  durch ein Volumenintegral über die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  darstellen, so dass aus (2.8) folgt

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2.14)$$

Aus dem Vergleich von (2.13) und (2.14) bzw. wie ab

$$\int_V dV \left\{ \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \right\} = 0 \quad (2.15)$$

Da diese Aussage für jedes beliebige Volumen  $V$  gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (2.16)$$

### 2.4 Zirkulation der elektrischen Feldstärke:

Wir kehren wieder zur elektrischen Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung  $Q$  zurück und berechnen deren Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve  $C$ :

$$Z = \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (2.17)$$

einsetzen von (2.4) in (2.17) führt unter Beachtung von (1.6) auf

$$Z = - \oint_C \operatorname{grad} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \cdot d\vec{r} \quad (2.18)$$

so dass aufgrund von (1.1) folgt

$$Z = - \oint_C d \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r}_A|} - \frac{1}{|\vec{r}_B|} \right) \quad (2.19)$$

Da aber die Kurve  $C$  geschlossen ist, gilt  $\vec{r}_A = \vec{r}_B$  und die Zirkulation verschwindet:

$$Z = 0 \quad (2.20)$$

Dieses Ergebnis läßt sich im Rahmen der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern.

## 2.5 Zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

Aus dem zweiten Grundgesetz der Elektrostatik (2.17), (2.20) folgt mit Hilfe des Satzes von Stokes (1.40)

$$\oint_F \text{rot } \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (2.21)$$

Da dies für jede beliebige Fläche  $F$  gilt, folgt hieraus

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (2.22)$$

Im Falle einer im Ursprung lokalisierten Punktladung  $Q$  lässt sich (2.22) auch explizit ausrechnen. Aus (1.25) und (2.4) folgt nämlich:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \Big|_{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \vec{0} \quad (2.23)$$

## 2.6 Poisson-Gleichung:

Für die elektrische Feldstärke (2.4) einer im Ursprung lokalisierten Ladung  $Q$  gilt, wie schon in (2.17), (2.18) verwendet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) \quad (2.24)$$

Aber auch für eine beliebige Ladungsverteilung lässt sich die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  immer als Gradient eines Skalarfeldes  $\varphi(\vec{r})$  darstellen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}) \quad (2.25)$$

Dies liegt an der zweiten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (2.22) und der Identität der Vektoranalysis

$$\text{rot grad } \varphi(\vec{r}) \stackrel{(1.6), (1.25)}{=} \vec{0} \quad (2.26)$$

sofern  $\varphi(\vec{r})$  zweimal stetig differenzierbar ist und der Satz von Schwarz gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x \partial z} \quad (2.27)$$

Im Falle der Elektrostatik bezeichnet man  $\varphi(\vec{r})$  als elektrostatisches Potential. Setzen wir (2.25) in die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (2.16) ein, so erhalten wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \quad (2.28)$$

Hierbei bezeichnet

$$\Delta = \text{div grad} \stackrel{(1.6), (1.11)}{\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.29)$$

den Laplace-Operator. Die Poisson-Gleichung (2.28) gibt an, wie man das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$  aus einer gegebenen Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  berechnet. Ist das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$  bekannt, so läßt sich durch den Gradienten gemäß (2.25) die entsprechende elektrische Feldstärke berechnen.

### 2.7 Poisson-Gleichung für eine Punktladung:

Im Falle einer im Ursprung lokalisierten Ladung  $Q$  lautet die Ladungsdichte

$$\rho = Q \delta(\vec{r}) \quad (2.30)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta(\vec{r})$  die Dirac'sche Deltafunktion. Sie ist durch die beiden Eigenschaften

$$(D1) \quad \delta(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{0} \quad (2.31)$$

$$(D2) \quad \int_{K(R)} \delta(\vec{r}) dV = 1 \quad (2.32)$$

für jede noch so kleine Kugel  $K(R)$  mit Radius  $R$  definiert. Offensichtlich gilt deshalb für die Ladungsdichte (2.30):

$$\int \rho(\vec{r}) dV \stackrel{(2.30), (2.32)}{=} Q \quad (2.33)$$

Einsetzen von (2.30) in (2.28) führt auf die Poisson-Gleichung für eine Punktladung:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (2.34)$$

gemäß (2.24) und (2.25) besitzt sie die Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \quad (2.35)$$

Einsetzen von (2.35) führt dann auf die Verteilungsidealgleichung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (2.36)$$

Wir wollen nun aber (2.36) auch direkt beweisen.

Es sei zunächst  $\vec{r} \neq \vec{0}$ . Dann gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (2.37)$$

so dass sich hieraus

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq \vec{0} \quad (2.38)$$

in Übereinstimmung mit (2.31) und (2.36) ergibt. Nun muss nur noch (2.32) überprüft werden. Hierzu betrachten wir das Volumenintegral

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \Delta \frac{1}{|\vec{r}|} dV \quad (2.39)$$

für eine Kugel  $K(R)$  mit Radius  $R$ . Aufgrund von (2.29) erhalten wir

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) dV \quad (2.40)$$

so daß der Satz von Gauß (1.31) angewandt werden kann:

$$I = \frac{-1}{4\pi} \oint_{O(R)} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \oint_{O(R)} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{F} \quad (2.41)$$

Hierbei bezeichnet  $O(R)$  die Oberfläche der Kugel  $K(R)$ . Die Berechnung des Oberflächenintegrals erfolgt analog zu (2.6) und ergibt

$$I = 1 \quad (2.42)$$

in Übereinstimmung mit (2.32) und (2.36).

## 2.8 Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

Wir lösen nun formal die Poisson-Gleichung (2.28) für eine beliebige Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$ . Hierzu verwenden wir die beiden Eigenschaften (2.31) und (2.32) der Diracschen Deltafunktion und erhalten zunächst

$$\varphi(\vec{r}) = \int \varphi(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \quad (2.43)$$

Mit Hilfe der Distributionsidentität (2.36) geht (2.43) über in

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int \varphi(\vec{r}') \Delta' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (2.44)$$

Aufgrund von (2.29) können wir dies nun umschreiben zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \left\{ \int dV' \vec{B}' \cdot [\varphi(\vec{r}') \vec{B}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}] - \int dV' \vec{B}' \varphi(\vec{r}') \cdot \vec{B}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\} \quad (2.45)$$

Beim ersten Volumenintegral in (2.45) läßt sich der Satz von Gauß (2.31) anwenden. Dabei ist das entsprechende Oberflächenintegral im Unendlichen auszuwerten. Da wir davon ausgehen, dass das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$  im Unendlichen schnell genug verdrwindet, verdrwindet auch das Oberflächenintegral und (2.45) reduziert sich auf

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') \cdot \vec{B}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.46)$$

Wir führen nun analog eine weitere partielle Integration durch, so dass (2.46) übergeht zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int dV' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Delta' \varphi(\vec{r}') \quad (2.47)$$

Einsetzen der Poisson-Gleichung (2.28) führt dann auf das Ergebnis

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' G(\vec{r}-\vec{r}') \rho(\vec{r}') \quad (2.48)$$

Es besagt, dass es zwischen der Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}')$  und dem elektrostatischen Potential  $\varphi(\vec{r})$  einen linearen Zusammenhang gibt. Der Integralterm in (2.48) wird als Greensche Funktion bezeichnet und ist gegeben durch

$$G(\vec{r}-\vec{r}') = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.49)$$

Das bedeutet, dass die Coulombsche Funktion dem Coulomb-Potential einer am Orte  $\vec{r}'$  sitzenden Einheitladung  $Q=1$  entspricht. Aus der Ladung (2.48), (2.49) der Poisson-Gleichung (2.28) läßt sich gemäß (2.25) die elektrische Feldstärke berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad (2.50)$$

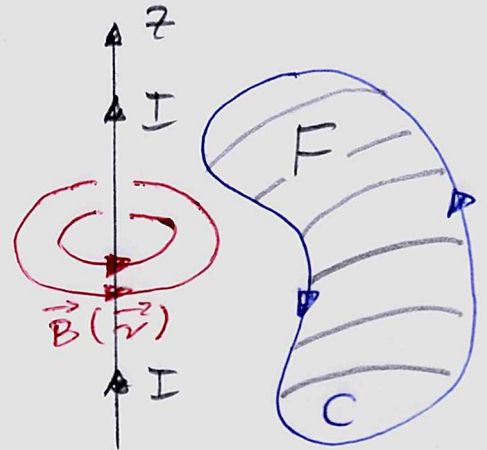
Somit sind das elektrostatische Potential  $\varphi(\vec{r})$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  einer beliebigen Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  durch (2.48) - (2.50) definiert. Damit lassen sich alle Phänomene der Elektrostatik beschreiben.

### 3. Magnetostatik:

Analog zur Formulierung der Elektrostatik in Kapitel 2 verwenden wir nun die mathematischen Grundlagen von Kapitel 1, um die Grundgesetze der Magnetostatik aufzustellen.

#### 3.1 Zirkulation der magnetischen Feldstärke:

Das Biot-Savart-Gesetz besagt, dass ein Strom  $I$  in einem geraden Draht ein magnetisches Feld erzeugt, dessen Feldlinien konzentrische Kreise um den Draht darstellen. Dabei fällt die Stärke des magnetischen Feldes umgekehrt proportional zum Abstand vom Draht ab. Im SI-Einheitensystem lautet das Biot-Savart-Gesetz



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

wobei die Permeabilitätskonstante im Vakuum gegeben ist durch

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (3.2)$$

Es sei nun  $F$  eine beliebige Fläche, die keinen Punkt der  $z$ -Achse enthält. Wir berechnen mit Hilfe des Satzes von Stokes (1.40) die Zirkulation von  $\vec{B}(\vec{r})$  entlang des Randes  $C$  der Fläche  $F$ :

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.3)$$

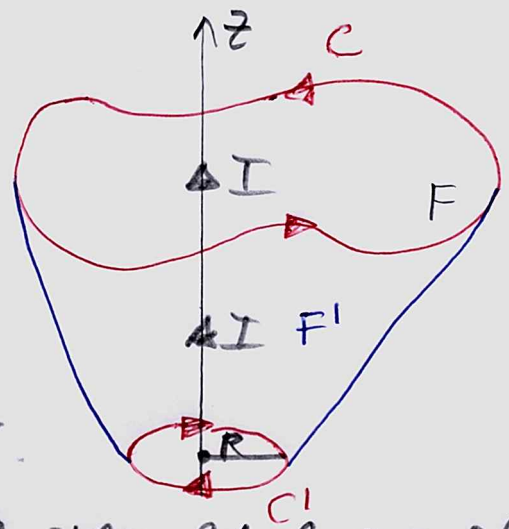
Für die Rotation des Magnetfeldes (3.1) gilt:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad (3.4)$$

für  $\vec{r} \neq \vec{0}$ . Deshalb erhalten wir für die Zirkulation (3.3):

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \quad (3.5)$$

Wir betrachten nun eine geschlossene orientierte Kurve  $C$ , die die  $z$ -Achse umläuft. Es soll die Zirkulation des magnetischen Feldes (3.1) entlang von  $C$  berechnet werden. Betrachten wir  $C$  als Rand der Fläche  $F$  in der Ebene, so lässt sich der Satz von Stokes nicht anwenden, da  $F$  den singulären Punkt  $x=y=0$  von  $\vec{B}(\vec{r})$  in (3.1) enthält. Als Kurve ergänze man  $C$  durch  $C'$ , der einen Kreis mit Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse darstellt und entgegengesetzt von  $C$  orientiert ist. Dann lässt sich  $C+C'$  als Rand der Mantelfläche  $F'$  auffassen, die keinen Punkt auf der  $z$ -Achse enthält. Aufgrund des Satzes von Stokes (1.40) gilt deshalb mit (3.4):



$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{C+C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F'} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.6)$$

Daraus folgt, dass die Zirkulation entlang von  $C$  gerade der Zirkulation entlang von  $-C'$  entspricht:

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{-C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3.7)$$

Zur Berechnung der Zirkulation entlang von  $-C'$  führen wir Zylinderkoordinaten ein:

$$\vec{r}(s, \varphi, z) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Mit den entsprechenden Einheitsvektoren

$$\vec{e}_s = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

erhalten wir für das Magnetfeld (3.1)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{s} \vec{e}_\varphi \quad (3.10)$$

Die Parametrisierung der Kurve  $-C'$  lautet

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad d\vec{r} = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = R \vec{e}_\varphi d\varphi \quad (3.11)$$

Damit berechnen wir für die Zirkulation

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \vec{e}_\varphi R \vec{e}_\varphi = \mu_0 I \quad (3.12)$$

Demnach ist die Zirkulation der magnetischen Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  entlang der Kurve  $C$  proportional zum Strom  $I$ , der durch eine Fläche  $F$  mit der Randkurve  $C$  fließt. Dieses Ergebnis lässt sich im Rahmen der Magnetostatik auf eine beliebige Stromverteilung verallgemeinern und wird als Ampèresgesetz bezeichnet.

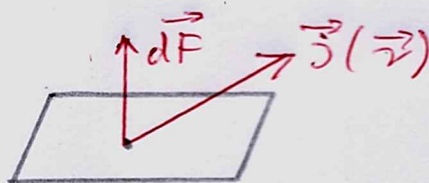
### 3.2 Erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Aus dem Ampèreschen Grundgesetz der Magnetostatik (3.12) folgt einerseits mit dem Satz von Stokes

$$(1.40) \quad \mathcal{Z} = \int_F \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.13)$$

wobei  $F$  eine beliebige Fläche mit der Randkurve  $C$  ist. Andererseits lässt sich der Strom  $I$  durch  $F$  mit Hilfe der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  darstellen gemäß

$$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (3.14)$$



Aus (3.12) - (3.14) folgt dann

$$\int_F \{ \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \} \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.15)$$

Da diese Aussage für jede Fläche  $F$  gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.16)$$

Wir bemerken, dass (3.16) nicht für jede Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  sinnvoll ist. Berechnen wir die Rotorglieder der linken Seite von (3.16), so folgt aus (1.12) und (1.25):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial x} \right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial y} \right\} = \left\{ \frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial z \partial y} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial x \partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 B_z(\vec{r})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial y \partial x} \right\} = 0 \quad (3.17)$$

da die gemischten zweiten partiellen Ableitungen für zwei mal stetig differenzierbare Funktionen nach dem Satz von Schwarz (2.27) verschwinden. Demnach folgt aus der Vergleichs der rechten Seite von (3.16) die Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0 \quad (3.18)$$

In der Magnetostatik dürfen nur solche Stromdichten  $\vec{j}(\vec{r})$  verwendet werden, die dieser Kontinuitätsgleichung genügen.

### 3.3 Zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Wir kehren zum Biot-Savart-Gesetz (3.1) zurück und berechnen die Divergenz der magnetischen Feldstärke:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ -y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+y^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2+y^2} \right\} = 0 \quad (3.19)$$

Dieses Ergebnis läßt sich in der Magnetostatik auf ein beliebiges magnetisches Feld verallgemeinern und stellt die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik dar. Sie besagt, dass es für das Magnetfeld keine magnetischen Monopole gibt. Man kann (3.19) auch in Integralform angeben. Hierzu integriert man  $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r})$  über ein Volumen  $V$  und wendet den Satz von Gauß (1.31) an:

$$\oint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (3.20)$$

Demnach verschwindet der Fluss der magnetischen Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  durch jede geschlossene Fläche  $F$ . Es zeigen im Mittel gleich viele magnetische Feldlinien in  $F$  hinein und aus  $F$  heraus.

### 3.4 Vektorpotential:

Da die Divergenz der magnetischen Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  gemäß (3.19) verschwindet, läßt sich wegen (3.17) ein Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  mit der Eigenschaft

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad (3.21)$$

einführen. Allerdings ist zu beachten, dass dieses Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  nicht eindeutig ist. Zu einem  $\vec{A}(\vec{r})$  kann immer das Gradientenfeld  $\text{grad } \chi(\vec{r})$  eines beliebigen Skalarfeldes  $\chi(\vec{r})$  addiert werden, ohne dass sich die magnetische Feldstärke verändert. In der Tat führt die Eichtransformation

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } \chi(\vec{r}) \quad (3.22)$$

wegen der Identität (2.26) der Vektoranalysis auf das Ergebnis

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}'(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.23)$$

sie Eichtransformation (3.22) verwenden wir nun, um das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  für eine beliebig Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  zu berechnen.

### 3.5 Berechnung des Vektorpotentials:

Wir setzen nun (3.21) in die erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik (3.16) ein. Hierbei ist eine weitere Identität der Vektoranalysis zu beachten, die sich aus (1.8), (1.12), (1.24), (2.29) und der "BAC-CAB"-Regel für das doppelte Vektorprodukt (1.20) ergibt:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{A}(\vec{r}) &= \nabla \times [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = \nabla [\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\nabla \cdot \nabla) \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Damit erhalten wir als Feldgleichung für das Vektorpotential:

$$\text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.25)$$

Wir nutzen nun die Eichfreiheit (3.22) im Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  aus und wählen speziell die Coulomb-Eichung

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (3.26)$$

dadurch vereinfacht sich die Feldgleichung (3.25) zu

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (3.27)$$

Hierbei handelt es sich für jede einzelne Komponente des Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r})$  um eine Poisson-Gleichung (2.28). Deshalb können wir unmittelbar die Lösung (2.48), (2.49) der Poisson-Gleichung (2.28) über-

nehmen und erhalten als Lösung von (3.27)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.28)$$

Wir überprüfen nun, ob (3.28) tatsächlich der Coulomb-Gleichung (3.26) genügt. Zunächst erhalten wir

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.29)$$

Eine partielle Integration mit Hilfe des Satzes von Gauß (1.31) führt dann auf

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (3.30)$$

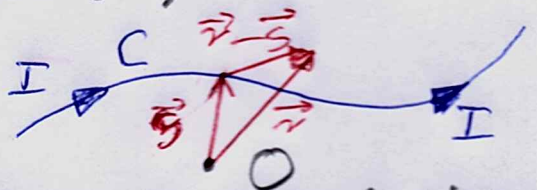
Demnach führt die Kontinuitätsgleichung (3.18) der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  auf die Coulomb-Gleichung (3.26) des Vektorpotentials (3.28). Mit Hilfe von (3.21) und (3.28) läßt sich die magnetische Feldstärke der Magnetostatik berechnen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (3.31)$$

Demnach sind Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  und magnetische Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  einer beliebigen Stromdichteverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  durch (3.28) und (3.31) definiert. Damit lassen sich alle Phänomene der Magnetostatik beschreiben.

Wir betrachten als Beispiel einen Strom  $I$ , der durch einen Draht mit der Kurvenform  $C$  fließt. In diesem Fall lautet die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \oint_C \delta(\vec{r} - \vec{s}) d\vec{s} \quad (3.32)$$



Zunächst ist zu prüfen, ob diese Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (3.18) genügt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) &= -I \oint_C \vec{\nabla}_s \delta(\vec{r} - \vec{s}) \cdot d\vec{s} \stackrel{(1.1)}{=} -I \oint_C d\delta(\vec{r} - \vec{s}) \\ &= -I \{ \delta(\vec{r} - \vec{s}_A) - \delta(\vec{r} - \vec{s}_E) \} \end{aligned} \quad (3.33)$$

hierbei bezeichnen  $\vec{s}_A$  und  $\vec{s}_E$  Anfangs- und Endpunkt des Drahtes. Wenn der Draht  $C$  geschlossen ist, gilt  $\vec{s}_A = \vec{s}_E$  und aus (3.33) folgt die Konti-

nutzt Gleichung (3.18). Setzen wir die Stromdichte (3.32) in (3.31) ein, so erhalten wir das allgemeine Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \quad (3.34)$$

Wir spezialisieren nun weiter auf einen unendlich langen Draht, der parallel zur  $z$ -Achse verläuft. Mit der Parametrisierung von  $C$

$$\vec{s}(z') = z' \vec{e}_z, \quad z' \in (-\infty, +\infty) \quad (3.35)$$

reduziert sich (3.34) auf das Integral

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Es lässt sich mit Hilfe der Stammfunktion

$$\int z' dz' \frac{1}{(z'^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{z'}{(z'^2 + a^2)^{1/2}} \quad (3.37)$$

berechnen und wir erhalten aus (3.36) das zu Beginn angegebene Biot-Savart-Gesetz (3.1) für einen stromdurchflossenen Geraden Draht.

## 4. Maxwell-Gleichungen:

In Kapitel 2 und 3 wurde behandelt, welche elektrischen und magnetischen Felder bei einer statischen Ladungs- und Stromdichte auftreten. Nun verallgemeinern wir diese Resultate auf zeitlich veränderliche Ladungs- und Stromdichten und die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder. Ausgangspunkt hierfür sind die phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik, die Michael Faraday zusammenstellte. Darauf aufbauend formulierte James Clerk Maxwell 1864 die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik, die heute unter der Bezeichnung Maxwell-Gleichungen bekannt sind.

### 4.1 Helmholtz'scher Vektorzerlegungssatz:

Zunächst diskutieren wir die mathematischen Grundlagen der Maxwell-Gleichungen, die durch den Helmholtz'schen Vektorzerlegungssatz gegeben sind.

#### 4.1.1 Motivation:

In Kapitel 2 und 3 hatten wir festgehalten, dass die elektrostatische und die magnetostatische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  charakterisiert werden. Dabei werden die beiden Felder  $\vec{E}(\vec{r})$  und  $\vec{B}(\vec{r})$  im Rahmen der Maxwell-Gleichungen dadurch beschrieben, dass gemäß (2.16), (2.23) und (3.16), (3.19) deren Divergenz und deren Rotation angegeben werden. Diesen Sachverhalt wollen wir nun auf ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  verallgemeinern. Wir nehmen also an, dass die Divergenz und die Rotation dieses Vektorfeldes  $\vec{V}(\vec{r})$  gemäß

$$\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r}) \quad (4.2)$$

gegeben sind und fragen uns, ob wir daraus das Vektorfeld  $\vec{V}(\vec{r})$  eindeutig rekonstruieren können. Dabei nehmen wir an, dass sowohl  $\vec{V}(\vec{r})$  als auch  $f(\vec{r})$  und  $\vec{g}(\vec{r})$  für  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$  hinreichend stark abfallen.

#### 4.1.2 Herleitung:

Zunächst gehen wir von den Eigenschaften (2.31), (2.32) der sinusförmigen Wellenfunktion aus und erhalten

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \int \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' \quad (14.3)$$

Mit Hilfe der Distributionsidentität (2.36) folgt

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int \vec{\nabla}(\vec{r}') \Delta' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (14.4)$$

Eine zweimalige partielle Integration analog zu Abschnitt 2.8 führt dann (14.4) über in

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta' \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' \quad (14.5)$$

Aufgrund der Identität (3.24) erhalten wir

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \{ \text{rot}' \text{rot}' \vec{\nabla}(\vec{r}') - \text{grad}' \text{div}' \vec{\nabla}(\vec{r}') \} dV' \quad (14.6)$$

Es wird nun in beiden Termen durch eine partielle Integration der äußere Nabla-Operator von  $\vec{\nabla}(\vec{r}')$  auf die Funktion  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  umgewälzt. Im ersten Term führt dies mit (14.2) auf

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_1(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' = \frac{-1}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi} \text{rot}' \int \frac{\vec{\nabla}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (14.7) \end{aligned}$$

wobei die partielle Integration mit Hilfe von (1.46) durchgeführt wurde. Im zweiten Term folgt entsprechend mit (4.1)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_2(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int \left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{\nabla}(\vec{r}') dV' = \frac{-1}{4\pi} \text{grad}' \int \frac{\vec{\nabla}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (14.8) \end{aligned}$$

wobei die partielle Integration mit Hilfe von (1.33) durchgeführt wurde. Bei beiden Rechnungen treten jeweils zwei Minuszeichen auf. Eines stammt von der partiellen Integration und das andere von  $\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$ . Insgesamt erhalten wir aus (4.6) - (4.8) den Helmholtz'schen Vektorzerlegungssatz:

$$\vec{\nabla}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \text{rot}' \int \frac{\vec{\nabla}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \text{grad}' \int \frac{\vec{\nabla}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (14.9)$$

Er besagt, dass man aus dem Kenntnis von Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{\nabla}(\vec{r})$  wie in (14.1) und (14.2) das gesamte Vektorfeld  $\vec{\nabla}(\vec{r})$  gemäß (14.9) eindeutig rekonstruieren kann. Das bedeutet, dass jedes Vektorfeld  $\vec{\nabla}(\vec{r})$  durch seine Quellen  $\text{div}' \vec{\nabla}(\vec{r}')$  und sein Wirbel  $\text{rot}' \vec{\nabla}(\vec{r}')$  eindeutig festgelegt ist. Demnach ist der Helmholtz'sche Vektorzerlegungssatz (14.9) die mathematische Grundlage für die Maxwell-Gleichungen.

drungen der Elektrodynamik. Sie charakterisieren nämlich die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r})$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r})$  durch die Angabe deren Quellen und Wirbel. Im Rahmen der Elektrostatik sind dies die Maxwell-Gleichungen (2.16), (2.23), während die Magnetostatik durch die Maxwell-Gleichungen (3.16), (3.19) festgelegt ist.

#### 4.1.3 Spezialfälle:

Zum Schluß dieses Abschnitts betrachten wir noch zwei wichtige Spezialfälle des Helmholtz'schen Vektorzerlegungssatzes:

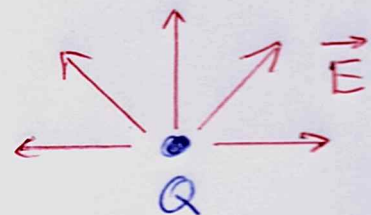
1) Verschwindet die Rotation des Vektorfeldes  $\vec{V}(\vec{r})$ , so läßt sich  $\vec{V}(\vec{r})$  gemäß (4.9) als Gradient eines Skalarfeldes darstellen:  
 $\text{rot } \vec{V}(\vec{r}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}), \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div}' \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4.10)$   
 Diese Situation tritt in der Elektrostatik aufgrund von (2.23) auf. Dabei geht (4.10) aufgrund von (2.16) in (2.48), (2.49) über.

2) Verschwindet die Divergenz des Vektorfeldes  $\vec{V}(\vec{r})$ , so läßt sich  $\vec{V}(\vec{r})$  gemäß (4.9) als Rotation eines Vektorfeldes darstellen:  
 $\text{div } \vec{V}(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \vec{V}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (4.11)$   
 Diese Situation tritt in der Magnetostatik aufgrund von (3.19) auf. Dabei geht (4.11) aufgrund von (3.16) in (3.28) über.

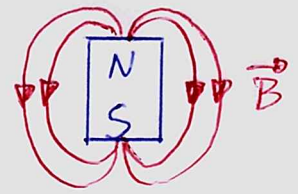
#### 4.2 Phänomenologie:

Aus unzähligen Experimenten konnten die folgenden phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik extrahiert werden:

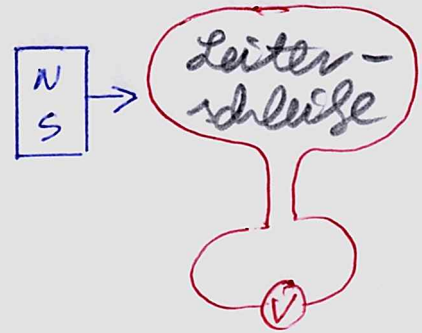
(M1) Coulomb-Gesetz:  
 Elektrische Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes.



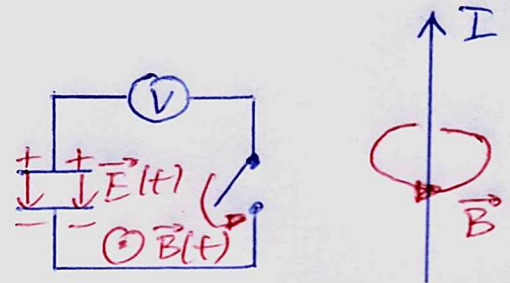
(M2) Es gibt keine magnetischen Ladungen, d.h. magnetische Feldlinien sind immer geschlossen.



(M3) Induktionsgesetz:  
Die zeitliche Änderung eines magnetischen Flusses induziert ein elektrisches Feld, das seiner Ursache entgegengerichtet (Lenz-Regel).



(M4) Ein elektrischer Strom (Ampère-Gesetz) oder ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld (Maxwell'scher Verschiebungsstrom) induzieren ein Magnetfeld.



Diese phänomenologischen Gesetze der Elektrodynamik lassen sich in Form der Maxwell-Gleichungen mathematisch formulieren. Es handelt sich dabei um partielle Differentialgleichungen, die die ersten partiellen Ableitungen von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  nach den Koordinaten  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$  beinhalten.

### 4.3 Mathematische Formulierung:

Bewegte elektrische Ladungen in Form von zeitlich veränderlichen Ladungs- und Stromdichten erzeugen im Raum einen "Erregungszustand", der durch die beiden Vektorfelder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  an jedem Ort  $\vec{r}$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  beschrieben wird. Umgekehrt üben auch die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  eine Kraftwirkung auf bewegte elektrische Ladungen aus, die durch die Lorentzkraft beschrieben wird. Eine vollständige Beschreibung der Elektrodynamik umfasst daher die vier

Maxwell-Gleichungen sowie eine Formel für die Lorentz-Kraft.

Bei der Behandlung des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes in Abschnitt 4.1 haben wir gesehen, dass ein Vektorfeld durch dessen Divergenz, also seine Quell-dichte, und dessen Rotation, also seine Wirbel-dichte, eindeutig bestimmt ist. Deshalb geben die vier Maxwell-Gleichungen die Quell- und Wirbel-dichten für die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  an:

$$(M1) \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (4.12)$$

$$(M2) \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.13)$$

$$(M3) \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$(M4) \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4.15)$$

Zusätzlich tritt neben der Dielektrizitätskonstanten im Vakuum  $\epsilon_0$  aus (2.2) und der Permeabilitätskonstanten  $\mu_0$  aus (3.2) noch die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = 2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4.16)$$

auf. Zwischen diesen drei Naturkonstanten besteht die Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (4.17)$$

Zu den vier Maxwell-Gleichungen kommt noch eine Formel für die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.18)$$

bzw. die Lorentz-Kraftdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (4.19)$$

hinzü.

#### 4.4 Elektrostatik und Magnetostatik:

Als Spezialfall betrachten wir ein elektromagnetisches Feld, das zeitunabhängig ist:

$$\frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) \quad (4.21)$$

Diesem müssen aber auch Ladungs- und Stromdichten zeitunabhängig sein:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) \quad (4.22)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) \quad (4.23)$$

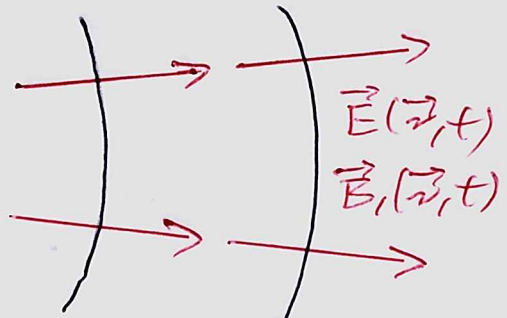
In diesem Fall reduzieren sich die vier Maxwell-Gleichungen (4.12) - (4.15) auf diejenigen der Elektrostatik (2.16), (2.23) und der Magnetostatik (3.16), (3.19).

Im folgenden untersuchen wir, welche Auswirkungen eine explizite Zeitabhängigkeit der elektromagnetischen Felder hat. Eine dieser Konsequenzen ist es, dass sich das elektromagnetische Feld in Form von Wellen ausbreiten kann.

## 5. Elektromagnetische Wellen im Vakuum:

In diesem Kapitel untersuchen wir elektromagnetische Wellen im Vakuum, die von bewegten Ladungen ausgeht werden:

$$\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{j}(\vec{r}, t)$$



Die Entdeckung elektromagnetischer Wellen ist ein Musterbeispiel für das Zusammenwirken von Experiment, Theorie und Technik:

- Michael Faraday formulierte 1832 die Hypothese, dass sich elektrische und magnetische Felder wie Wellen ausbreiten.
- James Clerk Maxwell entwickelte 1864 eine Theorie, wonach Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit ( $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) ausbreitet.
- Heinrich Hertz führte 1886, d.h. sieben Jahre nach Maxwell's Tod, in Karlsruhe ein Experiment durch, das die Abstrahlung und den Empfang hochfrequenter elektromagnetischer Wellen demonstrierte.

### 5.1 Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

Wir verlassen nun die Statik und untersuchen zeitabhängige Felder. Dabei wollen wir die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  in einem großen Abstand von deren felderzeugenden Quellen und Wirbeln betrachten. Das bedeutet, dass wir solche Raumpunkte  $\vec{r}$  betrachten, bei denen keine Ladungen und keine Ströme vorliegen:

$$\rho(\vec{r}, t) = 0, \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (5.1)$$

Einsetzen von (5.1) in (4.12) - (4.15) führt auf die Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$(M1) \quad \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.2)$$

$$(M2) \quad \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.3)$$

$$(M3) \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = - \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.4)$$

$$(M4) \quad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.5)$$

Eine offensichtlichliche Lösung dieser gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist die triviale Lösung  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ . Im folgenden untersuchen wir, ob es auch nichttriviale Lösungen von (5.2)–(5.5) gibt.

### 5.2 Herleitung der Wellengleichung:

Zierna verfolgen wir die Strategie, die gekoppelten Maxwell-Gleichungen (5.2)–(5.5) zu entkoppeln. Wir streben also an, jeweils eine einzelne Bewegungsgleichung für  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  abzuleiten. Hierzu differenzieren wir (5.5) nach der Zeit  $t$  und erhalten

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (5.6)$$

Nach dem Satz von Schwarz können bei zweifach stetig differenzierbaren Funktionen die gemischten partiellen Ableitungen nach der Zeit und den Raumkoordinaten auf der rechten Seite von (5.6) vertauscht werden:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (5.7)$$

Einsetzen von (5.4) in (5.7) führt dann auf

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (5.8)$$

Aufgrund der vektoranalytischen Identität (3.24) geht (5.8) über in

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (5.9)$$

Unter Beachtung von (5.2) reduziert sich (5.9) auf die Wellengleichung für die elektrische Feldstärke:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (5.10)$$

Es bleibt, dass jede einzelne Komponente von  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  eine Lösung der Wellengleichung ist. Eine entsprechende Rechnung zeigt, dass auch die magnetische Feldstärke  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  der Wellengleichung genügt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \stackrel{(5.4)}{=} \frac{-1}{c^2} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \stackrel{(5.5)}{=} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\underline{(3.24)} \quad \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) = \text{grad div } \vec{B}(\vec{r}, t) \quad \underline{(5.3)} \quad \Delta \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (5.11)$$

Wir werden nun zeigen, dass die Lösungen von (5.10) und (5.11) elektromagnetische Wellen beschreiben. Die theoretische Vorhersage elektromagnetischer Wellen durch Maxwell zählt zu den großen Leistungen der modernen Physik. Sie ist die Grundlage der heutigen Kommunikationstechnik (Fernsehen, Radio, Satellitenempfang, usw.). Da Licht eine elektromagnetische Welle darstellt, die sich durch das Vakuum ausbreitet, ist die Existenz elektromagnetischer Wellen auch die für verantwortlich, dass wir Sterne sehen können.

### 5.3 Ausbreitung in x-Richtung:

Zunächst behandeln wir den Spezialfall, dass wir uns auf solche Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  beschränken, die nur von der x-Koordinate und der Zeit abhängen. Dies bedeutet, dass wir eine elektromagnetische Welle betrachten, die sich in x-Richtung ausbreitet:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}(x, t), \quad \vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}(x, t) \quad (5.12)$$

Einsetzen von (5.12) in (5.2), (5.3) führt dann auf

$$\frac{\partial E_x(x, t)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial B_x(x, t)}{\partial x} \quad (5.13)$$

Als Lösung von (5.13) wählen wir

$$E_x(x, t) = 0 = B_x(x, t) \quad (5.14)$$

Das bedeutet, dass sowohl  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  als auch  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  in der  $yz$ -Ebene liegen und damit senkrecht zur Ausbreitung in x-Richtung sind. Diese Eigenschaft elektromagnetischer Wellen bezeichnet man als Transversalität. Es gilt somit:

$$\vec{E}(x, t) = E_y(x, t) \vec{e}_y + E_z(x, t) \vec{e}_z \quad (5.15)$$

$$\vec{B}(x, t) = B_y(x, t) \vec{e}_y + B_z(x, t) \vec{e}_z \quad (5.16)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir eine elektrische Feldstärke, die linear in y-Richtung polarisiert ist:

$$\vec{E}(x, t) = E_y(x, t) \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

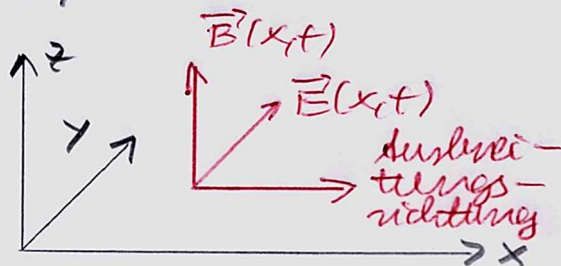
Einsetzen von (5.17) in (5.4) führt auf

$$\operatorname{rot} \vec{E}(x,t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y(x,t) & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Wenn also  $\vec{E}(x,t)$  gemäß (5.17) in  $y$ -Richtung zeigt, dann muss  $\vec{B}(x,t)$  gemäß (5.18) in  $z$ -Richtung zeigen:

$$\vec{B}(x,t) = B_z(x,t) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(x,t) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Damit steht auch das magnetische Feld senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und ist damit also auch transversal. Es steht aber auch senkrecht zum elektrischen Feld.



Mit diesen Überlegungen haben wir unser ursprüngliches Problem, die Wellengleichungen (5.10), (5.11) für die sechs Komponenten  $\vec{E}(\vec{r},t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r},t)$  zu lösen, im Falle einer Ausbreitung in  $x$ -Richtung auf eine eindimensionale Wellengleichung reduziert:

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.20)$$

### 5.4 Allgemeine Lösung der Wellengleichung:

Wir zeigen nun, dass der Ansatz

$$E_y(x,t) = f(x-ct) \quad (5.21)$$

mit einer beliebigen Funktion  $f$  die eindimensionale Wellengleichung (5.20) löst. Hierzu betrachten wir als Nebenbedingung:

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = f'(x-ct),$$

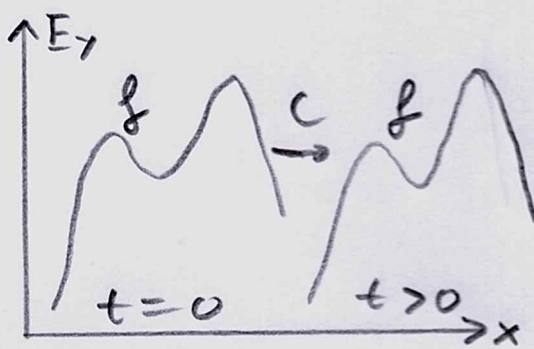
$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = f''(x-ct) \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = -c \cdot f'(x-ct),$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 f''(x-ct) \quad (5.23)$$

In der Tat führt das Einsetzen von (5.22), (5.23) in (5.20) auf die Identität

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = f''(x-ct) - \frac{1}{c^2} c^2 f''(x-ct) = 0 \quad \checkmark$$

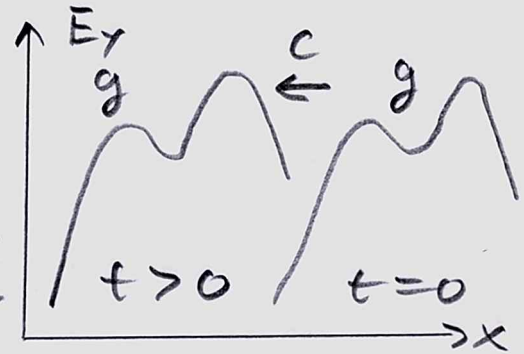


Ganz entsprechend zeigt man, dass auch

$$E_y(x, t) = g(x + ct) \quad (5.24)$$

mit einer beliebigen Funktion  $g$  die eindimensionale Wellengleichung (5.20) löst.

Dabei beschreibt (5.21) die Propagation eines Wellenmusters  $f$  in  $x$ -Richtung, während (5.24) die Propagation eines Wellenmusters entgegen der  $x$ -Richtung darstellt. Dabei erfolgt in beiden Fällen die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit



geschwindigkeit  $c$ . Licht hat damit die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit und die gleichen Eigenschaften wie elektromagnetische Wellen. Wir können also festhalten, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist:

|                             |                             |  |
|-----------------------------|-----------------------------|--|
| Licht                       | ← Maxwell-<br>gleichungen → | elektromagnetische<br>Welle              |
| sehen, Farben<br>Regenbogen |                             | bewegte Ladungen, Ströme,<br>Zampfnadeln |

Abschließend stellen wir fest, dass die eindimensionale Wellengleichung (5.20) linear ist. Dies bedeutet, dass deren allgemeine Lösung eine Überlagerung (Superposition) der Lösungen (5.21) und (5.24) ist:

$$E_y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (5.25)$$

Es gibt demnach auch elektromagnetische Wellen, die sich gleichseitig in und entgegen der  $x$ -Richtung ausbreiten. Hierfür ist eine stehende elektromagnetische Welle ein konkretes Beispiel.

### 5.5 Monochromatische ebene Welle:

Wir verallgemeinern nun die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts auf die dreidimensionale Wellengleichung. Nach (5.10) und (5.11) lautet sie:

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.26)$$

wobei die Funktion  $\psi(\vec{r}, t)$  mit den  $x$ -Komponenten des elektromagnetischen Feldes  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  identifiziert werden kann.

### 5.5.1 Lösungsansatz:

Zur Lösung von (5.26) verwenden wir den Ansatz einer monochromatischen ebenen Welle:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (5.27)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{k}$  den Wellenvektor,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\Psi_0$  eine möglicherweise komplexe Amplitude. Wie muß man aber interpretieren, dass unser Ansatz (5.27) komplex ist? Physikalisch von Bedeutung sind nur die reellen Lösungen, also  $\text{Re } \Psi(\vec{r}, t)$  und  $\text{Im } \Psi(\vec{r}, t)$ . Mathematisch bequemer ist aber die komplexe Schreibweise. Daher rechnen wir zunächst komplex, am Ende können wir immer zum Real- oder Imaginärteil übergehen, falls das erforderlich ist.

Wir prüfen nun, ob (5.27) tatsächlich eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung (5.26) ist. Hierzu berechnen wir zunächst die einzelnen partiellen Ableitungen:

$$\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = i \vec{k} \Psi(\vec{r}, t), \quad \Delta \Psi(\vec{r}, t) = -\vec{k}^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -i \omega \Psi(\vec{r}, t), \quad \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(\vec{r}, t) \quad (5.29)$$

Einsetzen von (5.27) in (5.26) führt demnach auf

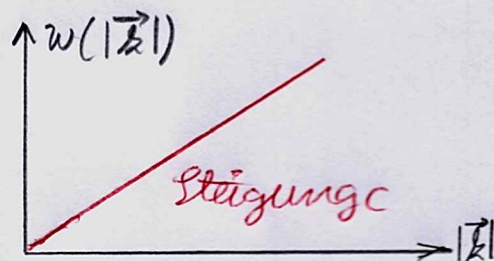
$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.30)$$

### 5.5.2 Dispersionsrelation:

Da unsere Lösung  $\Psi(\vec{r}, t)$  in (5.27) von Null verschieden ist, folgt aus (5.30) die Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen im Vakuum:

$$\omega(\vec{k}) = c |\vec{k}| \quad (5.31)$$

Dabei bezeichnet eine Dispersionsrelation den Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor  $\vec{k}$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  einer Welle. Nach (5.31) ist die Dispersionsrelation linear.



Bei der Zerlegung

$$\vec{k} = k \hat{k} \quad (5.32)$$

gibt der Einheitsvektor  $\hat{k}$  die Richtung an, in der sich die Welle ausbreitet, während der Betrag  $k = |\vec{k}|$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  verknüpft ist:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.33)$$

Entsprechend hängen Kreisfrequenz  $\omega$  und Periodendauer  $T$  zusammen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (5.34)$$

wobei die Frequenz  $\nu$  der Welle durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.35)$$

gegeben ist. Wir können demnach die lineare Dispersionsrelation (5.31) auch folgendermaßen umschreiben:

$$\omega = c k \Leftrightarrow \lambda = c \cdot T \Leftrightarrow \lambda \nu = c \quad (5.36)$$

Außerdem bemerken wir, dass elektromagnetische Wellen wie Licht in Materie im allgemeinen eine nichtlineare Dispersionsrelation besitzen. Sie führt beispielsweise auf die Farbausspaltung im Prisma.

### 5.5.3 Phase:

Da unsere Lösung (5.27) eine komplexe Größe darstellt, können wir sie in Betrag und Phase zerlegen. Mit einer entsprechenden Zerlegung für die Amplitude

$$\psi_0 = |\psi_0| e^{i\phi_0} \quad (5.37)$$

erhalten wir aus (5.27)

$$\psi(\vec{r}, t) = |\psi_0| e^{i\phi(\vec{r}, t)} \quad (5.38)$$

wobei die Phase der elektromagnetischen Welle gegeben ist durch

$$\phi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \quad (5.39)$$

Mit Hilfe von (5.32) - (5.35) lässt sich die Phase umformen zu

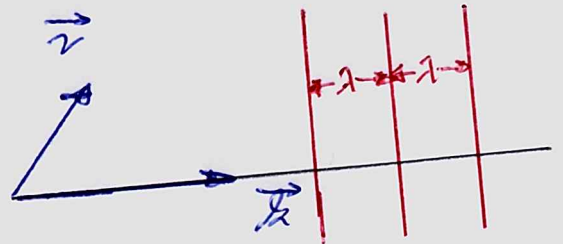
$$\phi(\vec{r}, t) = 2\pi \left( \frac{1}{\lambda} \hat{k} \cdot \vec{r} - \frac{1}{T} t \right) + \phi_0 \quad (5.40)$$

Das bedeutet, dass die elektromagnetische Welle

(5.38), (5.40) sowohl zeitlich als auch räumlich periodisch ist

$$\psi(\vec{r} + n\lambda \hat{k}, t) = \psi(\vec{r}, t + mT) = \psi(\vec{r}, t); \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (5.41)$$

Bei einer Momentaufnahme, wo wir  $t$  festhalten, erhalten wir Ebenen konstanter Phase im Abstand der Wellenlänge  $\lambda$ .



Außerdem lesen wir anhand der Phase

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} (\hat{k} \cdot \vec{r} - ct) \quad (5.42)$$

ab, dass sich die elektromagnetische Welle mit der Phasengeschwindigkeit  $c$  im Vakuum ausbreitet.

### 5.5.4 Elektromagnetische Felder:

Wir fassen nun die einzelnen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  wieder zusammen und erhalten für eine ebene elektromagnetische Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (5.43)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (5.44)$$

dabei bezeichnen  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  ort- und zeitunabhängige Amplitudenvektoren, die im allgemeinen komplex sind. Wir beobachten nun, dass nicht jeder Lösung (5.43), (5.44) der dreidimensionalen Maxwellgleichungen (5.10), (5.11) auch eine Lösung der Maxwellgleichungen (5.2) - (5.5) ist. Beispielsweise führen die Maxwellgleichungen (5.2), (5.3) bei (5.43), (5.44) zu den zusätzlichen Bedingungen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.45)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (5.46)$$

Das bedeutet, dass die Amplitudenvektoren  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  senkrecht auf dem Wellenvektor stehen

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (5.47)$$

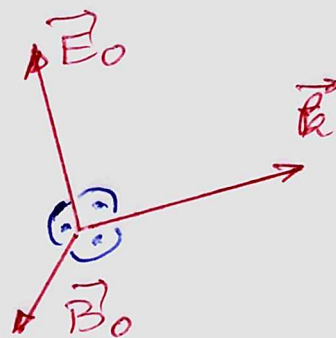
$$\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (5.48)$$

d.h. es liegen transversale Wellen vor.

entsprechend führen die Maxwell-Gleichungen (5.4), (5.5) bei (5.43), (5.44) auf die zusätzlichen Bedingungen

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = c \times \vec{B}_0 \quad (5.49)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_0 = -\frac{k}{c} \vec{E}_0 \quad (5.50)$$



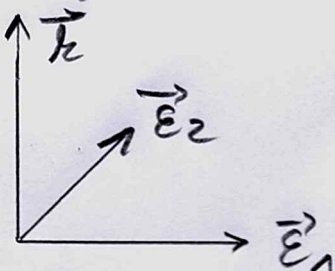
dennach bilden  $\vec{k}_0, \vec{E}_0, \vec{B}_0$  ein Rechtssystem.

### 5.5.5 Polarisation:

Unter der Polarisation versteht man die Eigenschaft einer elektromagnetischen Welle, wie dessen Vektorfeld relativ zum Wellenvektor  $\vec{k}$  gerichtet ist. Aufgrund der Transversalitätsbedingung (5.47) befindet der Amplitudenvektor  $\vec{E}_0$  in der Ebene senkrecht zu  $\vec{k}$ . Damit ist aber die Polarisation einer ebenen monochromatischen Welle nur teilweise festgelegt. Wir führen nun zwei reelle Einheitsvektoren  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  ein, die diese Ebene aufspannen. Dabei sollen die folgenden Beziehungen gelten:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{k}| = 1 \quad (5.51)$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{k} = \vec{e}_2 \cdot \vec{k} = 0 \quad (5.52)$$



d.h.  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $\vec{k}$  bilden ein Dreiein. Dann können wir den Amplitudenvektor  $\vec{E}_0$  nach den Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  zerlegen:

$$\vec{E}_0 = E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2 \quad (5.53)$$

Dabei sind mit  $\vec{E}_0$  auch die Projektionen

$$E_1 = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_1, \quad E_2 = \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_2 \quad (5.54)$$

im allgemeinen komplex und lassen sich deshalb in Betrag und Phase zerlegen:

$$E_1 = E_{01} e^{i\phi_1}, \quad E_2 = E_{02} e^{i\phi_2} \quad (5.55)$$

Einsetzen von (5.53), (5.55) in (5.43) führt dann auf

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{01} \vec{e}_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) + E_{02} \vec{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \quad (5.56)$$

Die physikalische Bedeutung der Amplituden  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  und der Phasen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  besteht darin, dass sie die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  in der  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$ -Ebene und damit die Polarisation der elektromagnetischen Welle beschreiben. Wir untersuchen nun verschiedene Fälle, die sich bezüglich der relativen Phase

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (5.57)$$

unterscheiden.

1. Fall:  $\Delta\phi = 0$  oder  $\Delta\phi = \pm\pi$

Wir erhalten in diesem Fall offenbar

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \quad (5.58)$$

wobei der Polarisationsvektor

$$\vec{E} = E_{01} \vec{E}_1 \pm E_{02} \vec{E}_2 \quad (5.59)$$

orts- und zeitunabhängig ist. Er ist um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der x-Achse geneigt:

$$\tan \alpha = \pm \frac{E_{02}}{E_{01}} \quad (5.60)$$

Man spricht dann von einer linear polarisierten ebenen Welle. Offenbar beschreibt (5.56) eine Überlagerung zweier linear polarisierter ebener Wellen.

2. Fall:  $\Delta\phi = \pm\pi/2$  und  $E_{01} = E_{02} = E$

In diesem Fall gilt

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_1(\vec{r}, t) \vec{E}_1 + E_2(\vec{r}, t) \vec{E}_2 \quad (5.61)$$

wobei die Komponenten der elektrischen Feldstärke

$$E_1(\vec{r}, t) = E \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1), \quad E_2(\vec{r}, t) = \mp E \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \quad (5.62)$$

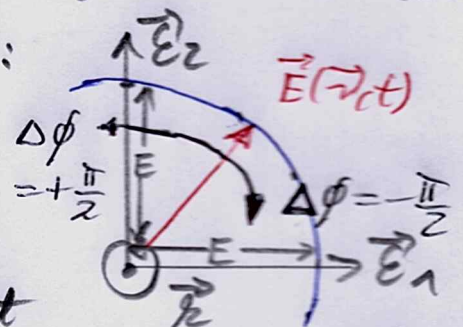
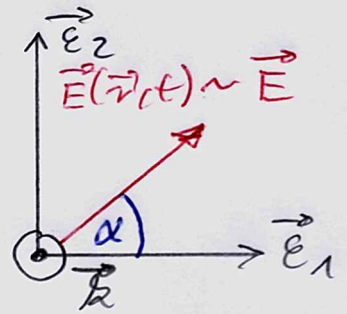
auf einem Kreis mit Radius  $E$  liegen:

$$E_1(\vec{r}, t)^2 + E_2(\vec{r}, t)^2 = E^2 \quad (5.63)$$

Je nach Vorzeichen der relativen Phase

$\Delta\phi = \pm\pi/2$  wird der Kreis links oder rechts herum durchlaufen. Man spricht

deshalb von einer links bzw. rechts zirkular polarisierten ebenen Welle.

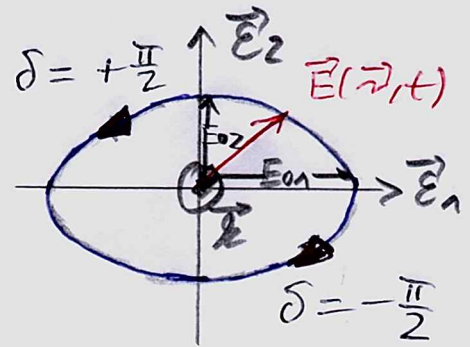


### 3. Fall: $\Delta\phi = \pm\pi/2$ und $E_{01} \neq E_{02}$

Nun gilt wieder (5.61), wobei hier die Komponenten  $E_1(\vec{r}, t) = E_{01} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)$ ,  $E_2(\vec{r}, t) = \mp E_{02} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1)$  (5.64) der Ellipsengleichung

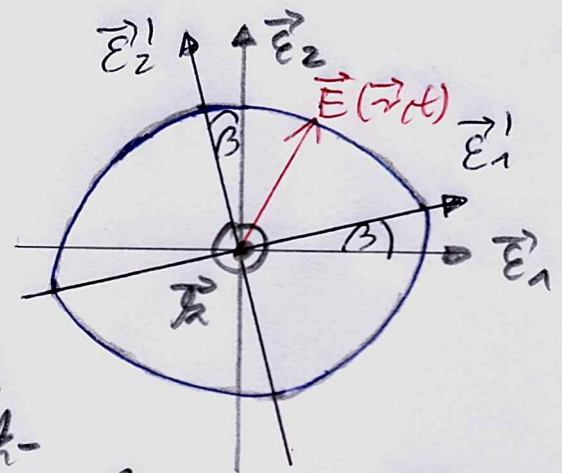
$$\left(\frac{E_1(\vec{r}, t)}{E_{01}}\right)^2 + \left(\frac{E_2(\vec{r}, t)}{E_{02}}\right)^2 = 1 \quad (5.65)$$

genügen. Die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  durchläuft demnach in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene eine Ellipse und man spricht von einer links- bzw. rechts elliptisch polarisierten ebenen Welle.



### 4. Fall: $\Delta\phi$ beliebig und $E_{01} \neq E_{02}$

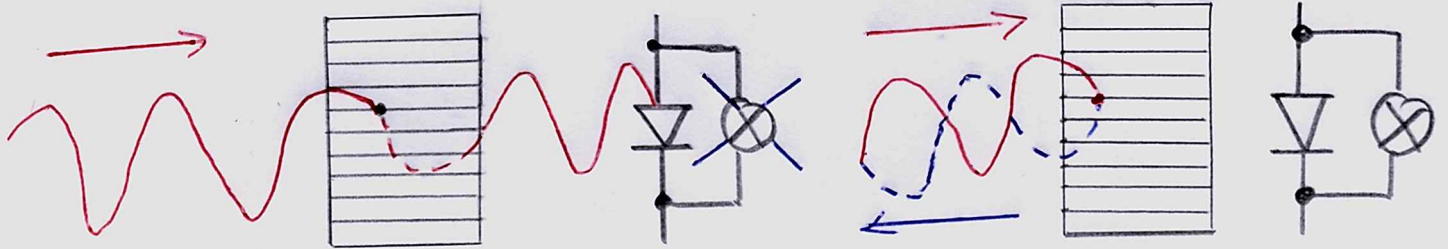
In diesem allgemeinsten möglichen Fall durchläuft die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  in der  $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene wieder eine Ellipse. Sie besitzt aber nun zwei Hauptachsen in Richtung von  $\vec{e}'_1$ ,  $\vec{e}'_2$ , die gegenüber den ursprünglichen Vektoren  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  um den Winkel  $\beta$  gedreht sind. Hierbei hängt  $\beta$  sowohl von der relativen Phase  $\Delta\phi$  als auch von den Amplituden ab.



Wir bemerken, dass das Licht einer normalen Glühlampe unpolarisiert ist, da es sich aus vielen verschiedenen elektromagnetischen Wellen mit unterschiedlichen Polarisationen zusammensetzt. Demgegenüber erhält man mit einem Laser eine ebene monochromatische elektromagnetische Welle mit fester Polarisation.

Zum experimentellen Nachweis der Polarisation betrachten wir Mikrowellen. Dabei handelt es sich um elektromagnetische Wellen mit Frequenzen im GHz-Bereich und Wellenlängen im cm-Bereich. Wir lassen die Mikrowellen auf Metallstäbe auftreffen. Ist die Polarisation der Mikrowelle senkrecht zu den

Metallstäben, so tritt sie durch die Metallstäbe hindurch. Ist dagegen die Mikrowelle parallel zu den Metallstäben polarisiert, so werden die Elektronen in den Metallstäben zu Schwingungen angeregt. Dadurch bedingt entsteht ein Gegenfeld, sodass die Mikrowelle nicht durch die Metallstäbe hindurchtreten kann:



maximaler Empfang

kein Empfang

Entsprechend lässt sich auch die Polarisation von sichtbarem Licht nachweisen. Hierzu verwendet man als Polarisationsfilter eine Folie mit parallel ausgerichteten Kohlenwasserstoffketten, die effektiv wie das obige Metallgitter wirken.

## 6. Retardierte Potentiale:

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie eine zeitlich-hängige Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$  bzw. Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  elektromagnetische Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  erzeugen kann. Das bedeutet, dass wir die vollen Maxwell-Gleichungen (4.12) - (4.15) bei vorgegebenem  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  lösen werden.

### 6.1 Kontinuitätsgleichung:

Zunächst bemerken wir, dass die Maxwell-Gleichungen (4.12) - (4.15) nicht für beliebige  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  aufgestellt werden können. Hierzu bilden wir die Divergenz von (4.15) und erhalten aufgrund von (3.17):

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.1)$$

Einsetzen von (4.12) in (6.1) führt auf

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 c^2} \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.2)$$

was sich aufgrund von (4.17) auf die Kontinuitätsgleichung reduziert:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.3)$$

Hierbei ist (6.3) eine lokale Formulierung für die Ladungserhaltung. Integrieren wir nämlich (6.3) über das ganze Volumen, so folgt mit Hilfe des Gauß'schen Satzes (1.31):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.4)$$

da wir wieder annehmen, dass  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  im Unendlichen schnell genug verwindet. Aufgrund von (2.33) besagt (6.4), dass die Ladung im gesamten Raum eine Erhaltungsgröße darstellt.

Demnach können wir festhalten, dass nur solche  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  in den Maxwell-Gleichungen (4.12) - (4.15) verwendet werden dürfen, die der Kontinuitätsgleichung (6.3) genügen. Wir bemerken, dass Maxwell den sogenannten Verschiebungsstrom  $\partial \vec{E}(\vec{r}, t) / \partial t$  in (4.15) nur deshalb eingeführt hat, damit die Kontinuitätsgleichung (6.3) gewährleistet

ist. Mit dieser theoretischen Vorhersage des Verschiebungsstroms ging Maxwell über die experimentellen Ergebnisse von Faraday hinaus. Der Verschiebungsstrom wurde erst am Ende des 19. Jahrhunderts von Röntgen direkt experimentell nachgewiesen. Indirekt wurde die Existenz des Verschiebungsstromes aber schon durch den Nachweis elektromagnetischer Wellen bestätigt. Ohne den Verschiebungsstrom hätte Maxwell keine elektromagnetischen Wellen als Lösung seiner Maxwell-Gleichungen erhalten.

## 6.2 Einführung der Potentiale:

Im Rahmen der Elektrostatik und der Magnetostatik haben wir die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Induktion  $\vec{B}$  gemäß (2.25) und (3.21) durch die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  ausgedrückt. Dieses Vorgehen verallgemeinern wir nun auf zeitabhängige Felder.

Hierzu betrachten wir zunächst die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (4.13) und (4.14). Das sind diejenigen Maxwell-Gleichungen, die nicht von  $\rho(\vec{r}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  abhängen. Zunächst schließen wir in Verbindung mit dem Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz in Abschnitt 4.1, dass sich die magnetische Induktion  $\vec{B}$  aufgrund von (4.13) als Rotation eines Vektorpotentials  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  darstellen läßt:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (6.5)$$

Einsetzen von (6.5) in (4.14) führt auf

$$\text{rot} \left\{ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} = \vec{0} \quad (6.6)$$

Aufgrund des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes in Abschnitt 4.1 folgern wir, dass es ein skalares Potential  $\varphi(\vec{r}, t)$  mit der Eigenschaft

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (6.7)$$

geben muß. Demnach lassen sich die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  gemäß (6.5), (6.7) auf die Potentialfelder  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  zurückführen.

Die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sind gemäß der Lorentz-Kraft (4.18), (4.19) durch ihre Kraftwirkung auf ruhende und bewegte Ladungen definiert. Deshalb stellen sie die physikalisch relevanten Felder dar. Demgegenüber sind die Potentialfelder  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  nicht physikalisch eindeutig festgelegt. Diese Eichfreiheit in  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  kommt dadurch zum Ausdruck, dass man  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  durch Eichtransformationen verändern kann. Es sei  $\lambda(\vec{r}, t)$  ein beliebiges Eichfeld. Dann sind die Eichtransformationen gegeben durch

$$\varphi'(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (6.8)$$

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \text{grad } \lambda(\vec{r}, t) \quad (6.9)$$

In der Tat erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{r}, t) &\stackrel{(6.7)}{=} -\text{grad } \varphi'(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}'(\vec{r}, t)}{\partial t} \stackrel{(6.8), (6.9)}{=} \\ &= -\text{grad } \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \stackrel{(6.7)}{=} \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (6.10)$$

und entsprechend

$$\vec{B}'(\vec{r}, t) \stackrel{(6.5)}{=} \text{rot } \vec{A}'(\vec{r}, t) \stackrel{(6.9)}{=} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \stackrel{(6.5)}{=} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (6.11)$$

Diese Eichfreiheit in  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  kann man nun bei der Lösung der vollen Maxwell-Gleichungen (4.12) - (4.15) ausnutzen.

### 6.3 Bewegungsgleichungen der Potentiale:

Die homogenen Maxwell-Gleichungen (4.13), (4.14) sind durch (6.5), (6.7) schon automatisch erfüllt. Einsetzen von (6.7) in (4.12) führt auf

$$-\Delta \varphi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (6.12)$$

Entsprechend folgt aus (4.15), (6.5), (6.7) mit Hilfe von (3.24)

$$\text{grad } \text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (6.13)$$

Demnach genügen die Potentialfelder  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  den beiden gekoppelten Bewegungsgleichungen (6.12), (6.13). Wir verwenden nun die Eichfreiheit in  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ,

um diese gekoppelten Bewegungsgleichungen zu entkoppeln. Hierzu wählen wir die Lorentz-Eichung

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (6.14)$$

Mit Hilfe von (6.14) reduzieren sich (6.12), (6.13) auf die inhomogenen Wellengleichungen

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\vec{r}, t) = - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (6.15)$$

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(\vec{r}, t) = - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (6.16)$$

Wobei ist die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$  die Inhomogenität der Wellengleichung (6.15) für das skalare Potential  $\varphi(\vec{r}, t)$  und die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  die Inhomogenität der Wellengleichung (6.16) für das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Wir bemerken, dass sich (6.15) in der Elektrostatik auf (2.28) und (6.16) in der Magnetostatik auf (3.27) reduzieren. Außerdem erhalten wir im Vakuum, d.h. für  $\rho(\vec{r}, t) = 0$  und  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{0}$ , dass (6.15), (6.16) die Aussage, dass die Potentialfelder  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  einer homogenen Wellengleichung (5.26) genügen.

#### 6.4 Ergebnisse für Potentiale:

Die inhomogenen Wellengleichungen (6.15), (6.16) lassen sich mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktionen konstruktiv lösen. Diese Lösungsmethode ist aber für unsere Vorlesung zu umfangreich, daher werden wir sie hier nicht näher vorstellen. Stattdessen geben wir die Lösungen von (6.15), (6.16) sofort an und diskutieren deren physikalischen Gehalt:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.17)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.18)$$

Wie erwartet werden also die Potentiale  $\varphi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  durch die Ladungs- und Stromdichten  $\rho(\vec{r}', t')$ ,  $\vec{j}(\vec{r}', t')$

bestimmt. Außerdem stellen wir fest, dass (6.17), (6.18) den Resultaten (2.48), (2.49) bzw. (3.28) ähneln, die aus der Elektrostatik bzw. der Magnetostatik bekannt sind. Neu an (6.17), (6.18) ist der Umstand, dass die Ladungs- und Stromdichte  $\rho(\vec{r}', t')$ ,  $\vec{j}(\vec{r}', t')$  zur früheren (=retardierten) Zeit

$$t' = t - \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (6.19)$$

ausgewertet wird. Dieser Retardierungseffekt kommt dadurch zustande, dass sich Signale mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Das bedeutet, dass gemäß (6.17), (6.18) nur diejenige Ladungs- und Stromdichte  $\rho(\vec{r}', t')$ ,  $\vec{j}(\vec{r}', t')$  zu den Potentialen  $\phi(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  beitragen, für die (6.19) erfüllt ist. Deshalb bezeichnet man (6.17), (6.18) als retardierte Potentiale.

Wir zeigen nun, dass die beiden retardierten Potentiale (6.17), (6.18) tatsächlich der Lorentz-Eichung (6.14) genügen. Hierzu erhalten wir aus (6.17) zunächst

$$\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} \quad (6.20)$$

und entsprechend aus (6.18)

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \left\{ -\left[ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{t}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \right\} \quad (6.21)$$

Eine partielle Integration im ersten Term von (6.21) führt mit Hilfe des Satzes von Gauß zu

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{div}' \vec{j}(\vec{r}', t') \quad (6.22)$$

Aufgrund von (4.17) erhalten wir aus (6.20) und (6.22)

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left\{ \frac{\partial \rho(\vec{r}', t')}{\partial t'} + \text{div}' \vec{j}(\vec{r}', t') \right\} \quad (6.23)$$

Demnach folgt aus (6.23) die Lorentz-Eichung (6.14), da Ladungs- und Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (6.3) genügen.

Entsprechend lässt sich auch explizit zeigen, dass die retardierten Potentiale (6.17), (6.18) tatsächlich den inhomogenen Wellengleichungen (6.15), (6.16) genügen. Au-

Bleiben stellen wir fest, dass man aus den retardierten Potentialen (6.17), (6.18) mit Hilfe von (6.5), (6.7) die entsprechenden elektromagnetischen Felder  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  berechnen kann. Diese verallgemeinern dann die entsprechenden Resultate (2.50) und (3.31) der Elektrostatik und der Magnetostatik.

### 6.5 Liénard-Wiechert-Potentiale:

Zum Schluß dieses Kapitels diskutieren wir eine spezielle Anwendung der retardierten Potentiale (6.17), (6.18). Hierzu betrachten wir eine Punktladung  $q$ , die sich entlang der Bahn  $\vec{R}(t)$  mit der Geschwindigkeit  $\dot{\vec{R}}(t) = \dot{\vec{R}}(t)$  bewegt. Durch diese bewegte Punktladung wird ein elektromagnetisches Feld erzeugt, dessen retardierte Potentiale wir nun berechnen.

Für die bewegte Punktladung sind Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}, t)$  und Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  wie folgt gegeben:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \quad (6.24)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q \dot{\vec{R}}(t) \delta(\vec{r} - \vec{R}(t)) \quad (6.25)$$

Einsetzen von (6.24), (6.25) in (6.17), (6.18) führt auf

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c}\right) \quad (6.26)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\dot{\vec{R}}(t')}{|\vec{r} - \vec{R}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c}\right) \quad (6.27)$$

Hierbei wurde ein Hilfsintegral über eine eindimensionale Delta-Funktion  $\delta(t)$  eingeführt, die analog zu (2.31), (2.32) die Eigenschaften

$$(D1) \quad \delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0 \quad (6.28)$$

$$(D2) \quad \int_{-E}^{+E} dt \delta(t) = 1 \text{ für } E > 0 \quad (6.29)$$

besitzt. Die beiden  $t'$ -Integrale in (6.26), (6.27) sind nicht so direkt ausföhrbar. Hierzu ist es notwendig, die Delta-Funktion  $\delta(g(t'))$  mit

$$g(t') = t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t')|}{c} \quad (6.30)$$

zu betrachten. Die Delta-Funktion  $\delta(g(t'))$  besitzt die Eigenschaft

$$\delta(\varrho(t)) = \sum_{\dot{\nu}=1}^n \frac{1}{|\dot{\varrho}(t^{\dot{\nu}})|} \delta(t - t^{\dot{\nu}}) \quad (6.31)$$

Hierbei stellen  $t^{\dot{\nu}}$  mit  $\dot{\nu} = 1, \dots, n$  die einfachen Nullstellen der Funktion (6.30) dar:

$$\varrho(t^{\dot{\nu}}) = 0; \quad \dot{\nu} = 1, \dots, n \quad (6.32)$$

Beseichnen wir diese Nullstellen der Funktion (6.30) mit  $t^{\dot{\nu}} = t_{\text{ret}, \dot{\nu}}$  für  $\dot{\nu} = 1, \dots, n$ , so sind sie Lösungen der impliziten Gleichung

$$t - t_{\text{ret}, \dot{\nu}} = \frac{|\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})|}{c}; \quad \dot{\nu} = 1, \dots, n \quad (6.33)$$

Ferner erhalten wir für die Ableitung der Funktion (6.30)

$$\dot{\varrho}(t) = 1 - \frac{\vec{r} - \vec{R}(t)}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \cdot \frac{\dot{\vec{R}}(t)}{c} \quad (6.34)$$

Unter Berücksichtigung von (6.31) und (6.34) lassen sich dann die beiden  $t^{\dot{\nu}}$ -Integrale in (6.26), (6.27) formal ausführen und wir erhalten:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\dot{\nu}=1}^n \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})|} \cdot \frac{1}{|\dot{\varrho}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})|} \quad (6.35)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \sum_{\dot{\nu}=1}^n \frac{\dot{\vec{R}}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})}{|\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})|} \cdot \frac{1}{|\dot{\varrho}(t_{\text{ret}, \dot{\nu}})|} \quad (6.36)$$

Dies sind die retardierten Potentiale einer bewegten Punktladung und werden als Liénard-Wiechert-Potentiale bezeichnet.

Es ist zu beachten, dass nur diejenigen Lösungen  $t_{\text{ret}, \dot{\nu}}$  für  $\dot{\nu} = 1, \dots, n$  von (6.33) zu unterscheidenden Summanden in den Liénard-Wiechert-Potentiale führen, die physikalisch sind. Es ist zu verlangen, dass eine physikalische Retardierungszeit  $t_{\text{ret}, \dot{\nu}}$  reell ist und dass sie der Kausalitätsbeziehung

$$t - t_{\text{ret}, \dot{\nu}} \stackrel{(6.33)}{\geq} 0 \quad (6.37)$$

genügen muss.

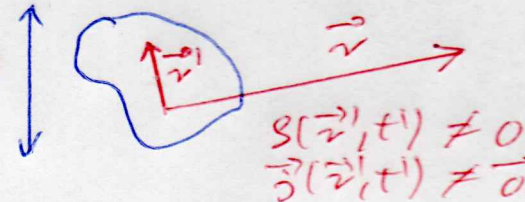
Im Falle einer gleichförmig bewegten Punktladung im Vakuum stellt sich heraus, dass (6.33) nur eine einzige Lösung besitzt, so dass die Liénard-Wiechert-Potentiale (6.35), (6.36) nur aus einem Summanden bestehen.

Bewegt sich aber eine Punktladung gleichförmig in Ma-  
terie, so kann dessen Geschwindigkeit größer werden  
als die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagne-  
tischer Wellen in diesem Medium. Dann gibt es Raum-  
bereiche, wo (6.33) keine Lösung besitzt und die Liénard-  
Wiedert-Potentiale (6.35), (6.36) verschwinden. In an-  
deren Raumbereichen wiederum hat (6.33) sogar zwei  
physikalische Lösungen, sodass (6.35), (6.36) aus zwei Sum-  
manden bestehen. Im Grenzbereich, wo diese bei-  
den Raumbereiche aufeinander stoßen, werden die Lié-  
nard-Wiedert-Potentiale sogar unendlich groß und  
führen dort zur sogenannten Tschernikow-Strahlung.  
Man besteht eine physikalische Analogie zum Mach-  
Zögel der Akustik.

## 7. Vertaxialer Dipol:

Wir wenden uns nun dem Problem zu, das elektromagnetische Feld zu berechnen, das von einer zeitabhängigen, lokalisierten Ladungs- und Stromverteilung erzeugt wird. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, das elektromagnetische Feld weit weg von der Ladungs- und Stromverteilung zu betrachten:

Näherung:  $r \gg l$  (7.1)



$\rho(\vec{r}', t) \neq 0$   
 $\vec{j}(\vec{r}', t) \neq \vec{0}$

### 7.1 Nah- und Fernzone:

Wir gehen hierzu von einer Ladungsverteilung aus, die harmonisch mit der Frequenz  $\omega$  schwingt:

$$\rho(\vec{r}', t) = \rho(\vec{r}') \sin \omega t \quad (7.2)$$

Hierbei beschreibt  $\rho(\vec{r}')$  die räumliche Ausdehnung der Ladungsverteilung. Es sieht zunächst so aus, als ob (7.2) nur einen Spezialfall darstellt. Wir können aber eine beliebige Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}', t)$  immer in ihre Fourier-Komponenten zerlegen. Dabei beinhaltet die Lösung des speziellen Problems (7.2) in Wirklichkeit sogar die Lösung des allgemeinen Problems.

Wir wenden nun das retardierte Vektorpotential (6.18) für die Näherung  $r \gg l$  in führender Ordnung berechnen. Wir erhalten zunächst

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} \quad (7.3)$$

Eine entsprechende Näherung in der Stromverteilung

$$\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \approx \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \quad (7.4)$$

würde aber bedeuten, dass  $\vec{j}(\vec{r}', t)$  immer zur gleichen Zeit  $t' = t - r/c$  ausgewertet wird unabhängig vom Ort  $\vec{r}'$ . Wir erwarten aber, dass  $\vec{j}(\vec{r}', t)$  wie  $\rho(\vec{r}', t)$  in (7.2) mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , d.h. der Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  oszilliert. Deshalb ist die Näherung (7.4) nur dann physikalisch konsistent, wenn die Retardierungszeit  $r/c \lesssim l/c$  innerhalb der Ladungsverteilung klein gegenüber der Periodendauer  $T$  ist:

$$\frac{l}{c} \ll T \quad (7.5)$$

Aufgrund von (5.36) geht (7.5) über in

$$l \ll cT = \lambda \quad (7.6)$$

Um nun aber sowohl (7.2) als auch (7.6) erfüllen zu können, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder befindet man sich in der Nahzone

$$Nz: \quad l \ll r \ll \lambda \quad (7.7)$$

oder aber in der Fernzone

$$Fz: \quad l \ll \lambda \ll r \quad (7.8)$$

Wir erwarten, dass sich die elektromagnetischen Felder in der Nahzone grundsätzlich von denen in der Fernzone unterscheiden.

### 7.2 Vektorpotential:

Das Einsetzen der beiden Näherungen (7.3), (7.4) in das retardierte Vektorpotential (6.18) führt auf

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}) dV' \quad (7.9)$$

Da wir die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}', t')$  im allgemeinen nicht kennen, können wir das Volumenintegral (7.9) so nicht direkt auswerten. Verwenden wir aber die Kontinuitätsgleichung (6.3), so lässt sich das Volumenintegral (7.9) indirekt auswerten. Hierzu betrachten wir das Integral

$$I_k = \int dV' \left\{ j_k(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) - x'_k \frac{\partial \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c})}{\partial t} \right\} \quad (7.10)$$

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (6.3) reduziert sich (7.10) auf

$$I_k = \int dV' \operatorname{div}' \left\{ x'_k \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) \right\} \quad (7.11)$$

so dass das Integral aufgrund des Satzes von Gauß verschwindet:

$$I_k = 0 \quad (7.12)$$

Demnach erhalten wir für das in (7.9) auszuführende Volumenintegral aus (7.10) und (7.12):

$$\int \vec{j}(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' \quad (7.13)$$

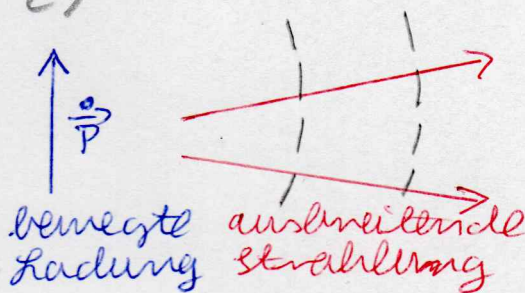
Führen wir das elektrische Dipolmoment

$$\vec{P}(t) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) dV' \quad (7.14)$$

der Ladungsverteilung ein, so reduziert sich (7.9) schließlich auf das Ergebnis

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (7.15)$$

Demnach fällt das Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  mit dem Radius  $r$  ab, was sich durch eine auslaufende Kugelwelle interpretieren lässt: Eine Welle besitzt immer eine Energiedichte, die proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Und im Abstand  $r$  verteilt sich die Energiedichte einer Welle auf der Kugeloberfläche  $4\pi r^2$ . Für eine Kugelwelle ist nun charakteristisch, dass ihre Gesamtenergie auf  $\vec{p}$ -der Kugeloberfläche dieselbe ist. Hieraus folgt dann, dass die Amplitude einer Kugelwelle proportional mit  $1/r$  abfällt, so wie dies in (7.15) der Fall ist.



### 7.3 Magnetfeld:

Wir berechnen nun mit Hilfe von (6.5) das zu (7.15) gehörende Magnetfeld. Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, dass das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung in  $z$ -Richtung des kartesischen Koordinatensystems zeigt

$$\vec{p}(t) = p(t) \vec{e}_z \quad (7.16)$$

so dass sich (7.15) reduziert auf

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_z \quad (7.17)$$

Das Magnetfeld (6.5) lautet dann

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z(\vec{r}, t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r}, t)}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z(\vec{r}, t)}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

Für die  $x$ -Komponente erhalten wir

$$B_x(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 \gamma}{4\pi r^3} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\mu_0 \gamma}{4\pi c r^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (7.19)$$

und entsprechend für die  $y$ -Komponente

$$B_y(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 x}{4\pi r^3} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\mu_0 x}{4\pi c r^2} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (7.20)$$

Demnach lässt sich das Magnetfeld in zwei Beiträge zerlegen:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_{Nz}(\vec{r}, t) + \vec{B}_{Fz}(\vec{r}, t) \quad (7.21)$$

In der Nahzone (7.7) gilt

$$\vec{B}_{Nz}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.22)$$

und in der Fernzone (7.8) haben wir

$$\vec{B}_{Fz}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{r}}{r^2} \quad (7.23)$$

Es ist zu beachten, dass (7.22) und (7.23) zwar für den Spezialfall (7.16) hergeleitet wurden, dass sie das Magnetfeld aber auch im Falle eines allgemeinen elektrischen Dipolmomentes darstellen. Der wesentliche Unterschied zwischen (7.22) und (7.23) besteht in der Ortsabhängigkeit. In der Nahzone (7.22) fällt das Magnetfeld mit  $1/r^2$  ab, in der Fernzone (7.23) dagegen mit  $1/r$ .

#### 7.4 Skalares Potential:

Bei der Näherung des retardierten skalaren Potentials (6.17) für  $r \gg l$  muss man allerdings den Abstand  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  bis zur ersten Ordnung in  $\vec{r}'$  entwickeln:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \left( 1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \quad (7.24)$$

Setzen wir (7.24) in (6.17) ein und führen wir systematisch eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung in  $\vec{r}'$  durch, so erhalten wir

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' + \frac{\vec{r}}{c r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - \frac{r}{c}) dV' \right\} \quad (7.25)$$

Das erste Volumenintegral verschwindet bei einer neutralen Ladungsverteilung, während das zweite und dritte Volumenintegral auf das elektrische Dipolmoment (7.14) führen:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{\vec{r}}{c r^2} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \right\} \quad (7.26)$$

Wir überprüfen zunächst, ob die Ergebnisse (7.15) und (7.26) für die retardierten Potentiale mit  $r \gg l$  mit der Lorentz-Gleichung (6.14) kompatibel sind. Einerseits folgt aus (7.15)

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) - \frac{\vec{r}}{c r^2} \cdot \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c}) \right\} \quad (7.27)$$

andererseits erhalten wir aus (7.26) mit (4.17)

$$\frac{-1}{c^2} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{-\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\vec{r}}{c^2 r^2} \cdot \ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \quad (7.28)$$

in Übereinstimmung mit der Lorentz-Gleichung (6.14).

### 7.5 Elektrische Feldstärke:

Wir berechnen nun mit Hilfe von (6.7) das entsprechende elektrische Feld. Auch hier verwenden wir zur Vereinfachung die Bedingung die Annahme (7.16), so dass sich (7.26) reduziert auf

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{q}{c^2 r^2} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} \quad (7.29)$$

Aus (7.17), (7.29) ergibt sich das elektrische Feld (6.7) zu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial r^3} p \left( t - \frac{r}{c} \right) - 3 \frac{q}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} p \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{q}{c^2 r^3} \frac{\vec{r}}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\partial^2 p}{c^2 r^2} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{2q}{c^2 r^3} \frac{\vec{r}}{r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) - \frac{q}{c^2 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \right\} - \frac{\mu_0 q \ddot{p}}{4\pi r} \dot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad (7.30)$$

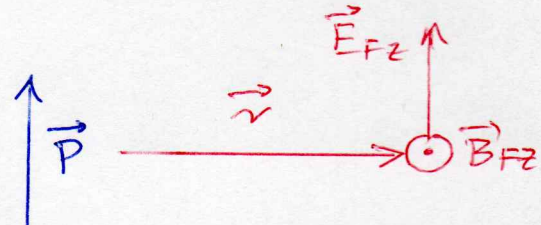
In der Fernzone reduziert sich (7.30) mit (4.17) auf

$$\vec{E}_{FZ}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\ddot{\vec{p}} \left( t - \frac{r}{c} \right) \times \vec{r}] \times \vec{r}}{r^3} \quad (7.31)$$

und schließlich lesen wir aus (7.23) und (7.31) für die Fernzone ab:

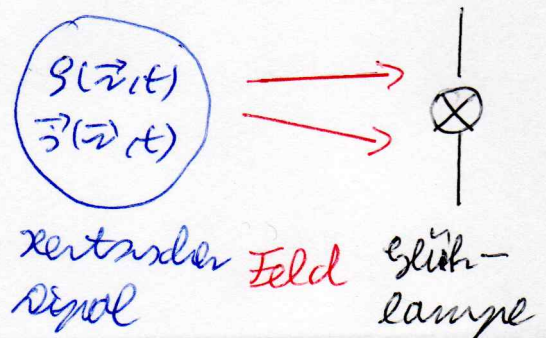
$$\vec{E}_{FZ}(\vec{r}, t) = c \vec{B}_{FZ}(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.32)$$

Demnach stehen elektrisches und magnetisches Feld senkrecht aufeinander. Außerdem gilt nach (7.23) und (7.31), dass sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{r}$  stehen. Wir bemerken ferner, dass die Beträge von  $\vec{E}_{FZ}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}_{FZ}(\vec{r}, t)$  mit dem Abstand  $r$  abfallen, wie das für Zugwellen typisch ist.



### 7.6 Motivation:

Nachdem wir nun die elektromagnetischen Felder in der Fernzone kennen, interessieren wir uns dafür, wie hell die Glühlampe im Empfänger leuchtet und welche Leistung der Hertzsche Dipol in welcher Richtung abstrahlt.



Das Leuchten der Glühlampe zeigt, dass der Empfänger Energie absorbiert. Diese Energie steht im elektromagnetischen Feld, das sich vom Zentralsender zum Empfänger hin ausbreitet. Wir werden nun eine Energiebilanz für das elektromagnetische Feld aufstellen.

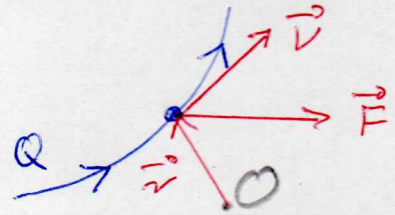
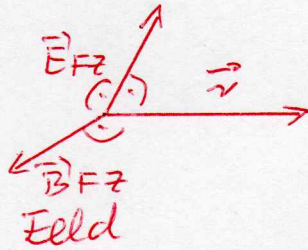
### 7.7 Energiebilanz:

Aufgrund der Erhaltung der Energie muss eine Änderung der elektromagnetischen Feldenergie durch den Zu- oder Abfluss von Strahlungsenergie bzw. den Austausch von Energie mit geladenen Teilchen wie z. B. im Empfänger erfolgen:

$$\rho(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t)$$

Zentralsender Dipol



Bewegte Ladung

Die Lorentz-Kraft (4.18) beschreibt die Impulsänderung eines geladenen Teilchens pro Zeiteinheit

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \quad (7.33)$$

Die dadurch verursachte Energieänderung des Teilchens pro Zeiteinheit ist die Leistung

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} W \quad (7.34)$$

Setzen wir die Lorentz-Kraft (4.18) in (7.34) ein, so entfällt der Term mit dem Magnetfeld, da dieser senkrecht auf der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  steht:

$$Q \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} W \quad (7.35)$$

Wir wenden nun die Energiebilanz (7.35) für ein einzelnes geladenes Teilchen auf ein kontinuierlich ausgedehntes System erweitern. Hierzu führen wir die mechanische Energiedichte  $w_m(\vec{r}, t)$  ein:

$$W = \int w_m(\vec{r}, t) dV \quad (7.36)$$

Damit geht (7.35) im Kontinuumsgrenzfall über in

$$\int \frac{\partial w_m(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = \int \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} dV = \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) dV \quad (7.37)$$

Zurück haben wir die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}$  eingeführt. Der Energiefluss ins mechanische System

pro Zeit- und Volumeneinheit wird demnach beschrieben durch

$$\frac{\partial W_{\text{em}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (7.38)$$

da (7.37) für jedes Volumen gilt.

### 7.8 Verwendung der Maxwell-Gleichungen:

Wir wenden nun (7.38) unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen weiter aus. Zunächst eliminieren wir mit Hilfe von (4.15) die Stromdichte  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{\partial W_{\text{em}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\} \quad (7.39)$$

Ausschließend verwenden wir eine Vektoridentität, die sich komponentenweise überprüfen läßt:

$$\text{div}[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] = \vec{B}(\vec{r}, t) \text{ rot } \vec{E}(\vec{r}, t) - \vec{E}(\vec{r}, t) \text{ rot } \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (7.40)$$

Damit erhalten wir aus (7.39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{em}}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{-1}{\mu_0} \text{div}[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &- \frac{1}{\mu_0 c^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (4.14), (4.17) - \text{div} \left[ \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] \\ &- \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.41)$$

Der Energieerhaltungssatz (7.41) für das Feld-Materie-System läßt sich damit auf folgende Form bringen:

$$\frac{\partial W_{\text{em}}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial W_e(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{S}(\vec{r}, t) = 0 \quad (7.42)$$

Hierbei lautet die Dichte der elektromagnetischen Feldenergie

$$W_e(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \quad (7.43)$$

und der Poynting-Vektor, der die Energiestromdichte beschreibt, ist gegeben durch

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (7.44)$$

Die physikalische Interpretation von (7.42) erschließt sich durch Integration über ein Volumengebiet  $V$  und der Verwendung des Gaußschen Satzes im dritten Term

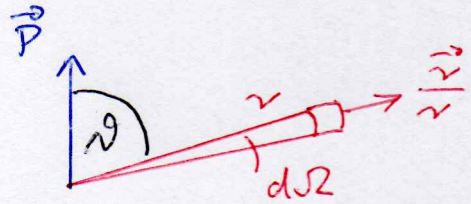
$$\frac{d}{dt} \int_V W_e(\vec{r}, t) dV + \frac{d}{dt} \int_V W_{\text{em}}(\vec{r}, t) dV + \oint_{\partial V} \vec{S}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{F} = 0 \quad (7.45)$$

Der erste bzw. zweite Term beschreibt die Änderung der

Feldenergie bzw. der mechanischen Energie pro Zeiteinheit im Volumen  $V$ , während der dritte Term die durch den Rand  $\partial V$  des Volumens  $V$  strömende Feldenergie darstellt.

### 7.9 Anwendung auf Zertaxchen Dipol:

Wir berechnen nun, wieviel Leistung  $dP$  in einen Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlt wird:



$$dP = \frac{2}{4\pi} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) r^2 d\Omega \quad (7.46)$$

Befinden wir uns weit weg vom Zertaxchen Dipol, dann können wir den Poynting-Vektor (7.44) in der Fernzone berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{S}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{F2}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \stackrel{(7.32)}{=} \frac{c}{\mu_0} \left[ \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \times \frac{\vec{r}}{r} \right] \times \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \\ &= \frac{c}{\mu_0} \left\{ \frac{\vec{r}}{r} \left[ \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \right]^2 - \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \left[ \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{B}_{F2}(\vec{r}, t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.47)$$

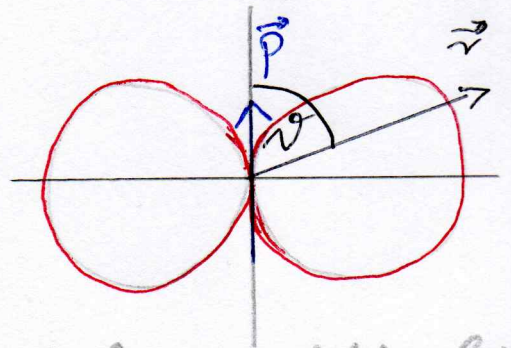
Der zweite Term in (7.47) verschwindet, da das Magnetfeld in der Fernzone gemäß (7.23) senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung  $\vec{r}$  steht. Einsetzen von (7.23) in (7.47) führt daher für den Zertaxchen Dipol auf

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c \mu_0} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right)^2 \frac{r^2 \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})^2 \sin^2 \vartheta}{r^4} \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.48)$$

wobei  $\vartheta$  den Winkel zwischen dem elektrischen Dipolmoment  $\vec{p}$  und der Ausbreitungsrichtung  $\vec{r}$  bezeichnet. Einsetzen von (7.48) in (7.46) führt auf die Strahlungsleistung pro Raumwinkel  $d\Omega$ :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})^2 \sin^2 \vartheta}{16 \pi^2 c} \quad (7.49)$$

Dennach erfolgt eine maximale Abstrahlung in der Ebene senkrecht zum Zertaxchen Dipol mit  $\vartheta = \pi/2$ , keine Abstrahlung erfolgt in Richtung des Dipols mit  $\vartheta = 0, \pi$ .



Die insgesamt vom Zertaxchen Dipol abgestrahlte Leistung ergibt sich dadurch, dass (7.49) über den gesamten Raumwinkel integriert wird. Dies führt auf folgende Nebenrechnung:

$$\int \sin^2 \vartheta d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta)$$

$$\underline{u(\vartheta) = \cos \vartheta} \int_{-1}^{+1} du (1-u^2) \cdot 2\pi = 2\pi \left[ u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{-1}^{+1} = \frac{8\pi}{3} \quad (7.50)$$

Damit lautet das Ergebnis

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega \stackrel{(7.49), (7.50)}{\approx} \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right)^2 \approx \frac{\mu_0 \ddot{p}(t)^2}{6\pi c} \quad (7.51)$$

Für eine Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}', t')$  der Form (7.2) folgt das elektrische Dipolmoment (7.14) zu

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin \omega t, \quad \vec{p}_0 = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (7.52)$$

Einssetzen von (7.52) in (7.51) führt für die im zeitlichen Mittel im Fernfeld abgestrahlte Leistung

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(t) \quad (7.53)$$

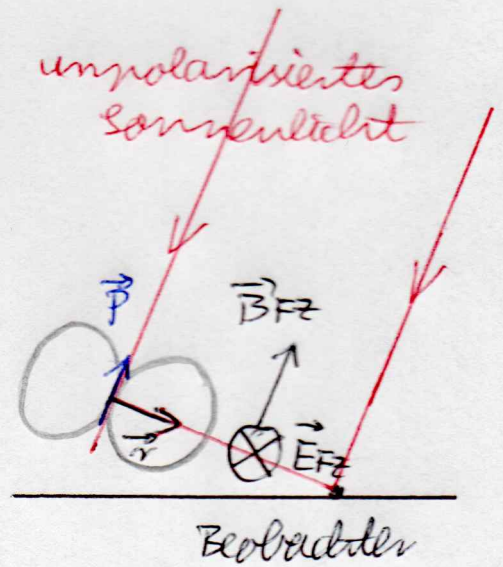
auf das Strahlungsgesetz von Lord Rayleigh

$$\bar{P} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \quad (7.54)$$

Es besagt, dass große Frequenzen besonders stark abstrahlen. Eine praktische Anwendung dieses Resultates ist die Erklärung dafür, dass die Farbe des Himmels blau ist. Das Sonnenlicht regt in der oberen Luftschicht Elementardipole zu Schwingungen an. Da die Wellenlänge des roten Lichts mit  $\lambda(\text{rot}) = 800 \text{ nm}$  doppelt so groß ist wie die des blauen Lichts mit  $\lambda(\text{blau}) = 400 \text{ nm}$ , strahlen die vom blauen Licht angeregten Elementardipole nach dem Rayleigh-Strahlungsgesetz (7.54) 16-mal so viel Energie ab wie die vom roten Sonnenlicht angeregten Dipole. Man kann nun davon ausgehen, dass ein solcher Dipol genau so viel Energie absorbiert wie er auch abstrahlt. Dann besagt das Rayleigh-Strahlungsgesetz (7.54), dass das blaue Licht 16-mal so stark absorbiert wird wie das rote Licht. Demnach ist die Eindringtiefe des blauen Lichts mit  $d(\text{blau}) = 4 \text{ km}$  etwa 16-mal so klein wie die des roten Sonnenlichts mit  $d(\text{rot}) = 64 \text{ km}$ . Am Tag gelangt das Sonnenlicht durch eine 8 km dicke Atmosphärenschicht. Dann ist ein Teil des blauen Sonnenlichts durch die Dipole der Atmosphäre schon absorbiert und gestreut worden, während das rote Sonnenlicht noch gar nicht gestreut wurde, so dass der Himmel blau ist. Im Abend dagegen liegt eine umgekehrte Situation vor, da das Sonnenlicht durch eine bis zu 100 km dicke Atmosphäre gelangt. Dann ist das blaue Licht schon längst absor-

bient werden, und nur noch das rote Licht wird etwas absorbiert und gestreut, was als blendrot sichtbar ist.

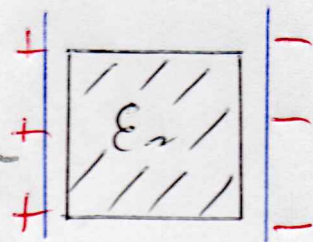
Abschließend diskutieren wir noch die Polarisation des Streulichts. Das Sonnenlicht selber ist unpolarisiert. Es werden Dipole in der Atmosphäre angeregt, die senkrecht zur Ebene Sonnenlicht/Beobachter orientiert sind. Dann können die Dipole maximale Energie zum Beobachter abstrahlen. Blickt man also  $90^\circ$  zur Sonne, so ist das beobachtete Streulicht eindeutig polarisiert.



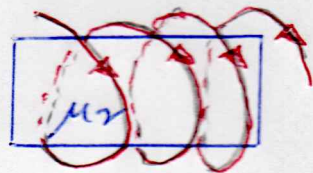
## 8. Elektrodynamik in Materie

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, die Elektrodynamik im Vakuum in Anwesenheit freier Ladungen und Ströme zu behandeln. Nun wollen wir die Beschreibung erweitern und auch elektrodynamische Phänomene in Materie behandeln. Zwei grundlegende Beispiele aus Schule und Technik sollen erläutern, dass dieses Gebiet von praktischer Bedeutung ist.

- Plattenkondensator mit Dielektrikum: Die Kapazität  $C$  eines Kondensators erhöht sich beim Eindringen eines Dielektrikums um die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$ , d.h.  $C \sim \epsilon_r$ .



- Spule mit Eisenkern: Die Induktivität  $L$  einer Spule erhöht sich bei Anwesenheit eines paramagnetischen Kerns um die relative Permeabilitätskonstante  $\mu_r$ , d.h.  $L \sim \mu_r$ .



Wir untersuchen im folgenden, wie sich die Maxwell-Gleichungen in Materie verändern. Dabei ist zu berücksichtigen, dass neben den freien und gebundenen Ladungen und Ströme auftreten können. Es stellt sich heraus, dass gebundene Ladungen die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  durch die Polarisation der Materie abschwächen. Im Unterschied dazu führen die gebundenen Ströme dazu, dass die magnetische Induktion  $\vec{B}$  durch die Magnetisierung der Materie bei Paramagnetismus vergrößert und bei Diamagnetismus verkleinert wird.

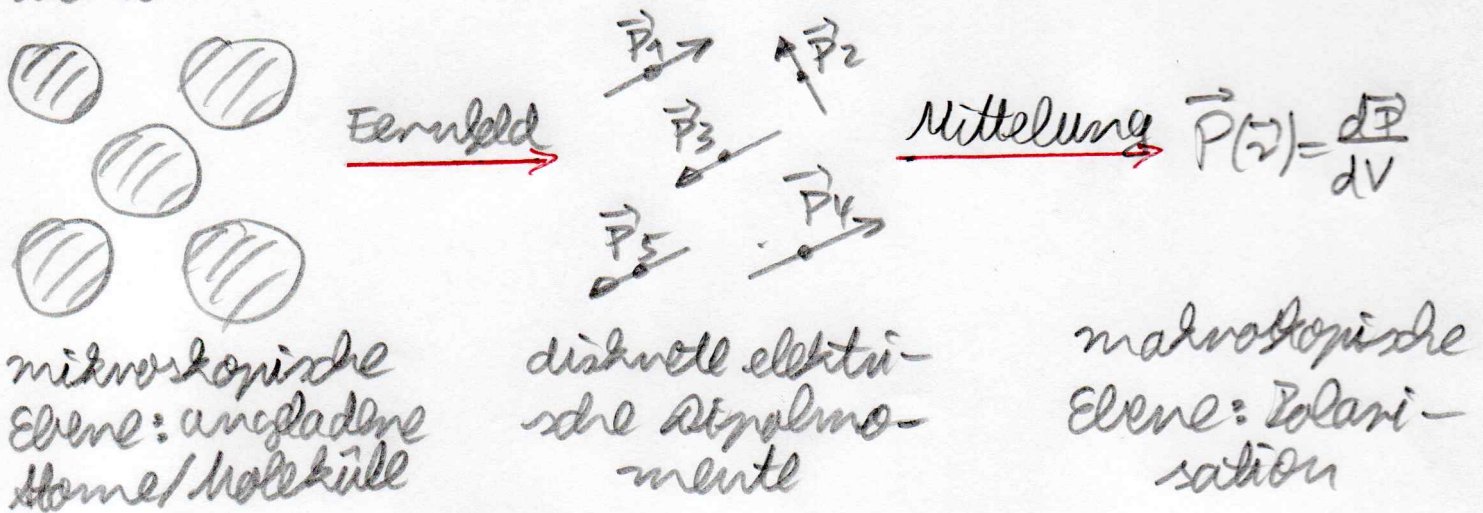
### 8.1 Makroskopische Elektrostatik:

Bisher wurde die Elektrostatik nur für freie Ladungen im Vakuum erfaßt. Um elektrische Felder auch in einem nicht-leitenden Medium beschreiben zu können, ist eine Erweiterung erforderlich. Ein solches Dielektrikum besitzt nämlich auch nicht frei bewegliche Ladungen, die man als gebundene Ladungen bezeichnet und die Anwesenheit dieser gebundenen Ladungen verändert das elektrische Feld.

In einem Dielektrikum werden nämlich elektrische Dipolmomente induziert oder bereits existierende elektrische Dipole werden durch ein elektrisches Feld ausgerichtet. Dieser Effekt wird durch die Polarisation  $\vec{P}$  beschrieben, die als Dipoldichte das elektrische Dipolmoment pro Volumen beschreibt:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (8.1)$$

Bei dieser Definition der Polarisation haben wir offenbar ein Kontinuum angenommen. In Wirklichkeit aber besteht ein Dielektrikum aus diskreten Atomen oder Molekülen. In der makroskopischen Elektrostatik betrachten wir Größen, die zwar im Vergleich zur atomaren Längenskala von  $10^{-10}$  m über große, aber im Vergleich zur Systemgröße kleine räumliche Skalen als gemittelte Größen zu verstehen sind. Im folgenden gehen wir von der bisher bekannten mikroskopischen Elektrostatik aus und zeigen, wie sich die makroskopische Elektrostatik daraus ableiten lässt. Die dabei erforderliche Grundidee lässt sich wie folgt schematisch darstellen:



### 8.1.1 Multivalentwicklung:

Eine mikroskopische Ladungsdichte  $\rho(\vec{r}')$  führt zum elektrischen Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.2)$$

Die Ladungsdichte soll dabei räumlich begrenzt sein

$$\rho(\vec{r}') \begin{cases} \neq 0 & ; |\vec{r}'| < R \\ = 0 & ; |\vec{r}'| > R \end{cases} \quad (8.3)$$

und wir sind am elektrischen Potential  $\varphi(\vec{r})$  an einem Ort  $\vec{r}$  weit weg vom Raumbereich der Ladungsdichte interessiert, so dass gilt

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}| \quad (8.4)$$

Deshalb lässt sich das Coulomb-Potential als  $\varphi(\vec{r})$  - die Funktion der Poisson-Gleichung in (8.2) in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \dots \right\} \quad (8.5)$$

Einsetzen von (8.5) in (8.2) führt auf die Multipolentwicklung des elektrischen Potentials

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \right\} \quad (8.6)$$

Hierbei bezeichnet  $q$  die Ladung, also den Monopol, der Ladungsverteilung

$$q = \int dV' \rho(\vec{r}') \quad (8.7)$$

und  $\vec{p}$  bezeichnet das elektrische Dipolmoment

$$\vec{p} = \int dV' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \quad (8.8)$$

### 8.1.2 Gebundene Ladungen:

Wir konzentrieren uns nun auf die Beschleunigung der gebundenen Ladungen eines Dielektrikums. Da die Atome und Moleküle elektrisch neutral sind, verwendet deren Monopolbeitrag im Fernfeld (8.4). Daher ist der führende Beitrag von Atomen und Molekülen durch den Dipolbeitrag gegeben. Im folgenden werden wir alle höheren Multipolbeiträge nicht berücksichtigen, da deren Beiträge gegenüber dem Dipolbeitrag vernachlässigbar sind.

Wir summieren daher über die elektrischen Dipole  $\vec{p}_k$  aller Atome und Moleküle im Dielektrikum an den jeweiligen Orten  $\vec{r}_k$  und erhalten für das elektrische Potential der gebundenen Ladungen

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{\vec{p}_k \cdot (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (8.9)$$

Alle diese diskreten Dipolbeiträge lassen sich nun in eine Kontinuumsform überführen:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.10)$$

wobei die Polarisation  $\vec{p}$  normal als Volumendichte der elektrischen Dipolmomente eingeführt wurde

$$\vec{P}(\vec{r}') = \sum_k \vec{p}_k \delta(\vec{r}' - \vec{r}_k) \quad (8.11)$$

Zurück beibringt (8.10) schon die gesuchten Ausdrücke für die gebundenen Ladungen des Dielektrikums auf das elektrische Potential. Man kann aber (8.10) noch weiter umformen und dabei ein physikalisch intuitiveres Resultat erzielen.

Dies zu erinnern wir an die Identitäten

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.12)$$

Einsetzen von (8.12) in (8.10) führt auf

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.13)$$

Es liegt nun nahe, eine partielle Integration auszustreben:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left\{ \vec{\nabla}' \left[ \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}') \right\} \quad (8.14)$$

Im ersten Term werden wir nun den Satz von Gauß an. Im Unterdieck zu anderen Anwendungen des Satzes von Gauß vernachlässigen wir aber dieses Mal nicht das resultierende Oberflächenintegral. Wir gehen nämlich in (8.10) bzw. (8.14) davon aus, dass wir ein endlich großes Volumen  $V$  des Dielektrikums betrachten. Damit geht (8.14) über in

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{-\operatorname{div}' \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot d\vec{F}' \quad (8.15)$$

Der erste Term sieht so aus wie das elektrische Potential einer Volumendichtungsquelle

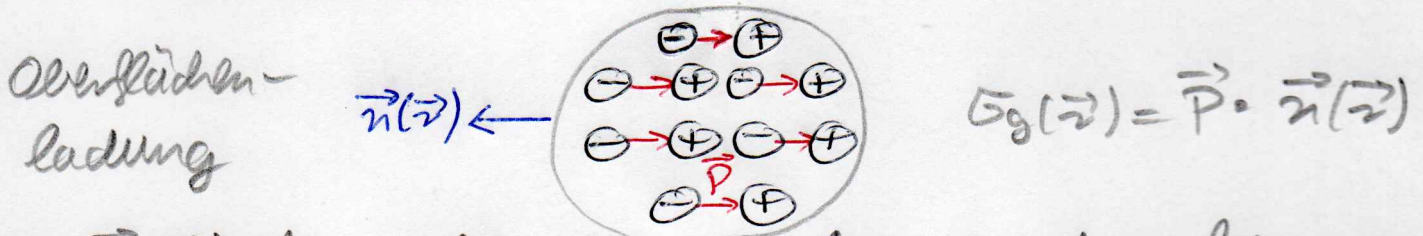
$$\varphi_g(\vec{r}) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}) \quad (8.16)$$

während der zweite Term dem elektrischen Potential einer Flächenladungsdichte

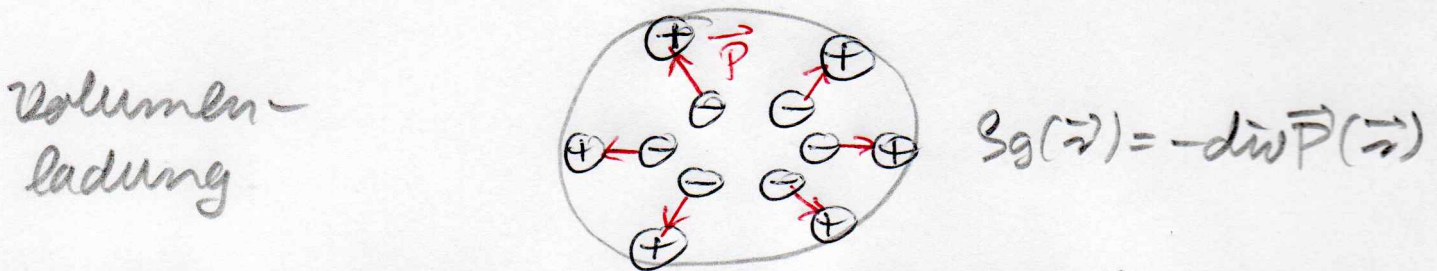
$$\varphi_g(\vec{r}) = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r}) \quad (8.17)$$

entspricht, wobei  $\vec{n}(\vec{r})$  den Normalenvektor der Oberfläche  $\partial V$  bezeichnet. Die Beiträge (8.16) und (8.17) stammen also von den gebundenen Ladungen des Dielektrikums, die man auch als Polarisationladungen bezeichnen

Man kann auch intuitiv verstehen, wie die gebundenen Ladungen aufgrund der Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  zustande kommen. Hierzu stellen wir uns  $\vec{P}(\vec{r})$  aus kleinen elektrischen Dipolen zusammen gesetzt vor. Ist  $\vec{P}(\vec{r}) = \text{const.}$ , so kompensieren sich die positiven und negativen Ladungen der einzelnen Dipole im Inneren, aber nicht an der Oberfläche. Dies erklärt die Entstehung der Flächenladungsdichte (8.17):



Ist  $\vec{P}(\vec{r})$  aber nicht räumlich konstant, so kompensieren sich die gebundenen Ladungen der einzelnen elektrischen Dipole nicht mehr im Volumen und es entsteht eine Volumenladungsdichte (8.16):



Mit Hilfe von (8.16) und (8.17) geht (8.15) über in das Endergebnis für das elektrische Potential der gebundenen Ladungen:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\epsilon_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} dF' \frac{\epsilon_g(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.18)$$

### 8.1.3 Entelektroskopwertmesser:

Wir betrachten nun als Spezialfall eine Polarisation, die räumlich konstant ist, d.h.  $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}$ . Dann folgt aus (8.16) - (8.18):

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial V} \frac{dF(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \vec{P} \quad (8.19)$$

Für die entsprechende elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_g(\vec{r}) = -\text{grad} \varphi_g(\vec{r}) \quad (8.20)$$

erhalten wir dann die Komponenten

$$E_{g_i}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} N_{ij}(\vec{r}) P_j \quad (8.21)$$

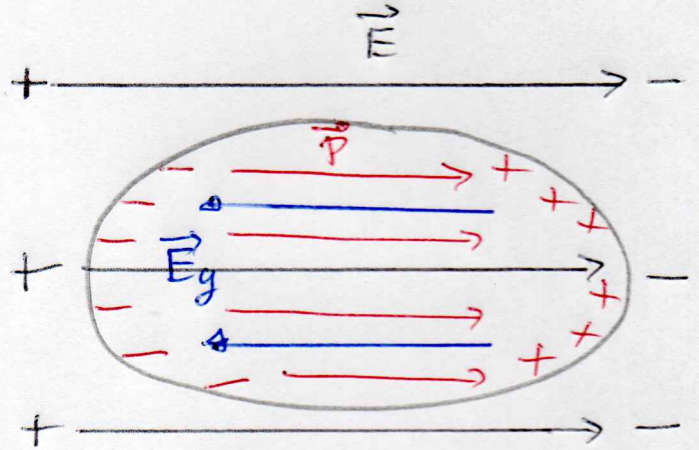
mit dem Entelektroskop

$$N_{ii}(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{x_i - x'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dF'_i \quad (8.22)$$

offenbar führt die Oberflächenladung der Polarisation zu einem elektrischen Feld, das gemäß

$$\vec{E}_g = -\frac{1}{\epsilon_0} N \vec{P} \quad (8.23)$$

der Polarisation entgegengesetzt gerichtet ist.



Für den Entelektroskop  $N$  können wir nun eine Spurbedingung ableiten. Für die Spur von  $N$  erhalten wir zunächst

$$SPN = N_{ii} \stackrel{(8.22)}{=} \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{F}' \quad (8.24)$$

Aufgrund von (8.12) reduziert sich dies auf

$$SPN = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[ \vec{r}' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \cdot d\vec{F}' \quad (8.25)$$

Ist das Kindersatz von Gauß angewandt werden:

$$SPN = \frac{-1}{4\pi} \int_V dV' \Delta' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.26)$$

Da das Coulomb-Potential gemäß (2.36) die Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung ist, folgt

$$SPN = \frac{-1}{4\pi} \int_V dV' (-4\pi) \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 1 \quad (8.27)$$

da angenommen wurde, dass  $\vec{r}$  innerhalb des Volumens  $V$  liegt. Im Falle eines symmetrischen Volumens läßt sich diese Spurbedingung ausnutzen, um den Entelektroskop festzulegen, ohne das Oberflächenintegral (8.22) ausrechnen zu müssen. Beispielsweise gilt für eine Kugel aus Symmetriegründen

$$N = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

in Übereinstimmung mit (8.27).

#### 8.1.4 Elektrisches Verschiebungsfeld:

Im Allgemeinen liegen in einem Medium sowohl freie als auch gebundene Ladungen vor. Die gesamte Ladungs-

dichte lautet daher

$$\rho(\vec{r}) = \rho_g(\vec{r}) + \rho_p(\vec{r}) \quad (8.29)$$

wobei die Ladungsdichte der gebundenen Ladungen durch (8.16) gegeben ist. Das entsprechende Gauß-Gesetz der Elektrostatik lautet daher:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (8.16), (8.29) \quad \frac{\rho_g(\vec{r})}{\epsilon_0} - \frac{\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (8.30)$$

Führt man das dielektrische Verschiebungsfeld

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \quad (8.31)$$

ein, so folgt aus (8.30):

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho_g(\vec{r}) \quad (8.32)$$

Das heißt, dass die Quellen des dielektrischen Verschiebungsfeldes  $\vec{D}(\vec{r})$  nur die freien Ladungen sind. Dies ist das Gauß-Gesetz für dielektrika. Offenbar hat die Umformulierung des Gauß-Gesetzes in dielektrika keinerlei Auswirkungen auf die zweite Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \quad (8.33)$$

Bildet man die Rotation von (8.31), so folgt mit (8.33)

$$\operatorname{rot} \vec{D}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{P}(\vec{r}) \quad (8.34)$$

Das bedeutet also, dass die Wirbeldichte des dielektrischen Verschiebungsfeldes  $\vec{D}(\vec{r})$  durch die Wirbeldichte der Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  gegeben ist. Aus (8.32) und (8.34) folgt also mit Hilfe des Helmholtzschen Vektorsatzes, dass zur Berechnung des dielektrischen Verschiebungsfeldes  $\vec{D}(\vec{r})$  nicht nur die freie Ladungsdichte  $\rho_g(\vec{r})$  sondern auch die Polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  bekannt sein muss.

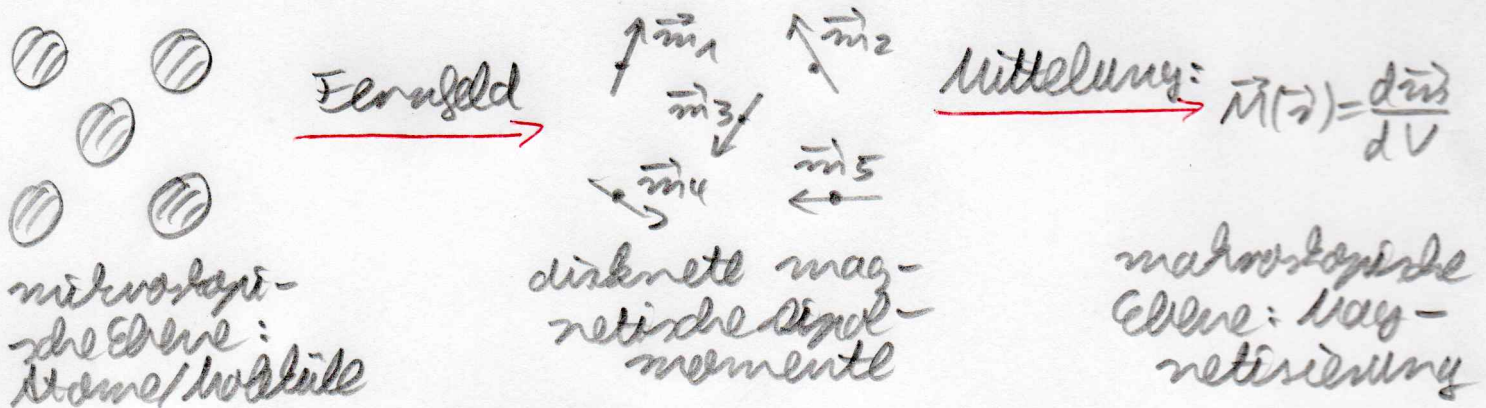
## 8.2 Makroskopische Magnetostatik:

Die bisherige Beschreibung der Magnetostatik ist auf Magnetfelder beschränkt, die durch freie Ströme im Vakuum hervorgerufen werden. Diese Beschreibung ist zu erweitern, um auch Magnetfelder in Materie bestimmen zu können. Durch die Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes werden in der Materie gebundene Ströme induziert, die bei Paramagnetismus (Diamagnetismus) zu einer Verstärkung (Verringerung) des von freien Strömen hervorgerufenen

nen Magnetfeldes in der Materie führen. Dieser Effekt wird quantitativ durch die Magnetisierung erfasst, die als Dipoldichte das magnetische Moment pro Volumen beschreibt:

$$\vec{m} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (8.35)$$

Bei dieser Definition der Magnetisierung wird ein Kontinuum angenommen. In Wirklichkeit aber sind es die gebundenen Ströme in diskreten Atom- und Molekülschalen induziert. In der makroskopischen Magnetostatik geht man daher analog zur makroskopischen Elektrostatik vor und betrachtet Systemgrößen, die im Vergleich zur atomaren Skala über große aber im Vergleich zur Systemgröße kleine räumliche Skalen abgemittelt sind. Hierzu gehen wir von der bekannten mikroskopischen Magnetostatik aus und zeigen, wie sich hieraus die makroskopische Magnetostatik ableiten lässt. Das folgende Schema fasst dabei die Grundidee des Vorgehens prägnant zusammen:



### 8.2.1 Multipolentwicklung:

Eine mikroskopische Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}')$  führt zum Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.36)$$

Diese Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}')$  soll räumlich begrenzt sein

$$\vec{j}(\vec{r}') \begin{cases} \neq \vec{0} & ; |\vec{r}'| < R \\ = \vec{0} & ; |\vec{r}'| > R \end{cases} \quad (8.37)$$

und wir sind am Vektorpotential  $\vec{A}(\vec{r})$  an einem Ort  $\vec{r}$  weit weg vom Bereich der Stromverteilung interessiert, so dass (8.4) gilt. Aufgrund der Taylor-Reihe

(8.5) geht dann (8.36) über in

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \quad (8.38)$$

Zur Berechnung des ersten Volumenintegrals berücksichtigen wir die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik (3.18) und betrachten das Integral

$$\int dV' j_k(\vec{r}') \stackrel{(3.18)}{=} \int dV' [j_k(\vec{r}') + x'_k \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}')] = \int dV' \operatorname{div}' [x'_k \vec{j}(\vec{r}')] \quad (8.39)$$

Aufgrund des Satzes von Gauß und der Annahme (8.37) folgt aus (8.39)

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}') = \vec{0} \quad (8.40)$$

so dass der erste Term in (8.38) verschwindet. Zur Berechnung des zweiten Volumenintegrals in (8.38) verwenden wir erneut die Kontinuitätsgleichung der Magnetostatik und erhalten

$$\begin{aligned} \int dV' x'_k j_i(\vec{r}') &\stackrel{(3.18)}{=} \int dV' [x'_k j_i(\vec{r}') + x'_k x'_i \operatorname{div}' \vec{j}(\vec{r}')] = \int dV' x'_k \operatorname{div}' [x'_i \vec{j}(\vec{r}')] \\ &= \int dV' \operatorname{div}' [x'_k x'_i \vec{j}(\vec{r}')] - \int dV' x'_i j_k(\vec{r}') \stackrel{\text{Gauß}}{=} - \int dV' x'_i j_k(\vec{r}') \quad (8.41) \end{aligned}$$

Multipliziert man (8.41) mit  $x_k$ , so folgt die Identität

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' = - \int dV' \vec{r}' [\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] \quad (8.42)$$

Daraus folgen wir

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' = \frac{1}{2} \int dV' \{ \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' - \vec{r}' [\vec{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] \} \quad (8.43)$$

so dass wir mit der Vektoridentität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (8.44)$$

schließlich erhalten

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' = \frac{1}{2} \int dV' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \times \vec{r} \quad (8.45)$$

Einsetzen von (8.45) in (8.38) führt auf das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (8.46)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{m}$  das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') \quad (8.47)$$

der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}')$ . Höhere Multipolglieder in der Entwicklung (8.46) spielen in der Regel keine Rolle und können deshalb vernachlässigt werden.

## 8.2.2 Gebundene Ströme:

Betrachten wir nun ein Medium, dann führen die gebundenen Ströme in den Atomen und Molekülen zu Dipolbeiträgen der Form (8.46) im Vektorpotential. Summieren wir über all diese Vektorpotentialbeiträge der jeweiligen magnetischen Dipolmomente  $\vec{m}_k$  an den Orten  $\vec{r}_k$  auf, so erhalten wir

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \frac{\vec{m}_k \times (\vec{r} - \vec{r}_k)}{|\vec{r} - \vec{r}_k|^3} \quad (8.48)$$

Als diese diskreten Dipolbeiträge lassen sich nun in eine Kontinuumsform überführen

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (8.49)$$

wobei formal die Magnetisierung als Volumendichte der magnetischen Dipolmomente eingeführt wurde:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_k \vec{m}_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (8.50)$$

Das Resultat (8.49) stellt zwar schon das gesuchte Ergebnis dar, da es den Einfluss der gebundenen Ströme auf das Vektorpotential beschreibt. Man kann aber (8.49) noch weiter umformen, um ein physikalisch intuitiveres Resultat zu erzielen.

Diesem setzen wir (8.42) in (8.49) ein:

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.51)$$

Aufgrund der vektoranalytischen Identität

$$\text{rot}[\vec{M}(\vec{r}) \varphi(\vec{r})] = \text{grad} \varphi(\vec{r}) \times \vec{M}(\vec{r}) + \varphi(\vec{r}) \text{rot} \vec{M}(\vec{r}) \quad (8.52)$$

gibt (8.51) über in

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{rot} \vec{M}(\vec{r}') - \text{rot}' \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \right\} \quad (8.53)$$

Im zweiten Term wenden wir nun den Satz von Gauss in der Form (1.46) an. Dabei vernachlässigen wir auch hier nicht den resultierenden Oberflächenterm, da wir von einem endlichen Volumen  $V$  ausgehen. Damit erhalten wir aus (8.53)

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\text{rot}' \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times d\vec{F}' \quad (8.54)$$

Der erste Term entspricht dem Vektorpotential einer Volumenstromdichte

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) \quad (8.55)$$

Hierbei gilt die statische Kontinuitatsgleichung

$$\text{div } \vec{J}_g(\vec{r}) = 0 \quad (8.56)$$

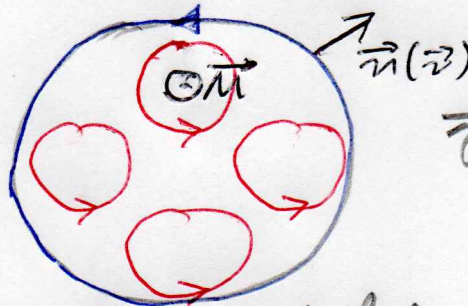
Der zweite Term entspricht dem Vektorpotential einer Oberflächenstromdichte

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) \times \vec{n}(\vec{r}) \quad (8.57)$$

Dabei stammen die Beiträge (8.55) und (8.57) von den gebundenen Strömen.

Such hier kann man analog zur Elektrostatik verstehen, wie die gebundenen Ströme aufgrund der Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  entstehen. Hierzu stellen wir uns  $\vec{M}(\vec{r})$  aus kleinen magnetischen Dipolmomenten zusammengefasst vor, die von Kreisströmen gebildet werden. Ist  $\vec{M}(\vec{r}) = \text{const.}$ , so kompensieren sich die entsprechenden Kreisströme zwar im Inneren des Materials, nicht aber an der Oberfläche. Dies erklärt die Entstehung der Oberflächenstromdichte (8.57):

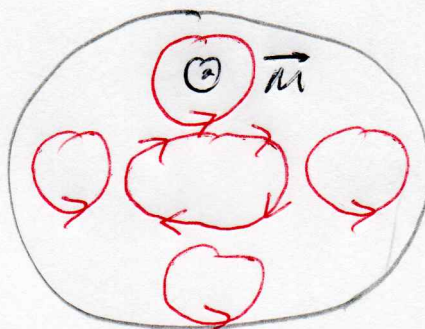
Oberflächen-  
stromdichte



$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \vec{M} \times \vec{n}(\vec{r})$$

Ist  $\vec{M}(\vec{r})$  aber nicht räumlich konstant, so kompensieren sich die Kreisströme der einzelnen magnetischen Dipole nicht mehr im Volumen und es entsteht die Volumenstromdichte (8.55):

Volumen-  
stromdichte



$$\vec{J}_g(\vec{r}) = \text{rot } \vec{M}(\vec{r})$$

Mit Hilfe von (8.55) und (8.57) geht (8.54) in das Endergebnis für das Vektorpotential gleichmässiger Ströme über:

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dV' \frac{\vec{j}_g(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} dF' \frac{\vec{r}_g(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (8.58)$$

8.2.3 Entmagnetisierung:

Wir betrachten nun den Spezialfall einer räumlich konstanten Magnetisierung, d.h.  $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{m}$ . Dann folgt aus (8.54)

$$\vec{A}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{m} \times d\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (8.59)$$

Für die entsprechende magnetische Induktion

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}_g(\vec{r}) \quad (8.60)$$

erhalten wir dann mit der vektoranalytischen Identität (8.52) das Zwischenergebnis

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \times [\vec{m} \times d\vec{F}(\vec{r}')] \quad (8.61)$$

Aufgrund der Vektoridentität (8.44) reduziert sich (8.61) auf

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \left\{ \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot d\vec{F}(\vec{r}') \right] \vec{m} - d\vec{F}(\vec{r}') \left[ \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \vec{m} \right] \right\} \quad (8.62)$$

Der erste Beitrag in (8.62) läßt sich analog zu (8.25)-(8.27) berechnen und ergibt:

$$\vec{B}_g^{(1)}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{m} \quad (8.63)$$

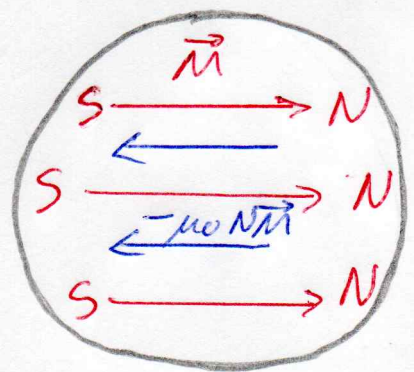
Der zweite Beitrag in (8.62) ist das sogenannte Streufeld

$$\vec{B}_g^{(2)}(\vec{r}) = -\mu_0 N \vec{m} \quad (8.64)$$

wobei die Entmagnetisierungsfaktor  $N$  mit dem Entelektisierungsfaktor (8.22) übereinstimmt. Die magnetische Induktion einer räumlich konstanten Magnetisierung folgt aus (8.63) und (8.64) zu

$$\vec{B}_g(\vec{r}) = \mu_0 (1-N) \vec{m} \quad (8.65)$$

Die Magnetisierung zeigt immer vom Süd- zum Nordpol. Eine homogen magnetisierte Kugel führt deshalb, abhängig von der Kugelform, zu einem Streufeld (8.64), das dem Magnetisierungsfaktor (8.63) entgegen wirkt.



### 8.2.4 Magnetische Feldstärke:

Im Allgemeinen liegen in einem Medium sowohl freie als auch gebundene Ströme vor. Die gesamte Stromdichte lautet daher

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_f(\vec{r}) + \vec{J}_g(\vec{r}) \quad (8.66)$$

wobei die gebundene Stromdichte durch (8.55) gegeben ist. Die Stromdichte (8.66) erzeugt nach dem Amperes-Gesetz eine magnetische Induktion:

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (8.67)$$

Einsetzen von (8.55) und (8.66) in (8.67) führt auf

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}_f(\vec{r}) + \mu_0 \text{rot } \vec{M}(\vec{r}) \quad (8.68)$$

Wir definieren daher die magnetische Feldstärke

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) - \vec{M}(\vec{r}) \quad (8.69)$$

Dann erhalten wir ein Amperes-Gesetz für  $\vec{H}(\vec{r})$ , das nur die freien Ströme beinhaltet:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f(\vec{r}) \quad (8.70)$$

Demnach ist die Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke durch die freien Ströme gegeben. Offenbar hat diese Umformulierung des Amperes-Gesetzes keine Auswirkung darauf, dass keine magnetischen Monopole existieren. Es gilt also nach wie vor

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (8.71)$$

Bildet man die Divergenz von (8.69), so folgt mit (8.71)

$$\text{div } \vec{H}(\vec{r}) = -\text{div } \vec{M}(\vec{r}) \quad (8.72)$$

d.h. die Wirbeldichte der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}(\vec{r})$  ist durch die Wirbeldichte der Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  gegeben. Nach dem Helmholtzschen Vektorzerlegungssatz ist damit die magnetische Feldstärke  $\vec{H}(\vec{r})$  nicht nur durch die freie Stromdichte  $\vec{J}_f(\vec{r})$  sondern auch durch die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r})$  bestimmt.

### 8.3 Makroskopische Elektrodynamik:

Wir bringen nun die makroskopische Elektrostatik und die makroskopische Magnetostatik zusammen und erweitern diese noch dynamisch. Damit erhalten wir die makroskopische Elektrodynamik, die elektrodynamische Phänomene in Materie beschreibt.

### 8.3.1 Elektrisches Feld:

Die in Abschnitt 8.1.2 entwickelte Theorie gebundener Ladungen im Rahmen der makroskopischen Elektrostatik lässt sich Schritt für Schritt problemlos dynamisch erweitern. So wird z. B. die statische Polarisation (8.11) dadurch dynamisch erweitert, dass sowohl die elektrischen Dipolmomente  $\vec{p}_k(t)$  als auch deren Positionen  $\vec{r}_k(t)$  zeitabhängig sein können:

$$\vec{P}(t) = \sum_k \vec{p}_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \quad (8.73)$$

Am Ende führt diese dynamische Erweiterung dazu, dass auch die Volumenladungsdichte der gebundenen Ladungen (8.16) zeitabhängig wird:

$$\rho_g(\vec{r}, t) = -\operatorname{div} \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (8.74)$$

Deshalb lassen sich die Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho_f(\vec{r}, t) + \rho_g(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (8.75)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.76)$$

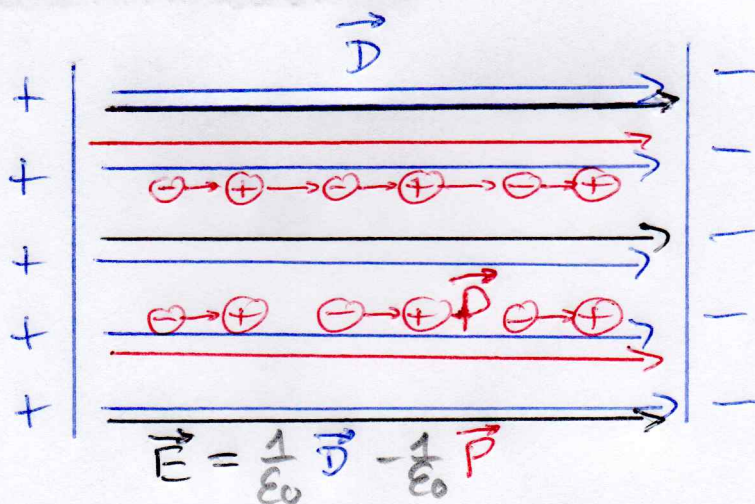
analog zu Abschnitt 8.1.4 in Materie umformulieren. Hierzu wird analog zu (8.31) das zeitabhängige dielektrische Verschiebungsfeld eingeführt

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (8.77)$$

so dass sich (8.75) aufgrund von (8.74) reduziert auf

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho_f(\vec{r}, t) \quad (8.78)$$

während das Induktionsgesetz (8.76) nach wie vor gültig bleibt. Damit haben wir auch im zeitabhängigen Fall beschrieben, wie das elektrische Feld freier Ladungen durch eine Polarisation abgedimmt wird:



### 8.3.2 Magnetisches Feld:

Demgegenüber ist die dynamische Erweiterung der makroskopischen Magnetostatik aufwändiger. Das fängt schon bei der Multipolentwicklung an, wo wir statt (8.38) zunächst

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t) \frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t) \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \quad (8.79)$$

erhalten. Das erste Volumenintegral muss jetzt nämlich erneut berechnet werden, da statt der statischen Kontinuitätsgleichung (3.18) nun die volle Kontinuitätsgleichung (6.3) gilt. Analog zu (7.10) - (7.13) erhalten wir

$$\int dV' \vec{j}(\vec{r}', t) = \frac{\partial \vec{P}(t)}{\partial t} \quad (8.80)$$

mit dem zeitabhängigen elektrischen Dipolmoment (7.11). Im Unterschied dazu stellt sich aber heraus, dass die Überlegungen (8.41) - (8.45) zum zweiten Volumenintegral auch im dynamischen Fall gültig sind. Daher erhalten wir statt (8.46) nun

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial \vec{P}(t)}{\partial t} \frac{1}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}(t) \times \vec{r}}{r^3} + \dots \quad (8.81)$$

mit dem zeitabhängigen magnetischen Dipolmoment

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2} \int dV' \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) \quad (8.82)$$

Aufbauend darauf lässt sich dann analog zu Schritt 8.2.2 die Theorie gebundener Ströme dynamisch erweitern. Dabei erhalten wir z. B. statt (8.48) nun

$$\vec{H}_g(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \frac{\partial \vec{P}_k(t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_k(t)|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_k \frac{\vec{m}_k(t) \times [\vec{r} - \vec{r}_k(t)]}{|\vec{r} - \vec{r}_k(t)|^3} \quad (8.83)$$

und entsprechend statt (8.49)

$$\vec{H}_g(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \left\{ \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}', t)}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{m}(\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right\} \quad (8.84)$$

wobei die Polarisation (8.73) und die dynamische Verallgemeinerung der statischen Magnetisierung (8.50) auftritt:

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \sum_k \vec{m}_k(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)) \quad (8.85)$$

Aus analogen Überlegungen wie zur makroskopischen Magnetostatik erhalten wir aus (8.84) schließlich das Ergebnis, dass die Volumenstromdichte der gebundenen Ströme nun aus zwei Beiträgen besteht:

$$\vec{\jmath}_g(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{rot } \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (8.86)$$

Dabei ist zu beachten, dass gebundene Volumenladungs- und -stromdichte (8.74) und (8.86) einer Kontinuitätsgleichung genügen:

$$\frac{\partial \rho_g(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{\jmath}_g(\vec{r}, t) = 0 \quad (8.87)$$

Und schließlich lassen sich am Ende auch die Maxwell-Gleichungen für die magnetische Induktion

$$\text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (8.88)$$

$$\text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 [\vec{\jmath}_g(\vec{r}, t) + \vec{\jmath}_g(\vec{r}, t)] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (8.89)$$

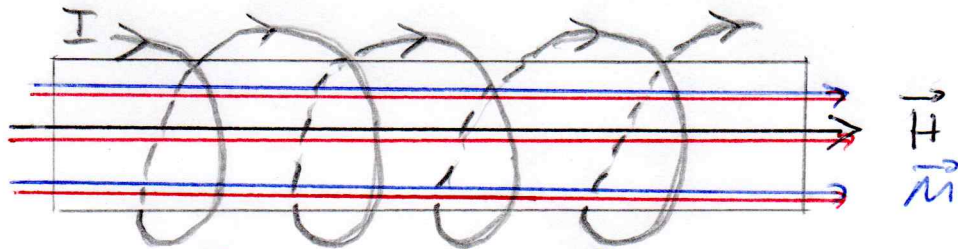
analog zu Abschnitt 8.2.4 in Materie umschreiben. Hier zu führen wir analog zu (8.69) die zeitabhängige magnetische Feldstärke ein

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t) - \vec{M}(\vec{r}, t) \quad (8.90)$$

Einsetzen von (8.77), (8.86) und (8.90) in (8.89) führt mit Hilfe von (4.17) auf

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}) &= \mu_0 \vec{\jmath}_g + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \text{rot } \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{\jmath}_g(\vec{r}, t) + \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.91)$$

während (8.88) auch für gebundene Ladungen und Ströme gültig bleibt. Damit haben wir auch im zeitabhängigen Fall hergeleitet, wie das magnetische Feld freier Ströme durch Magnetisierung der Materie bei Ferromagnetismus vergrößert wird:



$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

### 8.3.3 Zusammenfassung:

Die Elektrodynamik in Materie besteht aus den beiden homogenen Maxwell-Gleichungen (8.76) und (8.88) sowie den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen (8.78) und (8.90). Dabei sind die Hilfsfelder  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{H}(\vec{r}, t)$

durch die freien Ladungen und Ströme bestimmt. Die physikalisch relevanten Felder sind aber  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , da sie eine Lorentz-Kraft (4.18) auf ruhende bzw. bewegte Ladungen ausüben. Gemäß (8.77) und (8.90) sind aber  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  erst dann bekannt, wenn man die Polarisation  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  und die Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  der Materie kennt.

### 8.3.4 Materialgleichungen:

Um die Maxwell-Gleichungen in Materie anwenden zu können, benötigt man Kenntnisse über  $\rho_f(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}_f(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{M}(\vec{r}, t)$ , die im Rahmen von Materialgleichungen formuliert werden. In allgemeinen sind diese Materialgleichungen sehr kompliziert. Für viele Stoffe gelten aber einfache lineare Materialgleichungen, die wir nun zusammenstellen:

- Normale Leiter sind elektrisch neutral

$$\rho_f(\vec{r}, t) = 0 \quad (8.92)$$

und erfüllen das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j}_f(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.93)$$

wobei  $\sigma$  die Leitfähigkeit des Leiters.

- Dielektrika (Isolatoren) haben die Eigenschaft, dass deren Polarisation  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  proportional zur elektrischen Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ist

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.94)$$

wobei man  $\chi_e$  als elektrische Suszeptibilität bezeichnet. Damit geht (8.77) über in

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.95)$$

wobei

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (8.96)$$

die relative Dielektrizitätszahl darstellt.

- Magnetische Substanzen haben die Eigenschaft, dass deren Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  proportional zur magnetischen Feldstärke  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  ist:

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (8.97)$$

wobei  $\chi_m$  die magnetische Suszeptibilität darstellt. Damit geht (8.90) über in

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \mu_r \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (8.98)$$

mit den relativen Permeabilitätskonstanten

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (8.99)$$

Ist  $\chi_m > 0$  spricht man vom Paramagnetismus, ist dagegen  $\chi_m < 0$  vom Diamagnetismus. Die relative Permeabilitätskonstante  $\mu_r$  eines Stoffes gibt an, auf das Wievielfache sich die magnetische Flussdichte  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  gegenüber dem Vakuum erhöht, wenn man den Feldbereich mit dem Stoff ausfüllt. Die meisten Stoffe beeinflussen das Magnetfeld kaum. Ausnahmen sind Eisen, Kobalt, Nickel, deren Ferromagnetismus die Phänomene Hysterese und Remanenz zeigen:

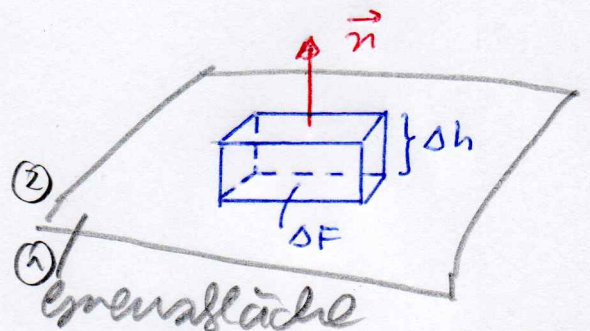
| Stoff  | $\mu_r$   |
|--------|-----------|
| Luft   | 1,0000004 |
| Kupfer | 0,99949   |
| Eisen  | 8000      |

#### 8.4 Grenzflächenbedingungen:

Zuden Maxwell'schen Differentialgleichungen gehören die Randbedingungen an den Grenzflächen zweier Medien, wie z.B. Luft-Wasser oder Dielektrikum-Kondensatorplatten. Erst wenn das gesamte Randwertproblem bekannt ist, sind die elektromagnetischen Felder eindeutig festgelegt.

##### 8.4.1 Gaußscher Satz:

Wir betrachten einen Quader mit einer infinitesimalen Höhe  $\Delta h$ , einer Fläche  $\Delta F$  und dem Volumen  $\Delta V = \Delta h \cdot \Delta F$  längs einer Grenzfläche mit Normalenvektor  $\vec{n}$ . Dann folgt aus der Maxwell-Gleichung (8.78) und dem Gaußschen Satz



$$\oint_{\partial \Delta V} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \int_{\Delta V} \rho_f dV = \Delta Q \quad (8.100)$$

Wir werten nun (8.100) im Limes  $\Delta h \rightarrow 0$  aus. Zum einen kann man beim Oberflächenintegral den Mantelanteil vernachlässigen und sich auf den Boden- und Deckenteil beschränken:

$$\Delta F \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \Delta Q \quad (8.101)$$

Zum anderen kann man die Ladung  $\Delta Q$  des Quaders aus der Flächenladungsdichte  $\sigma_s$  der Grenzfläche berechnen:

$$\Delta Q = \sigma_s \Delta F \quad (8.102)$$

Aus (8.101) und (8.102) gewinnen wir damit eine Sprungbedingung für die Normalenkomponente der dielektrischen Verschiebung:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s \quad (8.103)$$

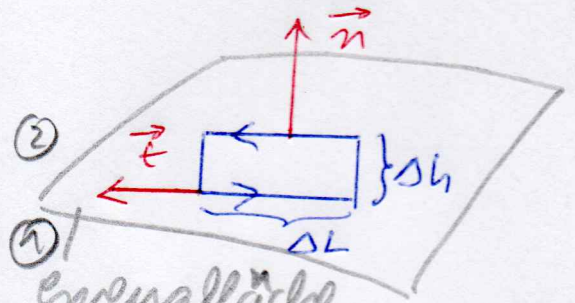
Genaue entsprechende Überlegungen mit der Maxwell-Gleichung (8.88) führen für die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  zum Ergebnis

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (8.104)$$

d.h. deren Normalenkomponente ist an der Grenzfläche stetig.

### 8.4.2 Stokescher Satz:

Wir betrachten ein Rechteck mit einer infinitesimalen Höhe  $\Delta h$ , einer Länge  $\Delta L$  und einer Fläche  $\Delta F = \Delta h \Delta L$  längs der Grenzfläche mit dem Tangentialvektor  $\vec{t}$ .



Somit folgt aus der Maxwell-Gleichung (8.91) und dem Stokeschen Satz

$$\oint_{\partial \Delta F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_{\Delta F} \vec{j} \cdot d\vec{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta F} \vec{B} \cdot d\vec{F} \quad (8.105)$$

Wir werten nun (8.105) im Limes  $\Delta h \rightarrow 0$  aus:

$$\oint_{\partial \Delta F} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \Delta L \vec{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \quad (8.106)$$

$$\int_{\Delta F} \vec{j} \cdot d\vec{F} = \Delta I \quad (8.107)$$

$$\int_{\Delta F} \vec{B} \cdot d\vec{F} \sim \Delta h \rightarrow 0 \quad (8.108)$$

Somit berechnet  $\Delta I$  den Strom durch das Rechteck in

Limes  $\Delta h \rightarrow 0$ , hierzu führen wir eine Oberflächenstromdichte  $\vec{i}_g = \Delta I / \Delta L$  ein. Sie ist die Tangentialkomponente eines Vektors  $\vec{i}_g$ , der sowohl senkrecht zu  $\vec{F}$  als auch senkrecht zu  $\vec{n}$  ist:

$$\Delta I = \Delta L \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{F}) \quad (8.109)$$

Dennnach folgt aus (8.105) - (8.109)

$$\vec{F} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{F}) \quad (8.110)$$

Hierbei stellen  $\vec{F}$  und  $\vec{n} \times \vec{F}$  zwei zueinander senkrecht tangentialvektorender Ebenenfläche dar, d.h. es gilt auch

$$(\vec{n} \times \vec{F}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g [\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{F})] = -\vec{i}_g \vec{F} \quad (8.111)$$

Beide Gleichungen (8.110) und (8.111) lassen sich zusammenfassen durch:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{i}_g \quad (8.112)$$

Indes ist erhält man (8.110) und (8.111), wenn man (8.112) skalar mit  $\vec{n} \times \vec{F}$  und  $\vec{F}$  multipliziert:

$$(\vec{n} \times \vec{F}) \cdot [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \underbrace{[(\vec{n} \times \vec{F}) \times \vec{n}]}_{= -\vec{F}} = \vec{i}_g \cdot (\vec{n} \times \vec{F}) \quad \checkmark$$

$$\vec{F} \cdot [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{F} \times \vec{n}) = \vec{i}_g \cdot \vec{F} \quad \checkmark$$

Hierbei stellt (8.112) eine Symmetriebedingung für die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke dar. Genaue entsprechende Überlegungen mit der Maxwell-Gleichung (8.76) führen für die elektrische Feldstärke zum Ergebnis

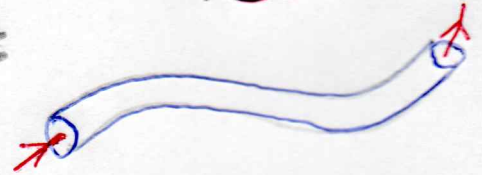
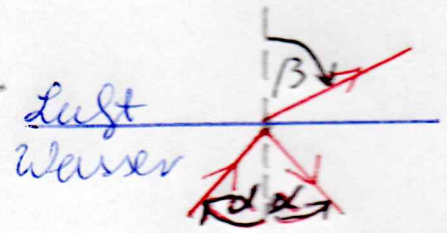
$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad (8.113)$$

d.h. die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist stetig.

## 9 Elektromagnetische Wellen in Materie

Nachdem wir in Kapitel 7 die Erzeugung elektromagnetischer Wellen und in Kapitel 5 deren Ausbreitung im Vakuum besprochen haben, behandeln wir im vorliegenden Kapitel elektromagnetische Wellen in Materie. Wichtige Anwendungsbeispiele sind hierbei:

- Reflexion und Brechung von Licht: Licht, das auf die Grenzfläche zwischen zwei Materialien auftrifft, wird reflektiert und gebrochen.
- Fasern zur Telekommunikation: Elektromagnetische Wellen breiten sich entlang einer Faser aus.
- Halbleiterlaser in CD und DVD-Spieler: Innere Vielfachreflexionen hält das Licht im Halbleiter. Diese Lichtverstärkung ermöglicht den Laserbetrieb.



### 9.1 Telegraphengleichung:

Im folgenden betrachten wir eine homogene, isotrope, ruhende, ungeladene Materie. Es gelten dann die Materialgleichungen (8.92), (8.93), (8.95) und (8.95). Dabei verwenden wir zur Abkürzung die Größen

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (9.1)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (9.2)$$

#### 9.1.1 Herleitung:

Setzen wir diese Materialgleichungen in die Maxwell-Gleichungen (8.76), (8.78), (8.88) und (8.91) ein, so folgt:

$$(M1) \quad \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.3)$$

$$(M2) \quad \text{div } \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.4)$$

$$(M3) \quad \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.5)$$

$$(M4) \quad \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) = \sigma \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (9.6)$$

Es handelt sich hierbei um gekoppelte partielle Differentialgleichungen für die elektrische und die magnetische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ . Wir wenden nun

dieses Differentialgleichungssystem entkoppeln. Hierzu berechnen wir rot rot  $\vec{E}$  auf zweiweiße Weisen. Zum einen gilt

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(3.24)}{=} \text{grad div } \vec{E}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.3)}{=} -\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (9.7)$$

zum anderen erhalten wir

$$\text{rot rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.5)}{=} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.6)}{=} -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) - \epsilon_\mu \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (9.8)$$

Demnach genügt die elektrische Feldstärke  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  der Telegrafengleichung

$$\left\{ \Delta - \epsilon_\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.9)$$

Entsprechend führt die Berechnung von rot rot  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  zum einen auf

$$\text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(3.24)}{=} \text{grad div } \vec{H}(\vec{r}, t) - \Delta \vec{H}(\vec{r}, t) \stackrel{(9.4)}{=} -\Delta \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.10)$$

und zum anderen auf

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H}(\vec{r}, t) &\stackrel{(9.6)}{=} \sigma \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) \\ &\stackrel{(9.5)}{=} \sigma \mu \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \epsilon_\mu \frac{\partial^2 \vec{H}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (9.11)$$

so dass auch die magnetische Feldstärke  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  der Telegrafengleichung genügt:

$$\left\{ \Delta - \epsilon_\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \right\} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.12)$$

### 9.1.2 Isolatoren ( $\sigma = 0$ ):

Liegt ein Material vor, bei dem die Leitfähigkeit verschwindet, d.h.  $\sigma = 0$  ist, so reduzieren sich die Telegrafengleichungen (9.9) und (9.12) auf die Wellengleichungen

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.13)$$

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.14)$$

Dabei erhalten wir für die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in Materie

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_\mu}} \stackrel{(9.1), (9.2)}{=} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \stackrel{(4.17)}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (9.15)$$

Das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten im Vakuum  $c$  und in Materie  $c'$  bezeichnet man als Brechungsindex

$$n = \frac{c}{c'} \stackrel{(9.15)}{=} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (9.16)$$

Treffen zwei Materialien mit unterschiedlichen Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  aufeinander, so kommt es nach Durchgang zu einer Brechung ebener Wellen. Aufgrund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten  $c_1 = c/n_1$  und  $c_2 = c/n_2$  werden während der Zeit  $t$  die unterschiedlichen Strecken  $s_1 = c_1 t = l \sin \alpha_1$  und entsprechend  $s_2 = c_2 t = l \sin \alpha_2$  durchlaufen. deren Verhältnis  $s_1/s_2$  ergibt sich zu

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.17)$$

Bei (9.17) handelt es sich um das Snelliussche Brechungsgesetz. Aus  $n_1 > n_2$  folgt unmittelbar  $\alpha_1 < \alpha_2$ , d.h. ebene Wellen haben im optisch dichteren Medium den kleineren Brechungswinkel.

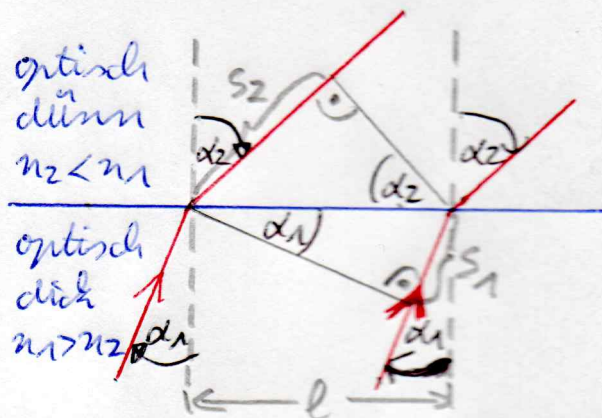
Die Maxwell'sche Relation (9.16) für den Brechungsindex  $n$  ist für Frequenzen bis ins Infrarot, d.h. für Mikrowellen, sehr gut bestätigt. Sie versagt aber im optischen, sichtbaren Bereich bei vielen Materialien. Beispielsweise ist bei Wasser  $\mu_r \approx 1$ ,  $\epsilon_r \approx 81$ , so dass man  $\epsilon_r \mu_r \approx 81$  erhält, der gemessene Brechungsindex liegt aber bei  $n \approx 1,33$ . Dies liegt daran, dass bei optischen Frequenzen  $\omega \approx 10^{15} \text{ 1/s}$  die Elektronen im Medium dem schnell oszillierenden Lichtfeld hinterhinken, sodass  $\epsilon_r$  kleiner als der statische Wert ist. In diesem Fall muss man also die Frequenzabhängigkeit der Elektronenpolarisation berücksichtigen, was zu einer frequenzabhängigen Funktion  $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$  führt.

### 9.1.3 Material mit endlicher Leitfähigkeit

Wir untersuchen nun den Fall  $\sigma > 0$  und machen einen Ansatz für ebene, monochromatische Wellen, die den Telegraphengleichungen (9.9) und (9.12)

genügen:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  (9.18)

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (9.19)$$



Einsetzen von (9.18), (9.19) in (9.9), (9.10) ergibt

$$\{ -\vec{k}^2 + \epsilon \mu \omega^2 + i \omega \mu \sigma \} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.20)$$

$$\{ -\vec{k}^2 + \epsilon \mu \omega^2 + i \omega \mu \sigma \} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{0} \quad (9.21)$$

Für nichtverschwindende Amplitudenvektoren  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{H}_0$  lesen wir aus (9.20), (9.21) eine komplexe Dispersionsrelation ab

$$\vec{k}^2 = \omega^2 \epsilon \mu \left\{ 1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right\} \quad (9.22)$$

Das bedeutet, dass (9.18), (9.19) nur dann Lösungen von (9.9), (9.12) sind, wenn Kreisfrequenz  $\omega$  und Wellenvektor  $\vec{k}$  der komplexen Dispersionsrelation (9.22) genügen.

Setzen wir andererseits den Ansatz (9.18), (9.19) in die Maxwell-Gleichungen (9.3) - (9.6) ein, so folgt

$$(M1) \quad \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.23)$$

$$(M2) \quad \vec{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.24)$$

$$(M3) \quad \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu \omega \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (9.25)$$

$$(M4) \quad \vec{k} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = (-i\sigma - \epsilon \omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (9.26)$$

Nach (9.23), (9.24) sind die elektromagnetischen Wellen in Materie wie im Vakuum Transversalwellen. Außerdem lesen wir aus (9.25), (9.26) ab, dass  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  in Materie wie auch im Vakuum ein Rechtssystem bilden. Aber die für  $\sigma > 0$  komplexe Beziehung (9.26) führt dazu, dass  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  nicht mehr phasengleich sind.

#### 9.1.4 Komplexe Dispersionsrelation:

Wir untersuchen nun die physikalischen Konsequenzen der komplexen Dispersionsrelation (9.22). Ziel sind - ähnlich wie in Analogie zu (9.16) einen komplexen Brechungsindex

$$N = \frac{c}{c'} \quad (9.27)$$

finden wir durch Vergleich mit (9.22) das Ergebnis

$$N = \sqrt{\epsilon \mu} \cdot \sqrt{1 + i \frac{\sigma}{\epsilon \omega}} \quad (9.28)$$

erhalten. Wir zerlegen den komplexen Brechungs-

index  $N$  in dessen Realteil, den Brechungsindex  $n$ ,  
und dessen Imaginärteil, den Absorptionskoeffi-  
zienten  $\kappa$ :

$$N = n + i\kappa \quad (9.29)$$

Aus (9.28) und (9.29) folgen dann zwei Gleichungen  
für die beiden Unbekannten  $n$  und  $\kappa$ :

$$n^2 - \kappa^2 = \epsilon_r \mu_r \quad (9.30)$$

$$2n\kappa = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \quad (9.31)$$

Eliminieren wir  $\kappa$  bzw.  $n$  durch (9.31), so ergeben  
sich aus (9.30) quadratische Gleichungen für  $n^2$  bzw.  
 $\kappa^2$  mit den Lösungen

$$n^2 = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}{2} \quad (9.32)$$

$$\kappa^2 = \epsilon_r \mu_r \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2}}{2} \quad (9.33)$$

Im Fall  $\sigma \rightarrow 0$  muss aber  $n^2 \rightarrow \epsilon_r \mu_r$  und  $\kappa^2 \rightarrow 0$  ge-  
hen. Deshalb erhalten wir schließlich für den Bre-  
chungsindex

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 + 1}{2}} \quad (9.34)$$

und für den Absorptionskoeffizienten

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 - 1}{2}} \quad (9.35)$$

### 9.1.5 Ausbreitung in x-Richtung:

Wir beschränken uns in der Diskussion der Einfachheit  
halber nun auf eine ebene monochromatische Welle,  
(9.18), (9.19), die sich in x-Richtung ausbreitet. Auf-  
grund von  $\vec{k} = k \vec{e}_x$  erhalten wir dann

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (9.36)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (9.37)$$

Aus (9.22), (9.27) und (9.29) lesen wir ab, dass der Be-  
trag des Wellenvektors komplex ist:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega) + i \frac{\omega}{c} \kappa(\omega) \quad (9.38)$$

Einsetzen von (9.38) in (9.36), (9.37) führt auf

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) [x - c(\omega)t]} e^{-\frac{\kappa(\omega)}{c} x} \quad (9.39)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i \frac{\omega}{c} n(\omega) [x - c(\omega)t]} e^{-\frac{\kappa(\omega)}{c} x} \quad (9.40)$$

Das bedeutet, dass sich die ebene monochromatische Welle mit der frequenzabhängigen Geschwindigkeit

$$c(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} \stackrel{(9.34)}{=} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 + 1}} \quad (9.41)$$

ausbreitet. Außerdem wird sie exponentiell gedämpft mit der frequenzabhängigen Eindringtiefe

$$d(\omega) = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\lambda(\omega)} \stackrel{(9.35)}{=} \frac{c}{\omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon \omega}\right)^2 - 1}} \quad (9.42)$$

Man bezeichnet dieses exponentiell gedämpfte Eindringen einer elektromagnetischen Welle in einen Leiter als Skin-Effekt und die Eindringtiefe als Skin-Tiefe. Dies hat zum einen zur Folge, dass sich elektromagnetische Felder durch gut leitende Abschirmbleche abschirmen lassen. Zum anderen bedeutet dies, dass Wechselströme in einer Tiefe  $d(\omega)$  am Rand von guten Leitern fließen, so dass im Inneren praktisch kein Strom fließt.

### 9.1.6 Beispiel:

Wir betrachten als konkretes Beispiel einen guten Leiter wie Kupfer und kleine Frequenzen, so dass

$$\frac{\sigma}{\epsilon \omega} \gg 1$$

ist. Dann erhalten wir aus (9.34) und (9.35)

$$n(\omega) = \lambda(\omega)$$

so dass die Geschwindigkeit (9.41) durch

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_0 \omega}{\mu_2 \sigma}} c \quad (9.45)$$

und die Eindringtiefe (9.42) durch

$$d(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega \mu_2}} \quad (9.46)$$

gegeben sind. Im Falle von Kupfer mit  $\mu_2 \approx 1$  und  $\sigma \approx 5,88 \cdot 10^7 \text{ A/Vm}$  ergeben sich die Zahlenwerte

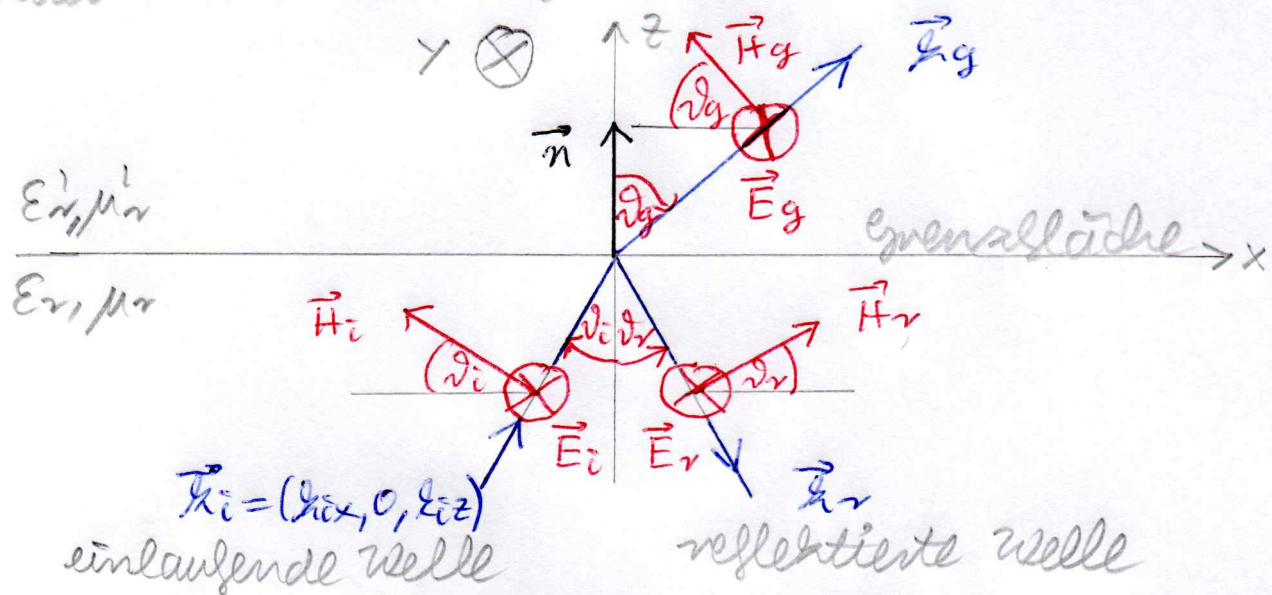
| $\lambda = \frac{2\pi c(\omega)}{\omega}$ | 1 cm                          | 10 km                      |
|---|-------------------------------|----------------------------|
| $\omega$                                  | $2 \cdot 10^{11} \text{ 1/s}$ | $2 \cdot 10^5 \text{ 1/s}$ |
| $d(\omega)$                               | $0,37 \mu\text{m}$            | $0,37 \text{ mm}$          |

## 9.2 Reflexion und Brechung:

Da Licht elektromagnetische Wellen darstellt, steckt letztendlich die gesamte Optik in den Maxwell-Gleichungen. Im folgenden untersuchen wir, wie man das Reflexions- und das Brechungsgesetz aus den Maxwell-Gleichungen systematisch ableiten kann. Dabei werden auch die Amplituden und die Intensitäten von reflektiertem und gebrochenem Strahl berechnet. Die dabei gewonnenen Ergebnisse sind wichtige Grundlagen z. B. für die Herstellung von Spiegeln, Brillen oder aber dielektrischen Lasersondatoren, die in jedem CD- oder DVD-Spieler enthalten sind.

### 9.2.1 Ausgangssituation:

Wir betrachten eine einlaufende, ebene Welle, die an einer Grenzfläche zu einem anderen Medium teilweise reflektiert und teilweise gebrochen wird:



Dabei nehmen wir der Einfachheit halber  $\sigma_f = 0$  und  $\vec{j}_f = \vec{0}$  an, d. h. es sollen keine Oberflächenladungen und keine Oberflächenströme auf der Grenzfläche vorhanden sein. Ferner sollen beide Medien dielektrika sein, d. h.  $\sigma = \sigma_l = 0$ . Dann folgt aus (9.35) und (9.42), dass  $\chi(z) = 0$  bzw.  $d(z) = \infty$ , d. h. die elektromagnetischen Wellen werden in beiden Medien nicht gedämpft. Betrachten wir optische Frequenzen, so können wir außerdem in guter Näherung  $\mu_2 = \mu_1 = 1$  annehmen. Nach (9.16) sind dann die Brechungsindizes der beiden Medien durch

$$n = \sqrt{\epsilon_r},$$

$$n_l = \sqrt{\epsilon_r}$$

(9.47)

gegeben.

Ferner vernachlässigen wir, dass die Wellen in beiden Medien linear polarisiert sind und machen jeweils einen Ansatz für ebene Wellen:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} \quad (9.48)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}, t) = \vec{E}_{r0} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)} \quad (9.49)$$

$$\vec{E}_g(\vec{r}, t) = \vec{E}_{g0} e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)} \quad (9.50)$$

Dabei gelten aufgrund von (9.15) und (9.22) die Dispersionsrelationen

$$\vec{k}_i^2 = \frac{\omega_i^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_r^2 = \frac{\omega_r^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_g^2 = \frac{\omega_g^2}{c^2} n^2 \quad (9.51)$$

### 9.2.2 Phasenfaktoren:

Wegen der obengemachten Annahmen gelten nach (8.103), (8.104) und (8.112), (8.113) die Grenzflächenbedingungen, dass  $\vec{n} \cdot \vec{D}$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{B}$ ,  $\vec{n} \times \vec{E}$ ,  $\vec{n} \times \vec{H}$  in der Ebene  $z=0$  stetig sein müssen. Dies hat zunächst für die Phasenfaktoren zur Folge, dass

$$e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)}|_{z=0} = e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t)}|_{z=0} = e^{i(\vec{k}_g \cdot \vec{r} - \omega_g t)}|_{z=0} \quad (9.52)$$

für alle  $t$  und für alle  $x, y$  erfüllt sein muss. Da (9.52) für alle  $t$  gelten soll, muss

$$\omega_i = \omega_r = \omega_g = \omega \quad (9.53)$$

erfüllt sein, so dass sich die Dispersionsrelationen in (9.51) vereinfachen

$$\vec{k}_i^2 = \vec{k}_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2, \quad \vec{k}_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 \quad (9.54)$$

Da (9.52) für alle  $x, y$  gelten soll, folgt mit  $\vec{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{xy} y = k_{gx} x + k_{gy} y \quad (9.55)$$

Daraus folgt für allgemeine  $y$

$$k_{xy} = k_{gy} = 0 \quad (9.56)$$

Dies bedeutet, dass alle drei Wellenvektoren  $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_g$  in der  $xz$ -Ebene liegen, siehe Skizze auf Seite 87. Da (9.55) für alle  $x$  gelten soll, erhalten wir ferner

$$k_{ix} = |\vec{k}_i| \sin \varphi_i = k_{rx} = |\vec{k}_r| \sin \varphi_r = k_{gx} = |\vec{k}_g| \sin \varphi_g \quad (9.57)$$

Aus (9.54) und (9.57) lesen wir dann das Snelliussche Reflexionsgesetz ab, dass Einfallswinkel  $\vartheta_i$  und Reflexionswinkel  $\vartheta_r$  übereinstimmen:

$$\vartheta_i = \vartheta_r \quad (9.58)$$

Außerdem folgt aus (9.54) und (9.57) auch das Snelliussche Brechungsgesetz (9.17)

$$\frac{\sin \vartheta_i}{\sin \vartheta_g} = \frac{|\vec{k}_g|}{|\vec{k}_i|} = \frac{n'}{n} \quad (9.59)$$

### 9.2.3 Amplituden:

Wir nehmen an, dass die ebenen Wellen wie in der Skizze auf Seite 87 geseigt polarisiert sind. Dann ist  $\vec{n} \cdot \vec{E}_i = \vec{n} \cdot \vec{E}_r = \vec{n} \cdot \vec{E}_g = 0$ , so dass wegen (8.95) die Stetigkeit von  $\vec{n} \cdot \vec{D}$  in der Ebene garantiert ist. Aus der Stetigkeit von  $\vec{n} \times \vec{E}$  in der Ebene  $z=0$  folgt dann mit  $\vec{E}_{i0} = E_{i0} \vec{e}_y$ ,  $\vec{E}_{r0} = E_{r0} \vec{e}_y$ ,  $\vec{E}_{g0} = E_{g0} \vec{e}_y$

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{g0} \quad (9.60)$$

Untersuchen wir entsprechend die Stetigkeit von  $\vec{n} \cdot \vec{B}$  in der Ebene  $z=0$ , so erhalten wir wegen (8.98) eine Beziehung an die  $z$ -Komponente der magnetischen Feldstärke

$$H_{i0z} + H_{r0z} = H_{g0z} \quad (9.61)$$

Mit Hilfe der Winkel  $\vartheta_i = \vartheta_r$  und  $\vartheta_g$  geht (9.61) über

$$\text{in} \quad (H_{i0} + H_{r0}) \sin \vartheta_i = H_{g0} \sin \vartheta_g \quad (9.62)$$

Andererseits folgt aus der früher abgeleiteten Beziehung (9.25), da  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{E}_i$  und  $\vec{H}_i$  senkrecht aufeinander stehen

$$|\vec{k}_{i0}| E_{i0} \stackrel{(9.54)}{=} \frac{\omega}{c} n E_{i0} \stackrel{(9.25)}{=} \mu_0 \omega H_{i0} \Rightarrow H_{i0} = \frac{n}{c \mu_0} E_{i0} \quad (9.63)$$

Entsprechend gilt dann auch

$$H_{r0} = \frac{n}{c \mu_0} E_{r0}, \quad H_{g0} = \frac{n'}{c \mu_0} E_{g0} \quad (9.64)$$

Mit (9.63) und (9.64) reduziert sich (9.62) auf

$$n(E_{i0} + E_{r0}) \sin \vartheta_i = n' E_{g0} \sin \vartheta_g \quad (9.65)$$

Aufgrund des Snelliusschen Brechungsgesetzes (9.59) geht dann (9.65) über in (9.60) und stellt daher keine

neue Bedingung dar. Somit müssen wir nun noch die Stetigkeit von  $\vec{n} \times \vec{H}$  an der Ebene  $z=0$  fordern, was auf eine Bedingung an die  $x$ -Komponente der magnetischen Feldstärke führt:

$$H_{E0x} + H_{T0x} = H_{G0x} \quad (9.66)$$

Mit den Winkeln  $\vartheta_i = \vartheta_r$  und  $\vartheta_g$  erhalten wir zunächst aus (9.66)

$$-H_{i0} \cos \vartheta_i + H_{r0} \cos \vartheta_i = -H_{g0} \cos \vartheta_g \quad (9.67)$$

Einsetzen von (9.63), (9.64) führt dann (9.67) über in

$$n(E_{i0} - E_{r0}) \cos \vartheta_i = n' E_{g0} \cos \vartheta_g \quad (9.68)$$

Bei vorgegebenem  $E_{i0}$  stellen (9.60) und (9.68) zwei Bestimmungsgleichungen für  $E_{r0}$  und  $E_{g0}$  dar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ n \cos \vartheta_g & n \cos \vartheta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{g0} \\ E_{r0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} E_{i0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} E_{g0} \\ E_{r0} \end{pmatrix} = \frac{1}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \begin{pmatrix} n \cos \vartheta_i & 1 \\ -n' \cos \vartheta_g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos \vartheta_i \end{pmatrix} E_{i0} \quad (9.69)$$

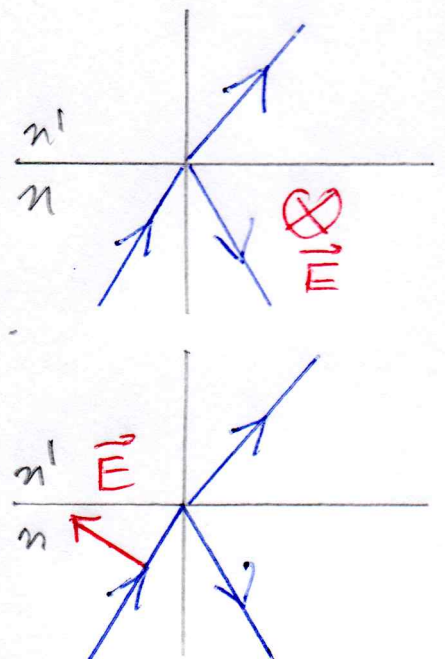
hieraus erhalten wir die Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp} = \frac{E_{r0}^{\perp}}{E_{i0}^{\perp}} = \frac{n \cos \vartheta_i - n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \quad (9.70)$$

und für den Transmissionskoeffizienten

$$t_{\perp} = \frac{E_{g0}^{\perp}}{E_{i0}^{\perp}} = \frac{2 n \cos \vartheta_i}{n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g} \quad (9.71)$$

Die Ergebnisse (9.70), (9.71) bezeichnet man als Fresnel-Formeln. Sie wurden für die auf Seite 87 gezeigte Situation abgeleitet, dass die elektrische Feldstärke senkrecht zur Zeichenebene polarisiert ist. Entsprechend lassen sich auch die Fresnel-Formeln für die dazu komplementäre Situation ableiten, dass die elektrische Feldstärke parallel zur Zeichenebene polarisiert ist. Wir verrichten hier auf die Herleitung und geben das Ergebnis an:

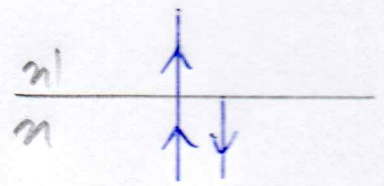


$$r_{||} = \frac{E''_{e0}}{E''_{i0}} = \frac{n' \cos \vartheta_i - n \cos \vartheta_g}{n' \cos \vartheta_i + n \cos \vartheta_g} \quad (9.72)$$

$$t_{||} = \frac{E''_{g0}}{E''_{i0}} = \frac{2n \cos \vartheta_i}{n' \cos \vartheta_i + n \cos \vartheta_g} \quad (9.73)$$

Wir bemerken, dass die Fresnel-Formeln nur für dielektrische mit reellen Brechungsindizes (9.47) abgeleitet wurden. Es zeigt sich aber, dass sie auch so in leitenden Materialien gelten, wo die Brechungsindizes komplex sind. Dabei ist zu beachten, dass dann Reflexions- und Transmissionskoeffizienten sowohl einen Betrag als auch eine Phase besitzen.

Im Spezialfall eines senkrechten Einfalls mit  $\vartheta_i = \vartheta_r = \vartheta_g = 0$  folgt aus (9.70) - (9.73):



$$r = r_{\perp} = -r_{||} = \frac{n - n'}{n + n'} \quad (9.74)$$

$$t = t_{\perp} = t_{||} = \frac{2n}{n + n'} \quad (9.75)$$

### 9.2.4 Energieströme:

Der Poynting-Vektor (7.44), der den Energiefluß beschreibt, lautet wegen (8.98) und  $\mu_r = 1$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (9.76)$$

Aus der These auf Seite 87 folgt dann, dass die jeweiligen Poynting-Vektoren  $\vec{S}_i, \vec{S}_r, \vec{S}_g$  in Richtung der entsprechenden Wellenvektoren  $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_g$  zeigen.

Der jeweilige Fluß durch die Grenzfläche ist dann durch  $|\vec{S}_i| \cos \vartheta_i, |\vec{S}_r| \cos \vartheta_i, |\vec{S}_g| \cos \vartheta_g$  gegeben. Wir betrachten zunächst die einfallende Welle und erhalten durch Realteilbildung von (9.48)

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{E0} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.77)$$

und entsprechend

$$\vec{H}_i(\vec{r}, t) = \vec{H}_{E0} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.78)$$

so dass der einfallende Poynting-Vektor (9.76) gegeben ist durch

$$\vec{S}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{i0} \times \vec{H}_{i0} \cos^2(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (9.79)$$

Bildet man hiervon das zeitliche Mittel

$$\langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \vec{S}_i(\vec{r}, t) \quad (9.80)$$

so erhalten wir

$$\langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}_{i0} \times \vec{H}_{i0} \quad (9.81)$$

Für den zeitlich gemittelten Fluß durch die Grenzfläche folgt dann

$$S_i = \langle \vec{S}_i(\vec{r}, t) \rangle \cdot \cos \vartheta_i = \frac{1}{2} E_{i0} H_{i0} \cos \vartheta_i \quad (9.82)$$

was sich mit Hilfe von (9.63) reduziert auf

$$S_i = \frac{n}{2c\mu_0} E_{i0}^2 \cos \vartheta_i \quad (9.83)$$

Analog dazu erhalten wir auch für die reflektierte und die gebrochene ebene Welle

$$S_r = \frac{n}{2c\mu_0} E_{r0}^2 \cos \vartheta_r, \quad S_g = \frac{n'}{2c\mu_0} E_{g0}^2 \cos \vartheta_g \quad (9.84)$$

Damit lassen sich die Bruchteile des reflektierten bzw. transmittierten Energieflusses berechnen, nämlich den Reflexionskoeffizienten

$$R_{\perp} = \frac{S_r^{\perp}}{S_i^{\perp}} \stackrel{(9.83), (9.84)}{=} \frac{E_{r0}^2}{E_{i0}^2} \stackrel{(9.70)}{=} r_{\perp}^2 \quad (9.85)$$

und den Transmissionskoeffizienten

$$T_{\perp} = \frac{S_g^{\perp}}{S_i^{\perp}} \stackrel{(9.83), (9.84)}{=} \frac{n'}{n} \frac{E_{g0}^2 \cos \vartheta_g}{E_{i0}^2 \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.71)}{=} t_{\perp}^2 \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.86)}{=} \quad (9.86)$$

Dabei gilt unabhängig vom Einfallswinkel  $\vartheta_i$  und vom Brechungswinkel  $\vartheta_g$ :

$$R_{\perp} + T_{\perp} \stackrel{(9.85), (9.86)}{=} r_{\perp}^2 + t_{\perp}^2 \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \stackrel{(9.70), (9.71)}{=} \frac{1}{(n \cos \vartheta_i + n' \cos \vartheta_g)^2} \left\{ (n \cos \vartheta_i - n' \cos \vartheta_g)^2 + 4n^2 \cos^2 \vartheta_i \frac{n' \cos \vartheta_g}{n \cos \vartheta_i} \right\} \Rightarrow R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \quad (9.87)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt auch für die parallele Polarisation?

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \quad (9.88)$$

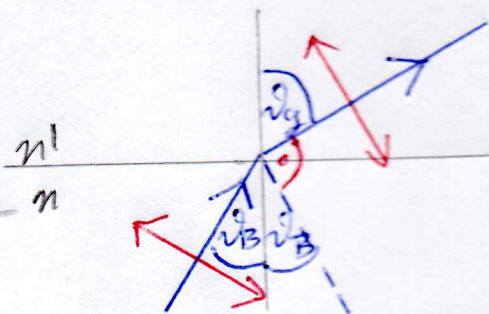
Aus (9.85) - (9.88) folgt, dass unabhängig von der Polarisation die Energieerhaltung gewährleistet ist

$$S_r + S_g = S_i \quad (9.89)$$

### 9.2.5 Brewster-Winkel:

Die Phänomene Reflexion und Brechung lassen sich auch von einem heuristischen Standpunkt aus verstehen. Die Elektronen im Medium mit dem Brechungsindex  $n'$  werden durch die geladene Welle zu Schwingungen angeregt und stellen dann leitfähige Dipole dar. Ein Teil der Schwingungsenergie dieser Dipole erscheint dann als reflektierter Strahl.

Wir wenden nun dieses heuristische Bild für die parallele Polarisation an. Wir fragen uns nun, wann es nach diesem Argument zu keiner reflektierten Welle kommt.



In Abschnitt 7.9 hatten wir gesehen, dass ein Dipol nicht in Richtung der Dipolachse strahlt. Daher erwarten wir keinen reflektierten Strahl beim Brewster Winkel  $\theta_i = \theta_B$  mit

$$\theta_B + \theta_g = \frac{\pi}{2} \quad (9.90)$$

Zusammen mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz folgt dann

$$\frac{n'}{n} \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_g} \stackrel{(9.59)}{=} \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_g} \stackrel{(9.90)}{=} \frac{\sin \theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \tan \theta_B \quad (9.91)$$

In der Tat verschwindet beim Brewster-Winkel (9.91) der Reflexionskoeffizient mit paralleler Polarisation:

$$r_{\parallel} \stackrel{(9.72)}{=} \frac{n' \cos \theta_B - n \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_B)}{n' \cos \theta_B + n \cos(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} \stackrel{(9.91)}{=} n \left\{ \frac{\sin \theta_B \cos \theta_B - \sin^2 \theta_B}{\cos \theta_B \cos \theta_B + \sin^2 \theta_B} \right\} \stackrel{(9.90)}{=} 0 \quad (9.92)$$

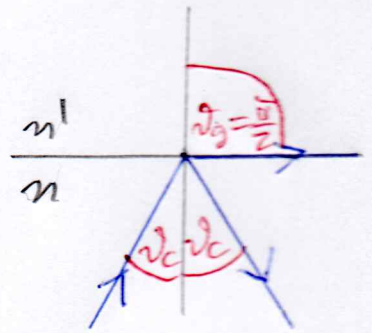
Das bedeutet, dass beim Einstrahlen von unpolarisiertem Licht unter dem Brewster-Winkel das reflektierte Licht eine eindeutig senkrechte Polarisation

aufweist. Damit handelt es sich um ein Versilveren, um polarisiertes Licht zu erzeugen.

Zum Schluß bemerken wir als Beispiel, dass Luft und Glas die Brechungsindizes 1 und 1,5 besitzen. Daher ist der Brewster-Winkel für Glas-Luft durch  $\arctan(1/1,5) = 33,7^\circ$  und für Luft-Glas durch  $\arctan(1,5) = 56,3^\circ$  gegeben.

### 9.2.6 Totalreflexion:

Wir betrachten nun für den Fall  $n > n'$  die Situation, bei der die gebrochene Welle den Brechungswinkel  $\vartheta_g = \pi/2$  aufweist. Dann erhält man für den kritischen Winkel der Totalreflexion  $\vartheta_i = \vartheta_c$  nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz (9.59)



$$\sin \vartheta_c = \frac{n'}{n} \quad (9.93)$$

Aus (9.70) und (9.72) folgt dann in der Tat

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = 1 \quad (9.94)$$

und die gesamte einfallende Welle wird reflektiert. Als Grenzwinkel für Glas-Luft erhalten wir demnach  $\arcsin(1/1,5) = 41,8^\circ$ .

Was passiert aber, wenn der Winkel  $\vartheta_i$  der einlaufenden Welle größer ist als der kritische Winkel der Totalreflexion  $\vartheta_c$ :

$$\vartheta_i > \vartheta_c \quad (9.95)$$

Dann erhalten wir für die gebrochene Welle

$$\begin{aligned} k_{gz} &= |\vec{k}_g| \cos \vartheta_g = |\vec{k}_g| \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_g} \stackrel{(9.59)}{=} |\vec{k}_g| \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 \vartheta_i} \\ &= |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\frac{n'^2}{n^2} - \sin^2 \vartheta_i} = |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\sin^2 \vartheta_c - \sin^2 \vartheta_i} \end{aligned} \quad (9.96)$$

Ausgehend von (9.95) müssen wir (9.96) interpretieren als

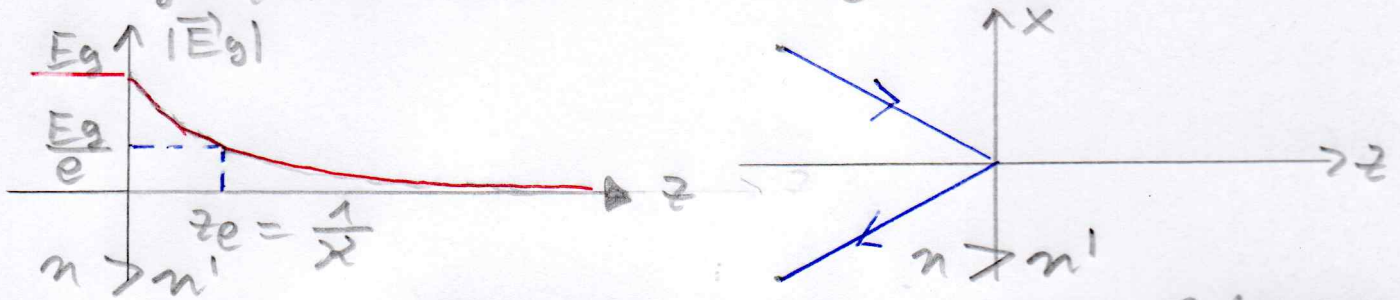
$$k_{gz} = i \alpha, \quad \alpha = |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \sin^2 \vartheta_c} \quad (9.97)$$

Das bedeutet, dass die transmittierte Welle exponentiell im optisch dünneren Medium gedämpft wird und daher dort nur wenig eintritt. Da aber

$$k_{gx} = |\vec{k}_g| \sin \vartheta_g \stackrel{(9.59)}{=} |\vec{k}_g| \frac{n}{n'} \sin \vartheta_i \quad (9.98)$$

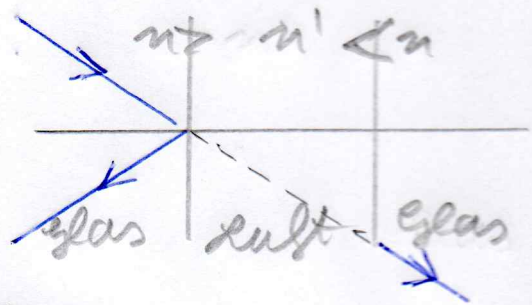
well ist, heißt das, dass die gebrochene Welle parallel zur Grenzfläche propagiert

$$\vec{E}_g(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(k_x x - \omega t)} e^{-\chi z} \quad (9.99)$$

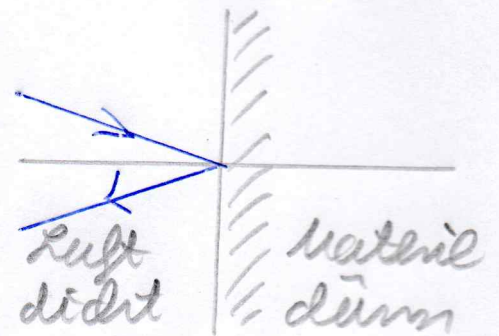


Um experimentell festzustellen, dass das Licht exponentiell ins optisch dünnere Medium eindringt, kann man so vorgehen, dass man im kleinen Abstand  $z < z_0 = 1/\chi$  wieder ein optisch dichteres Medium platziert:

In einem solchen Fall ist die Totalreflexion nicht total, da die gebrochene Welle hinter der Lücke wieder erscheint.

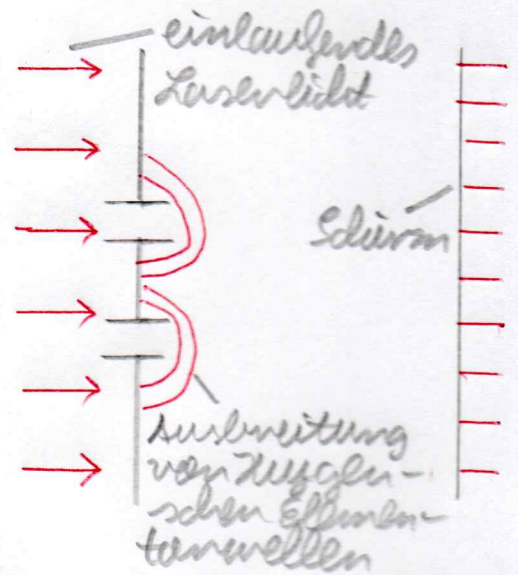


Wir hatten weiter oben bemerkt, dass die Brechungsindizes von Materialien von der Frequenz der elektromagnetischen Wellen abhängen. Bei Röntgenstrahlen ist nun die Materie typischerweise optisch dünner als Luft bzw. das Vakuum. Daher kommt es bei Röntgenstrahlen zu einer äußeren Totalreflexion. Da die Eindringtiefe der Röntgenstrahlen etwa  $50 \text{ \AA}$  beträgt, lassen sich damit die Oberflächen untersuchen.



## 10 Interferenz und Beugung:

Betrachten wir als konkretes Beispiel die Interferenz von Licht im Young'schen Doppelspaltexperiment. Dabei soll die Spalte als sehr klein angenommen sein. Auf einem weit entfernten Schirm treten dann abwechselnd dunkle und helle Streifen auf.

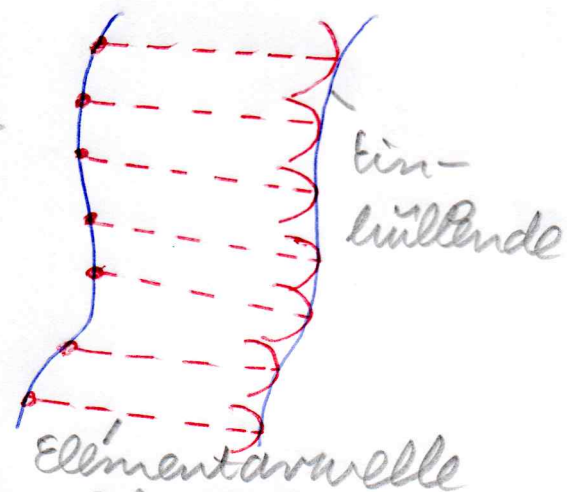


Interferenz ist eine Überlagerung von Wellen, so dass die resultierende Gesamtintensität ungleich der Summe der Einzelintensitäten ist. Bei der Interferenz von Lichtwellen entstehen auf dem Schirm helle und dunkle Interferenzstreifen. Das Substrat von Interferenzen findet man nur bei Wellenphänomenen.

Interferenz ist in den Maxwell-Gleichungen enthalten. Die Lösung der Maxwell-Gleichungen wie z. B. für das Young'sche Doppelspaltexperiment ist aber schwierig, da man die Randbedingungen der elektromagnetischen Felder beider Spalte berücksichtigen muss. Deshalb verwendet man Näherungsmethoden, die sich in Form von Brunszipsin formulieren lassen.

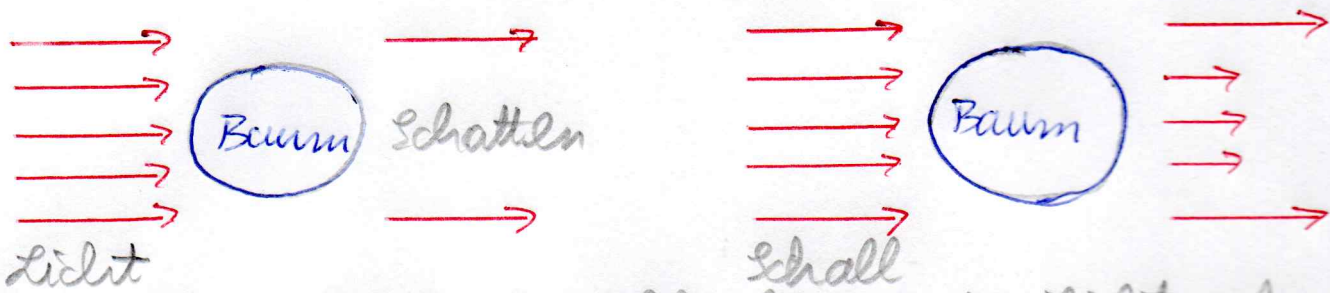
### 10.1 Elementarwellen:

Nachdem Huygens'sches Brunszipsin kann man zu einem beliebigen Zeitpunkt jeden Punkt der Wellenfront als Ausgangspunkt einer Elementarwelle betrachten. Die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt erhält man dann als Einhüllende der jeweiligen Elementarwellen.



Das Huygens'sche Brunszipsin erlaubt es, viele Phänomene richtig zu beschreiben. Es berücksichtigt aber nicht die Wellenlänge und ist daher auch nicht in der Lage, die In-

terebene esicht wiederzugeben. Tatsächlich ist nämlich die Wellenlänge durchaus für die Beugung relevant. Vergleichen wir hierzu die Beugung von Licht bzw. Schall an einem Baum

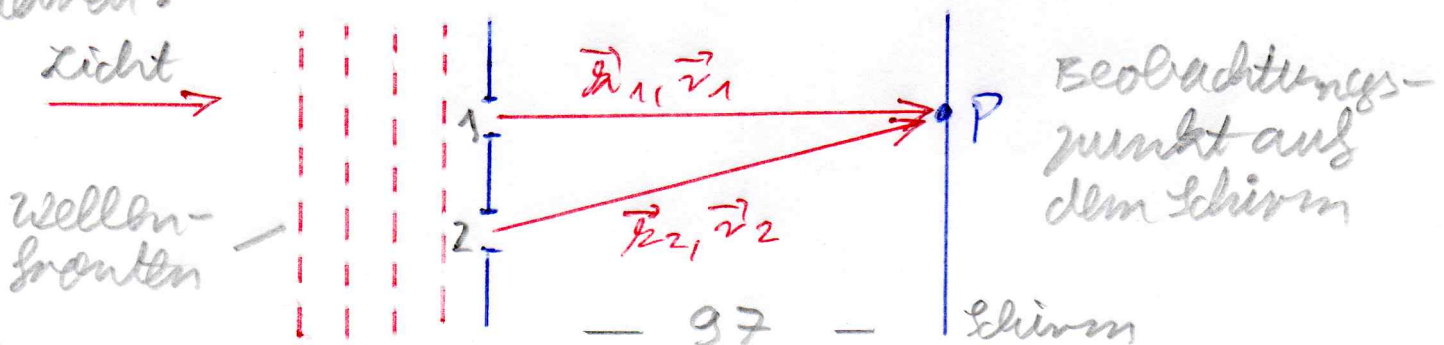


Im ersten Fall ist die Wellenlänge des Lichts sehr viel kleiner als die geometrische Abmessung des Baumes. Deshalb kann das Licht nicht direkt hinter den Baum gelangen, es bildet sich dort ein Schatten aus. Im zweiten Fall dagegen ist die Wellenlänge des Schalls von der Größenordnung der Baumabmessungen, so dass der Schall zum Teil auch direkt hinter den Baum durch Beugung auftreten kann.

Demgegenüber sagt aber das Huygenssche Prinzip in beiden Fällen den gleichen Verlauf der Wellenfront aus. Um also auch Beugung beschreiben zu können, benötigen wir eine Erweiterung des Huygenschen Prinzips. Hierzu besagt das Huygens-Fresnel-Prinzip, dass das optische Feld die Überlagerung von Elementarwellen ist, bei denen sowohl die Amplitude als auch die Phase relevant sind. Wir zeigen nun, dass man mit Hilfe des Huygens-Fresnel-Prinzips das Beugungsbild beim Youngschen Doppelspalt verteilen kann.

### 10.2 Doppelspaltexperiment:

Wir nehmen im folgenden an, dass die Spalte 1 und 2 beim Doppelspaltexperiment beliebig klein sind. Deshalb werden wir die Beugungsnäherung vernachlässigen, die von der Endlichkeit der Spaltbreite herühren:



Jeder der beiden Spalte 1 und 2 ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Eigentlich handelt es sich bei diesen Elementarwellen um Kugelwellen. In einem großen Abstand von den Spalten kann man aber diese näherungsweise als ebene Wellen behandeln:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1, t) = \vec{E}_{10} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t + \varphi_1)} \quad (10.1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \vec{E}_{20} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t + \varphi_2)} \quad (10.2)$$

hierbei bezeichnen  $\vec{E}_{10}, \vec{E}_{20}$  die jeweiligen Polarisationsvektoren. Nach dem Superpositionsprinzip kommt es zur Überlagerung der komplexen Wellen (10.1) und (10.2):

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_1(\vec{r}_1, t) + \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) \quad (10.3)$$

In der Fernzone hat der Poynting-Vektor nach (7.32) und (7.47) den Betrag

$$|\vec{S}(t)| = \frac{1}{\mu_0 c} |\vec{E}(t)|^2 \quad (10.4)$$

Am Beobachtungspunkt P auf dem Schirm wird der zeitlich gemittelte Betrag des Strahlungsflusses registriert:

$$S = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt |\vec{S}(t)| \quad (10.5)$$

Einsetzen von (10.1) - (10.4) in (10.5) ergibt

$$S = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \vec{E}_{10}^2 \cos^2(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t + \varphi_1) + \vec{E}_{20}^2 \cos^2(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t + \varphi_2) + 2 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t + \varphi_1) \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t + \varphi_2) \right\} \quad (10.6)$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme reduziert sich (10.6) auf

$$S = \frac{1}{2\mu_0 c} \left\{ \vec{E}_{10}^2 + \vec{E}_{20}^2 + 2 \vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_1 - \varphi_2) \right\} \quad (10.7)$$

Dabei stellen die ersten beiden Terme in (10.7) die Intensitäten dar, die jeweils ausschließlich vom Spalt  $S_1$  und  $S_2$  herrühren:

$$S_1 = \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E}_{10}^2, \quad S_2 = \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E}_{20}^2 \quad (10.8)$$

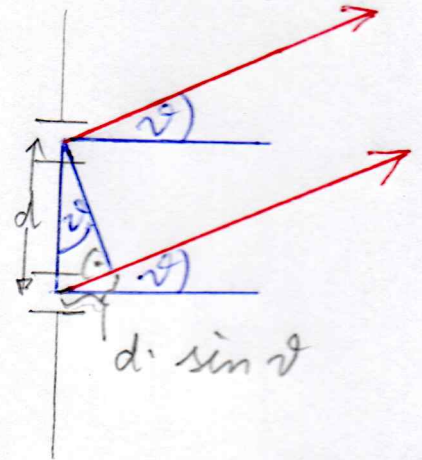
Der letzte Term in (10.7) dagegen ist für die Interferenz verantwortlich. Dabei tritt die effektive Phasendifferenz

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (10.9)$$

der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an, dass die Phasen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  der beiden Ebenen  $(10.1)$ ,  $(10.2)$  gleich sein sollen, so dass sich die effektive Phasendifferenz auf den Ausdruck

$$\delta = \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 \quad (10.10)$$

reduziert, der sowohl von der Wellenlänge als auch von der Wegdifferenz abhängt. Befindet sich nämlich der Schirm weit weg, dann erscheint ein Beobachtungspunkt  $P$  von beiden Spalten aus gesehen näherungsweise unter demselben Beobachtungswinkel  $\vartheta$ . Dann erhalten wir für  $(10.10)$



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta \quad (10.11)$$

Hierbei tritt das Verhältnis vom Abstand  $d$  der beiden Spalte und der Wellenlänge  $\lambda$  auf.

Wenn die Polarisationsvektoren  $\vec{E}_{10}$  und  $\vec{E}_{20}$  senkrecht aufeinander stehen würden, so würde aus  $(10.7)$  und  $(10.8)$  unmittelbar

$$S = S_1 + S_2 \quad (10.12)$$

Im Doppelspaltexperiment sind diese Polarisationsvektoren aber parallel zueinander, so dass der Interferenzstrom in  $(10.7)$  relevant ist. Mit Hilfe von  $(10.8)$  erhalten wir dann

$$S(\delta) = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \cos \delta \quad (10.13)$$

Verschieben wir den Beobachtungspunkt  $P$  auf dem Schirm, so ändert sich die effektive Phasendifferenz  $\delta$  gemäß  $(10.10)$  bzw.  $(10.11)$ . Dadurch kommt es zu einer periodischen Modulation der Schirmintensität - es treten helle und dunkle Streifen auf:

- Eine konstruktive Interferenz tritt auf, wenn die effektive Phasendifferenz gerade  $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi,$

... ist:

$$S_{\max} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} \quad (10.14)$$

Nach (10.11) ist dies genau dann der Fall, wenn der Wegunterschied  $d \sin \vartheta$  von den beiden Spalten zum Beobachtungspunkt auf dem Schirm gerade ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  ist.

- Eine destruktive Interferenz tritt auf, wenn die effektive Phasendifferenz gerade  $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$  ist:

$$S_{\min} = S_1 + S_2 - 2\sqrt{S_1 S_2} \quad (10.15)$$

Nach (10.11) ist dies dann der Fall, wenn der Wegunterschied  $d \sin \vartheta$  gerade ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge  $\lambda$  ist.

Im Spezialfall, dass die Polarisationsvektoren  $\vec{E}_{10}$  und  $\vec{E}_{20}$  dieselbe Betragsgleichheit aufweisen, folgt aus (10.8):  $S_1 = S_2 = S$ . Dann erhalten wir aus (10.14)

$$S(\delta) = 2S(1 + \cos \delta) = 4S \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (10.16)$$

so dass der maximale Strahlungsfluss

$$S_{\max} = 4S \quad (10.17)$$

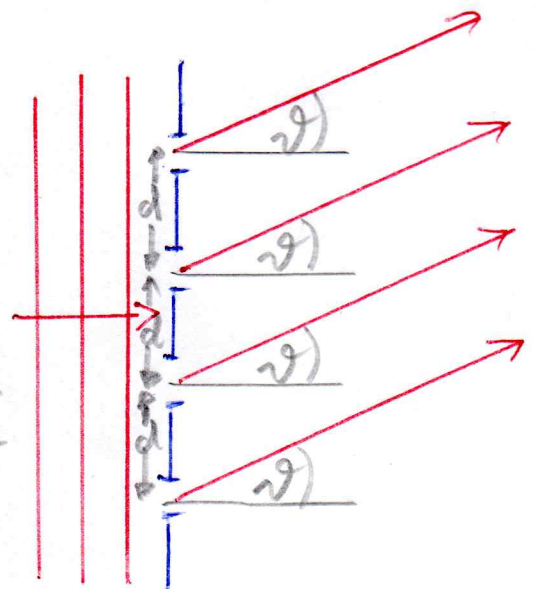
ist. Das heißt, dass durch konstruktive Interferenz zweier Wellen nicht die doppelte sondern sogar die vierfache Intensität auf dem Schirm auftritt. Dies ist deshalb möglich, weil der minimale Strahlungsfluss durch

$$S_{\min} = 0 \quad (10.18)$$

gegeben ist, d.h. manche Stellen auf dem Schirm sind dunkel.

### 10.3 Gitter:

Wir betrachten nun ein Gitter, das aus  $N$  äquidistanten Spalten im Abstand  $d$  besteht. Der Beobachtungspunkt  $P$  auf dem Schirm soll weit entfernt sein. Außerdem nehmen wir an, dass alle Elementarwellen dieselben Beträge der Polarisationsvektoren



$$|\vec{E}_{101}| = |\vec{E}_{202}| = \dots = |\vec{E}_{N0N}| = E_0 \quad (10.19)$$

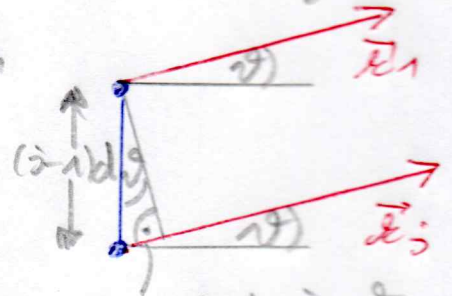
und die reellen Phasen

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = 0 \quad (10.20)$$

bestehen. Nach dem Huygens-Fresnel-Prinzip kommt es dann zur folgenden Überlagerung von Elementarwellen

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \left\{ e^{i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t)} + e^{i(\vec{k}_2 \vec{r}_2 - \omega t)} + \dots + e^{i(\vec{k}_N \vec{r}_N - \omega t)} \right\} \\ = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t)} \left\{ 1 + \dots + e^{i(\vec{k}_N \vec{r}_N - \vec{k}_1 \vec{r}_1)} \right\} \quad (10.21)$$

Alle Elementarwellen haben denselben Betrag des Wellenvektors  $|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \dots = |\vec{k}_N| = \omega/c$ , so dass die Wegdifferenz zweier Elementarwellen



$$\vec{k}_j \cdot \vec{r}_j - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = (j-1) \delta \quad (10.22)$$

mit der Phasendifferenz benachbarter Spalte wie in (10.11)

$$\delta = k d \sin \vartheta \quad (10.23)$$

gegeben ist. Demnach liegt in (10.21) eine geometrische Summe vor:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t)} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i j \delta} \quad (10.24)$$

eine allgemeine geometrische Summe

$$G_N = \sum_{j=0}^{N-1} q^j \quad (10.25)$$

lässt sich wie folgt berechnen:

$$G_N \stackrel{(10.25)}{=} 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-2} + q^{N-1} \quad (10.26)$$

$$q \cdot G_N \stackrel{(10.26)}{=} q + q^2 + \dots + q^{N-1} + q^N \quad (10.27)$$

$$(1-q)G_N = 1 - q^N \Rightarrow G_N = \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (10.28)$$

Unter Berücksichtigung von (10.28) erhalten wir aus (10.24) mit  $q = e^{i\delta}$  das Ergebnis

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t)} \cdot \frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} \quad (10.29)$$

mit Hilfe der Umformung

$$\frac{e^{iN\delta} - 1}{e^{i\delta} - 1} = \frac{e^{iN\delta/2} (e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2})}{e^{i\delta/2} (e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2})} = e^{i(N-1)\frac{\delta}{2}} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (10.30)$$

reduziert sich (10.29) schließlich auf

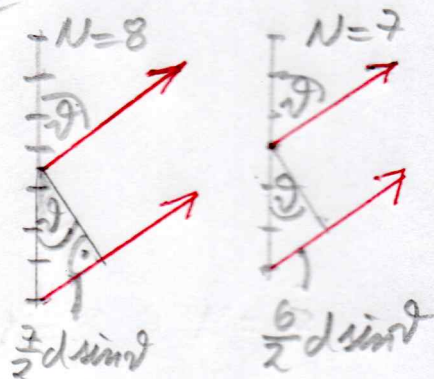
$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t + \frac{N-1}{2}\delta)} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (10.31)$$

Aus den nebenstehenden Bildern entnehmen wir für den Abstand des mittleren Gitterpunktes vom Beobachtungspunkt  $P$  auf dem Schirm

$$R = r_1 + \frac{N-1}{2} d \sin \delta \quad (10.32)$$

wobei dies sowohl für gerade als auch für ungerade  $N$  gilt. Einsetzen von (10.32) in (10.31) führt deshalb auf

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{i(kR - \omega t)} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (10.32)$$



Das zeitliche Mittel des Betrages des Strahlungsflusses ergibt sich dann zu

$$S_N(\delta) = S \left( \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 \quad (10.33)$$

mit dem zeitlich gemittelten Strahlfluss eines einzelnen Gattes

$$S = \frac{1}{2\mu_0 c} \vec{E}_0^2 \quad (10.34)$$

Wichtige Spezialfälle aus (10.33) ergeben sich für einen Gatt ( $N=1$ ):

$$S_1(\delta) = S \quad (10.35)$$

und für zwei Gatte ( $N=2$ )

$$S_2(\delta) = S \left( \frac{\sin \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = S \left( \frac{2 \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = 4S \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (10.36)$$

was mit (10.16) übereinstimmt. Entsprechend erhalten wir für drei Gatte ( $N=3$ ):

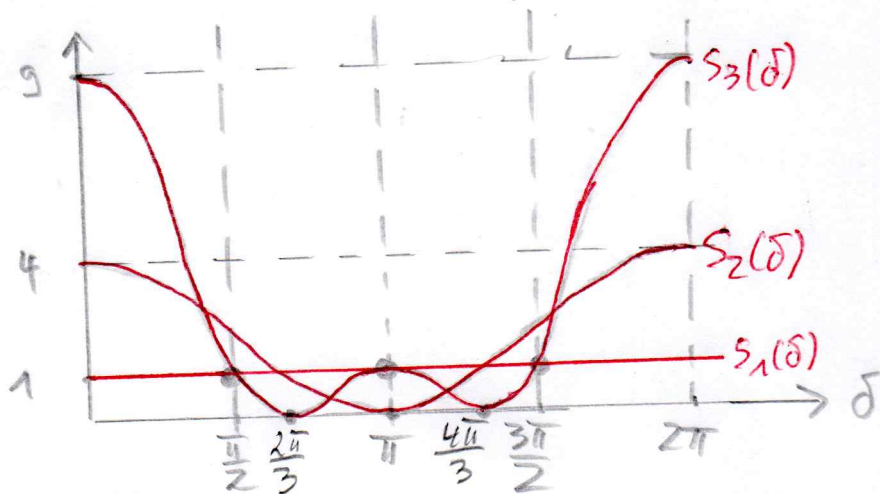
$$S_3(\delta) = S \left( \frac{\sin \frac{3\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 = S \left( \cos \delta + 2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \right)^2 = S (1 + 2 \cos \delta)^2 \quad (10.37)$$

Im Hinblick auf eine graphische Darstellung bemerken wir zunächst, dass die auf dem Schirm beobachtbare In-

Intensität  $S_N(\delta)$  als Funktion der Phasendifferenz  $\delta$  die Periodizität zu aufweist:

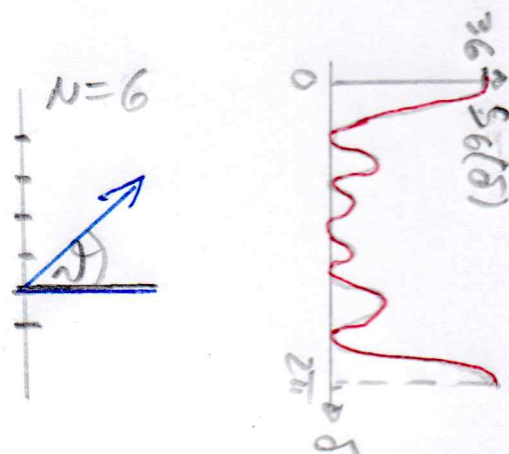
$$S_N(\delta + 2\pi) \stackrel{(10.33)}{=} S \left( \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2} + N\pi\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2} + \pi\right)} \right)^2 = S \left( \frac{(-1)^N \sin\frac{N\delta}{2}}{-\sin\frac{\delta}{2}} \right)^2 \stackrel{(10.33)}{=} S_N(\delta) \quad (10.38)$$

Deshalb reicht es aus,  $S_N(\delta)$  im Intervall  $[0, 2\pi]$  darzustellen:



Interessiert man sich für die Abhängigkeit vom Beugungswinkel  $\delta$ , so ist entsprechend (10.23) in (10.33) einzusetzen:

$$S_N(\delta) = S \left[ \frac{\sin\left(\frac{N}{2} kd \sin \delta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} kd \sin \delta\right)} \right]^2 \quad (10.39)$$



Wir beobachten, dass sowohl im (10.33) als auch in (10.39) der Zähler zu schneller und der Nenner zu langsamen Oszillationen der Intensität auf dem Schirm führt. Dabei ist das Gitterbeugungsbild durch drei wesentliche Eigenschaften charakterisiert. Es treten Hauptmaxima, Nullstellen und Nebenmaxima auf.

### Hauptmaxima:

Die Hauptmaxima treten auf, wenn alle Gitterkonstruktiv miteinander interferieren. Dies ist dann der Fall, wenn die Phasendifferenz zweier benachbarter Gitter  $\delta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist:

$$\delta_{2n}^{H.M.} = 2\pi n; \quad n \in \mathbb{Z} \quad (10.40)$$

Nach (10.23) treten die Hauptmaxima genau dann auf, wenn die Bragg-Bedingung

$$d \sin \vartheta_n^{HM} = 2\pi n \Rightarrow d \sin \vartheta_n^{HM} = n\lambda; n \in \mathbb{Z} \quad (10.41)$$

erfüllt ist. Im Falle von (10.40) besitzen aber sowohl der Zähler als auch der Nenner von (10.33) eine doppelte Nullstelle. Um die Intensität der Hauptmaxima berechnen zu können, muss man also die Regel von de l'Hôpital zwei Mal anwenden oder aber eine Taylor-Reihe bezüglich  $\delta$  verwenden und erhält

$$S_N(\delta_n^{HM}) = N^2 S \quad (10.42)$$

Dies bedeutet, dass das  $N^2$ -fache der Einzelintensität auftritt.

### Nullstellen:

Zwischen zwei aufeinander folgenden Hauptmaxima gibt es genau  $N-1$  Nullstellen der Intensität, wo also der Zähler in (10.33) verschwindet und der Nenner von Null verschieden ist. Dort kommt es also zu einer vollständigen Auslöschung der Intensität auf dem Schirm. Die entsprechende Phasendifferenz zweier benachbarter Spalte  $\delta$  für das Auftreten der Nullstellen lautet

$$\delta_{n,m}^N = 2\pi \left( n + \frac{m}{N} \right); m = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (10.43)$$

Aufgrund von (10.23) ergeben sich die entsprechenden Beobachtungswinkel für diese Nullstellen zu

$$d \sin \vartheta_{n,m}^N = \lambda \left( n + \frac{m}{N} \right); m = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (10.44)$$

### Nebenmaxima:

Zwischen  $N-1$  Nullstellen von (10.33) gibt es  $N-2$  Nebenmaxima. Es stellt sich heraus, dass die Nebenmaxima gerade dort auftreten, wo der Zähler von (10.33) Eins wird.

$$\delta_{n,m}^{NM} = 2\pi \left( m + \frac{2m+1/2}{N} \right); m = 1, 2, \dots, N-2 \quad (10.45)$$

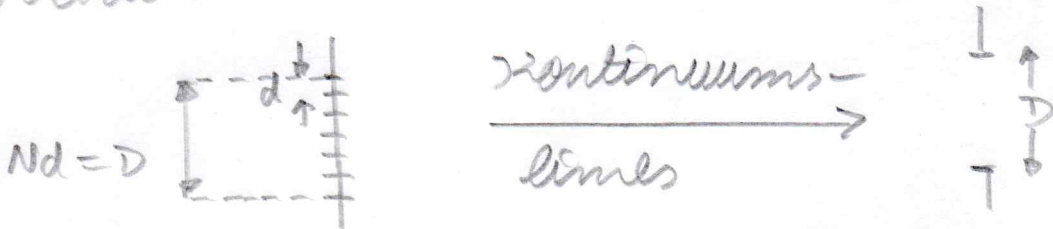
Die Werte der Nebenmaxima ergeben sich dann zu

$$S_N(\delta_{n,m}^{NM}) = \frac{S}{\sin^2 \frac{\pi}{N} \left( m + \frac{1}{2} \right)} \leq S \quad (10.46)$$

und sind daher kleiner als die Intensität eines einzelnen Spalts.

## 10.5 Gitter:

Als drittes Beispiel betrachten wir die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Gitter der endlichen Breite  $D$ . Zunächst machen wir uns zu Klare, dass man einen solchen Gitter mit endlicher Breite als ein Gitter aus unendlich vielen, unendlich dichten Gittern auffassen kann. Das bedeutet, dass wir ein Gitter aus  $N$  Gittern im Abstand  $d$  betrachten mit  $N \cdot d = D$ . Im Limes  $N \rightarrow \infty$  muss dann entsprechend  $d \rightarrow 0$  gehen, wobei aber  $N \cdot d = D$  konstant bleibt:



Aus (10.39) lesen wir in diesem Kontinuums-Limes ab:

$$S_N(\vartheta) = S \left[ \frac{\sin\left(\frac{1}{2} k D \sin \vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} k \frac{D}{N} \sin \vartheta\right)} \right]^2 \approx S N^2 \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} D \sin \vartheta\right)}{\frac{\pi}{\lambda} D \sin \vartheta} \right]^2 \quad (10.47)$$

Damit für die relative Intensität die sogenannte Beugungsfunktion

$$\frac{S_{\text{rel}}(\vartheta)}{S_{\text{rel}}(0)} = \left( \frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 \quad (10.48)$$

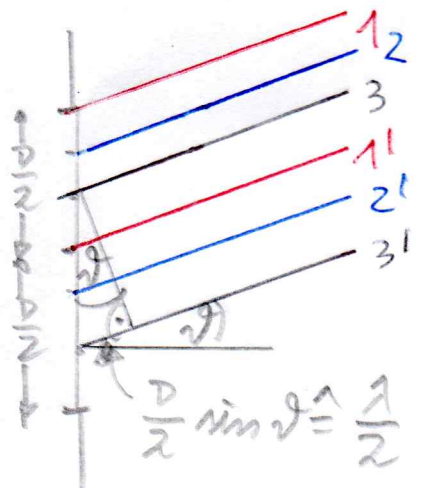
mit der Phasendifferenz

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \vartheta \quad (10.49)$$

Die Beugungsfunktion (10.48) hat Nullstellen dort, wo der Zähler verschwindet

$$\delta_n = \pi n \stackrel{(10.49)}{\Rightarrow} D \sin \vartheta_n = n \lambda; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.50)$$

Das Auftreten der Nullstellen lässt sich dabei auch anschaulich erklären. Im Falle von  $n = 1$  haben jeweils zwei Strahlen 1 und 1', 2 und 2', 3 und 3', usw. in der oberen bzw. unteren Hälfte des Strahls jeweils die Phasendifferenz  $\pi$ , sodass sie sich gegenseitig auslöschen.



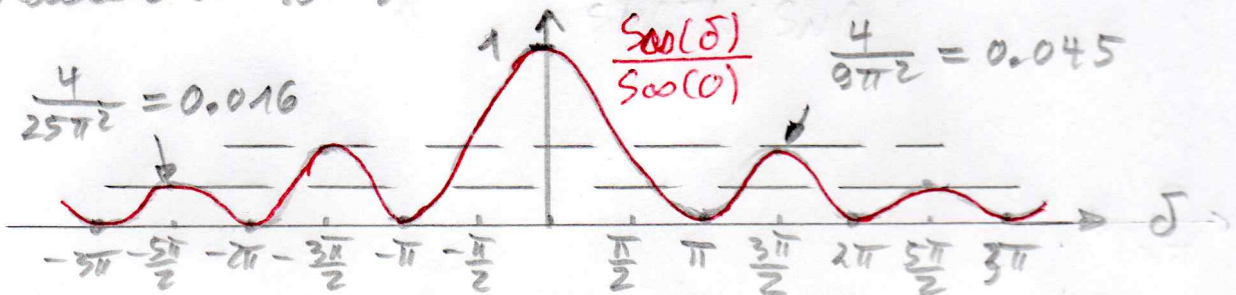
Ferner hat die Beugungsfunktion (10.48) auch Nebenmaxima. Sie treten dort auf, wo der Zähler gerade eins wird, also für

$$J_n^M = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.51)$$

Die entsprechenden Nebenmaxima der Beugungsfunktion (10.48) nehmen dabei die Werte

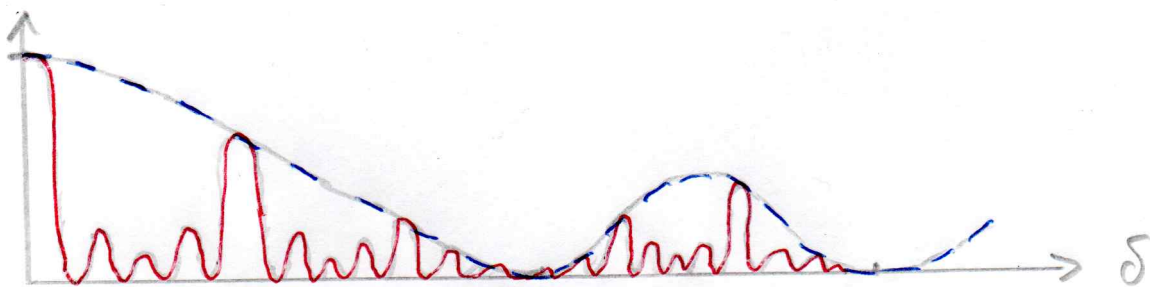
$$\frac{S_{\infty}(J_n^M)}{S_{\infty}(0)} = \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.52)$$

an. Damit ergibt sich für die Beugungsfunktion des Spalts der folgende Verlauf

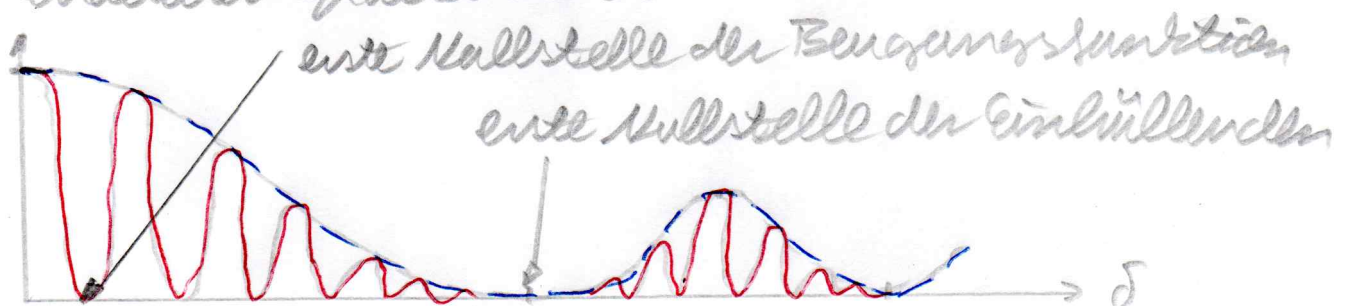


### 10.5. Gitter mit endlicher Spaltbreite:

Ein reelles Gitter hat  $N$  Spalte im Abstand  $d$ , wobei aber jeder einzelne Spalt die Spaltbreite  $D \ll d$  besitzt. Die resultierende Intensitätsverteilung ist dann ein Produkt von Gitterbeugungsfunktion (10.33) und Spaltbeugungsfunktion (10.48). Dabei ist die Spaltbeugungsfunktion die einhüllende für die Gitterbeugungsfunktion. Im Falle  $N=5$  erhalten wir z.B.



Entsprechend erhalten wir bei einem Doppelspalt mit endlicher Spaltbreite  $D$ :



Aus einem solchen Beugungsbild lassen sich viele zusätzliche Informationen ablesen. Beispielsweise kann man aus der ersten Nullstelle der Einfallenden bei bekannter Wellenlänge  $\lambda$  die Spaltbreite  $D$  bestimmen. Aus (10.50) folgt nämlich für  $n=1$ :

$$D = \frac{\lambda}{\sin \vartheta_{01}^N} \quad (10.53)$$

Entsprechend kann man aus der ersten Nullstelle der Beugungsfunktion bei bekannter Wellenlänge  $\lambda$  den Abstand  $d$  zwischen den Doppelspalten bestimmen. Aus (10.23) und (10.43) lesen wir hierzu ab

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \vartheta_{01}^N = 2\pi \cdot \frac{1}{\lambda} \Rightarrow d = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta_{01}^N} \quad (10.54)$$

# 11 Spezielle Relativitätstheorie

In diesem Kapitel entwickeln wir Schritt für Schritt die Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie. Wir fassen zunächst die Vorstellungen von Raum und Zeit zusammen, die ursprünglich von Aristoteles und Galilei geprägt worden sind. Dann diskutieren wir, wie diese Vorstellungen von Raum und Zeit durch die Einsteinsche Relativitätstheorie verändert worden sind. Dabei werden wir ausgehend von den Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie einige grundlegende physikalische Konsequenzen wie die Zeitdilatation oder die Längenkontraktion ableiten. Anschließend entwickeln wir das Vektor- und Tensor-Kalkül der Speziellen Relativitätstheorie, mit dem sich physikalische Gesetzmäßigkeiten kompakt formulieren lassen. Im nächsten Kapitel wenden wir dieses Vektor- und Tensorkalkül dann an, um die Newtonsche Mechanik zur Einsteinschen Mechanik zu erweitern und um die Maxwell'sche Elektrodynamik relativistisch kovariant zu formulieren.

## 11.1 Historische Vorstellungen von Raum und Zeit

Die physikalischen Vorgänge spielen sich im Raum und Zeit ab. Dabei wird der Raum dadurch charakterisiert, dass man mit Hilfe von Koordinaten die Lage von Ereignissen beschreiben kann. Beziehungen zwischen den Lagen erlauben weitestgehend Aussagen über die Geometrie. Demgegenüber wird die Zeit dadurch charakterisiert, dass man mit ihrer Hilfe die Abfolge von Ereignissen protokollieren kann. Dadurch hat man z.B. Zugang zur Bewegung von Punktteilchen, d.h. der Kinematik und der Dynamik. Ein Ereignis lässt sich damit durch die Angabe von Zeit und Raum eindeutig beschreiben:

$$(t, \vec{r}) = (t, x, y, z) \quad (11.1)$$

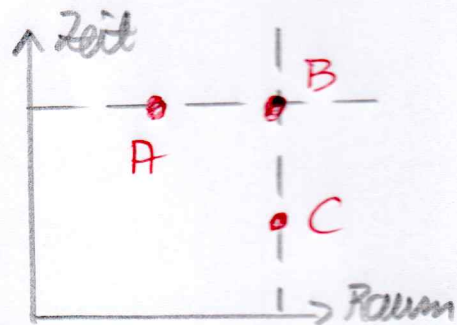
Um für diese einzelnen Komponenten aber dieselben physikalischen Dimensionen zu erhalten, verwendet man statt (11.1) besser

$$(ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) \quad (11.2)$$

Die Geschichte der Physik hat gezeigt, dass es eine enge Wechselbeziehung zwischen der Theorie von Raum und Zeit und den dynamischen Naturgesetzen gibt. Einerseits sind die geometrischen Strukturen notwendig, um dynamische Naturgesetze überhaupt formulieren zu können. Dabei können Symmetrieforderungen an Raum und Zeit wie z. B. Homogenität oder Isotropie die dynamischen Naturgesetze einschränken. Andererseits haben die Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie (1905) und die der Allgemeinen Relativitätstheorie (1915) durch Einstein gezeigt, dass sich dynamische Naturgesetze auf die geometrische Struktur von Raum und Zeit auswirken können.

### 11.1.1 Raum und Zeit nach Aristoteles:

Nach Aristoteles werden Raum und Zeit als absolute Größen aufgefasst. Bei den drei Ereignissen A, B, C werden die Ereignisse A und B als absolut gleichzeitig und die Ereignisse B und C als absolut gleichzeitig aufgefasst. Der Begriff "absolut" soll dabei zum Ausdruck bringen, dass es sich hierbei um Beobachtungen handelt, die unumstößlich sind und von allen Beobachtern so gesehen werden. Diese Vorstellungen von Aristoteles werden durch Kanturteiltät. Nach Kant sind Raum und Zeit Grundkategorien unseres Denkens bzw. Kategorien der Anschauung, die nicht weiter hinterfragt werden können.



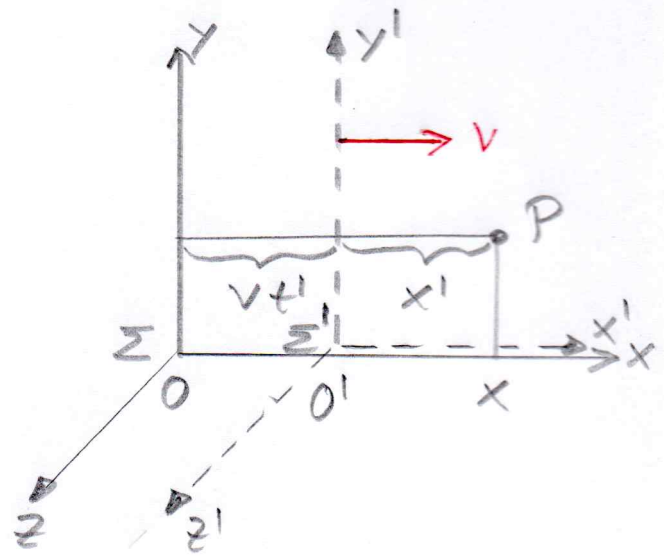
Die Zeit  $T$  wird als Menge  $\mathbb{R}$  angesehen, so dass für jeden Zeitpunkt  $t$  gilt:  $t \in \mathbb{R}$ . Da die Zeit als homogen angesehen wird, besitzen zwei zeitliche Ereignisse  $t, t' \in \mathbb{R}$  den euklidischen Abstand  $|t - t'|$ . Entsprechend wird der Raum  $X$  als die Menge  $\mathbb{R}^3$  angesehen, so dass für jeden Raumpunkt  $\vec{r}$  gilt:  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ . Da der Raum als homogen und isotrop angesehen wird, besitzen zwei Raumpunkte  $\vec{r}, \vec{r}' \in \mathbb{R}^3$  den euklidischen Abstand  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2}$ .

### 11.1.2 Raum und Zeit nach Galilei:

Die Vorstellungen von Aristoteles über Raum und Zeit werden von Galilei folgendermaßen kritisiert. Er stellte fest,

dass man kein absolut ruhendes Bezugssystem definieren kann. Außerdem führte er den Begriff des Inertialsystems ein. Es handelt sich dabei um ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreies Körper geradlinig und gleichförmig bewegen kann. Liegt ein Inertialsystem vor, so ist jedes gleichförmig dazu bewegte Bezugssystem auch wieder ein Inertialsystem. Diese Feststellung wird durch die Alltagserfahrung untermauert: Es gibt keine Möglichkeit, einen ruhenden von einem gleichförmig fahrenden Zug zu unterscheiden, wenn man über keinerlei Sinnesinformationen verfügt wie z. B. Fahrgewände oder einen Blick nach außen. Deshalb forderte Galilei, dass die mechanischen Naturgesetze in allen Inertialsystemen gelten müssen. Wenn man also von einem Inertialsystem in ein anderes Inertialsystem wechselt, d. h. wenn man eine Galilei-Transformation vornimmt, müssen die mechanischen Naturgesetze forminvariant sein. Man spricht von der Kovarianz der mechanischen Naturgesetze.

Wir betrachten zwei Bezugssysteme. Während das erste ruht, bewegt sich das zweite gegenüber dem ersten mit der Geschwindigkeit  $v$  in  $x$ -Richtung. Die Raum-Zeit-Koordinaten in beiden Bezugssystemen werden durch eine Galilei-Transformation ineinander überführt:



$$t = t'$$

$$x = x' + vt'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

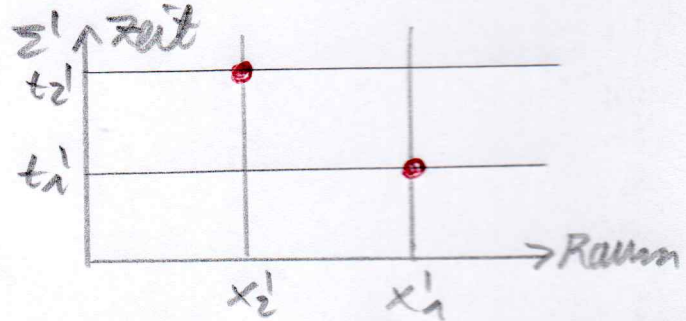
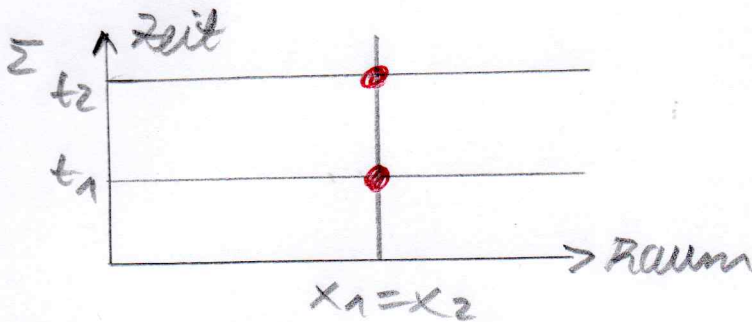
(11.3)

Als Beispiel betrachten wir als ruhendes Bezugssystem  $\Sigma$  den Bahnsteg und als gleichförmig bewegtes Bezugssystem  $\Sigma'$  einen fahrenden Zug. Es sollen zum zwei Ereignisse am selben Ort  $x_1 = x_2$  in  $\Sigma$  zu verschiedenen Zeiten

$t_2 > t_1$  stattfinden. Dann folgt aus (11.3) für  $\Sigma'$ :

$$x'_2 = x'_1 - v(t_2 - t_1) < x'_1 \quad (11.4)$$

Das bedeutet, dass es nach Galilei zwar auch weiterhin eine absolute Gleichzeitigkeit gibt, dass aber die Gleichzeitigkeit nun relativ, d.h. abhängig vom Bezugssystem, ist:



Wir betrachten nun die Galilei-Transformationen (11.3) und

$$\begin{aligned} t' &= t'' \\ x' &= x'' + v' t'' \\ y' &= y'' \\ z' &= z'' \end{aligned} \quad (11.5)$$

Dann ist die Hintereinanderausführung dieser beiden Galilei-Transformationen wieder eine Galilei-Transformation:

$$\begin{aligned} t &= t'' \\ x &= x'' + v'' t'' \\ y &= y'' \\ z &= z'' \end{aligned} \quad (11.6)$$

wobei sich die Geschwindigkeiten additiv transformieren:

$$v'' = v + v' \quad (11.7)$$

Dennnach besitzt die Gesamtheit aller Galilei-Transformationen die mathematische Struktur einer Gruppe. Dabei besagt (11.7) zunächst, dass die Menge der Galilei-Transformationen bezüglich der Hintereinanderausführung zweier Galilei-Transformationen abgeschlossen ist. Ferner lernen wir aus (11.7) ab, dass sich die Assoziativität bei Hintereinanderausführung von drei Galilei-Transformationen aus der Assoziativität der Addition der Geschwindigkeiten ergibt. Das Einselement ist eine Galilei-Transformation mit der Geschwindigkeit  $v=0$ . In der Tat folgt nach (11.7) aus  $v=0$  unmittelbar  $v''=v'$ . Das zu (11.3) inverse Element ist

eine Galilei-Transformation mit der Erdbeweglichkeit  $v' = -v$ . In der Tat folgt aus (11.7) aus  $v' = -v$  unmittelbar  $v'' = 0$ , d. h. das Einselement.

Diese Galileischen Vorstellungen von Raum und Zeit sind durch die einsteinsche spezielle und allgemeine Relativitätstheorie grundlegend verändert worden. Dabei werden Änderungen von den Galileischen Vorstellungen sichtbar bei großen Erdbeweglichkeiten (spezielle Relativitätstheorie) oder bei starken Gravitationsfeldern (allgemeine Relativitätstheorie).

11.2 Einsteinsche Postulate:

Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf den beiden folgenden Postulaten von Einstein:

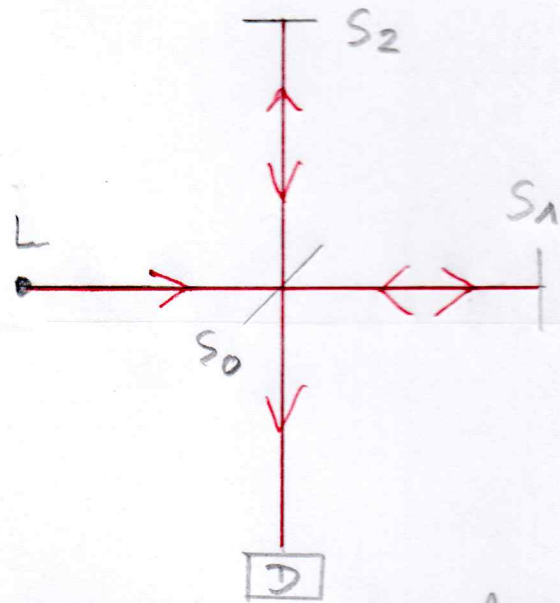
(E1) Relativitätsprinzip:  
Es gibt Inertialsysteme, d. h. Bezugssysteme, in denen sich kräftefreie Körper gleichförmig gleichförmig bewegen. In allen Inertialsystemen haben die physikalischen Naturgesetze die gleiche Form.

Wir bemerken, dass das einsteinsche Relativitätsprinzip die Galileische Kovarianzforderung, die nur für mechanische Naturgesetze aufgestellt wurde, auf alle physikalischen Naturgesetze verallgemeinert. Damit ist das Relativitätsprinzip insbesondere auch auf die Elektrodynamik zu übertragen. Es zeigt sich nun, dass die Maxwell-Gleichungen aber nicht unter Galilei-Transformationen (11.3) forminvariant sind. Damit stellt sich die Frage, wie man diesen Widerspruch auflöst. Wir werden später sehen, dass deshalb die Transformationen zwischen Inertialsystemen von den Galilei-Transformationen (11.3) auf die Lorentz-Transformationen zu erweitern sind, die die Maxwell-Gleichungen forminvariant lassen.

(E2) Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:  
In allen Inertialsystemen hat die (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit den gleichen Wert  $c$ .

Wir bemerken zunächst, dass dieses Zwiesing von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit der unmittelbaren Anschauung widerspricht. Aus (11.7) folgt nämlich mit  $v=c$ , dass  $v'' = v' + c$  ist. Demnach erlaubte die Galilei-Transformationen beliebig große Lichtgeschwindigkeiten.

Das Zwiesing von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist aber schon von Michelson und Morley 1881 (Rotterdam) und 1907 (Cleveland) experimentell getestet worden. Hierzu wurde ein Michelson-Morley-Interferometer mit nehmstehendem symmetrischen Aufbau verwendet. Das von der Lichtquelle  $L$  ausgehende Licht wird an einer unter  $45^\circ$  geneigten halbdurchlässigen Glasplatte  $S_0$  zum Hälfte reflektiert und zum Hälfte durchgelassen. Der reflektierte und der durchgelassene Teil gelangen nach Reflektionen an den Spiegel  $S_1$  und  $S_2$  aber  $S_0$  zum Detektor  $D$ , wo sie interferieren.

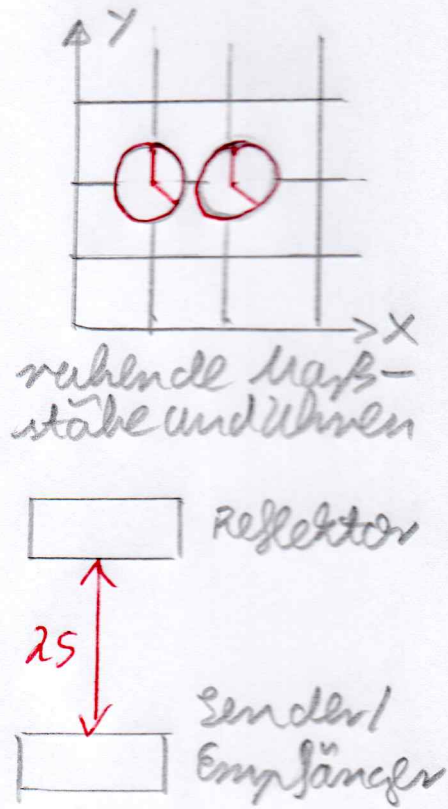


Man beobachtet nun die Interferenzmuster, während sich die Erde um die Sonne bewegt. Dabei ist die Erdbeschwindigkeit  $\vec{v}_E$  mit  $|\vec{v}_E| = 30 \text{ km/s}$  beim Experiment ① bzw. ② parallel zum Strahlengang  $S_0 S_2$  bzw.  $S_0 S_1$ . Man würde deshalb nach Galilei erwarten, dass sich die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Licht in den jeweiligen Strahlgängen im Experiment ① und ② voneinander unterscheiden. Dies müsste beim Übergang vom Experiment ① zum Experiment ② zu einer Veränderung der Interferenzmuster führen. Tatsächlich wird aber so eine Veränderung der Interferenzmuster nicht beobachtet. Hieraus schließt man, dass die Lichtgeschwindigkeit immer  $c$  ist.

Auch die heutigen verfeinerten experimentellen Techniken liefern immer den gleichen Wert für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle. Damit ist das Zwiesing der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein wesentliches Elementarzwiesing der Physik.

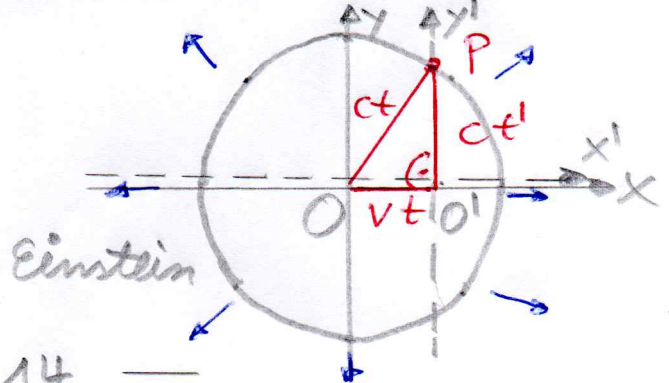
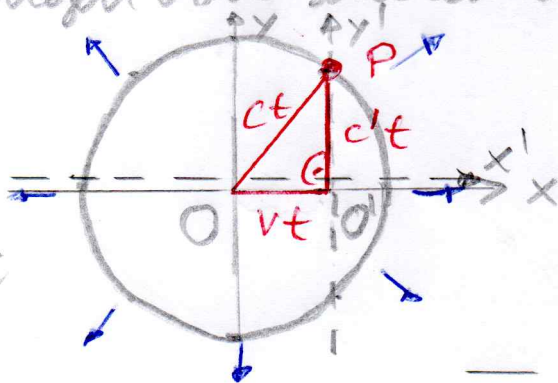
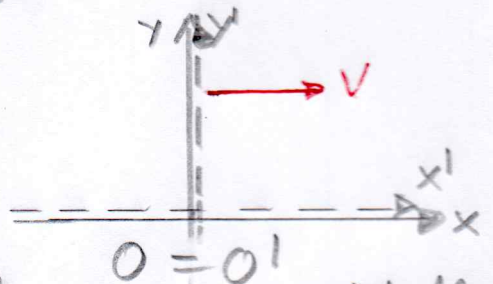
# 11.3 Längen- und Zeitmessung:

Bei der Messung der Bewegung eines Körpers ist eine kombinierte Längen- und Zeitmessung erforderlich. Für die Längenmessung verwendet man ein Messwerk ruhender gleichzeitiger Stäbe. Für die Zeitmessung werden Uhren an jedem Raumzeitpunkt verwendet, die unterschiedlich synchronisiert sind. Hierzu werden Lichtsignale vom Ursprung aus an alle Uhren gesandt. Dabei ist das Ereignis der Uhren beliebig. Oft benutzt man für Überlagerungen in der speziellen Relativitätstheorie eine Lichtuhr. Dort misst man die Zeit  $t$  durch die Strecke  $2s$ , die ein Lichtstrahl vom Sender über den Reflektor zum Empfänger benötigt:  $t = 2s/c$ .



## 11.3.1 Zeitdilatation (Zeitdehnung):

Wir untersuchen nun genauer, wie die gleichen Vorgänge von verschiedenen Bezugssystemen aus beurteilt werden, die sich relativ zueinander gleichförmig bewegen. Hierzu betrachten wir ein ruhendes Inertialsystem  $\Sigma$  mit dem Beobachter  $O$  im Ursprung und ein gleichförmig dazu bewegtes Inertialsystem  $\Sigma'$  mit dem Beobachter  $O'$  im Ursprung. Zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  wird ein Lichtsignal bei  $O = O'$  gesendet. Es breitet sich sowohl in  $\Sigma$  als auch in  $\Sigma'$  kugelförmig radial aus. Die physikalische Interpretation dieses Gedankenexperiments hängt nun aber davon ab, ob man den Überlagerungen von Galilei oder denen von Einstein folgt:



In beiden Fällen ist im  $\Sigma$  der Punkt P die Strecke  $ct$  vom Ursprung  $O$  entfernt und der Ursprung  $O'$  ist vom Ursprung  $O$  die Strecke  $vt$  entfernt. Galilei und Einstein unterscheiden sich nur aber grundlegend darin, wie die dritte Seite im rechtwinkligen Dreieck zu interpretieren ist:

1) Nach Galilei ist die Zeit absolut. Deshalb ist die dritte Seite durch  $c't$  gegeben und die Anwendung des Satzes von Pythagoras führt auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c' \neq c$  in  $\Sigma'$ :

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (c't)^2 \Rightarrow c' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c \quad (11.8)$$

2) Nach Einstein gilt aber das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Daher muss sich das Licht in  $\Sigma'$  von  $O'$  nach P auch mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Deshalb wird die dritte Seite durch  $ct'$  angesetzt, wobei  $t'$  die in  $\Sigma'$  verstrichene Zeit darstellt. Mit dem Satz von Pythagoras lässt sich diese Zeit  $t' \neq t$  in  $\Sigma'$  bestimmen:

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct')^2 \Rightarrow t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t \quad (11.9)$$

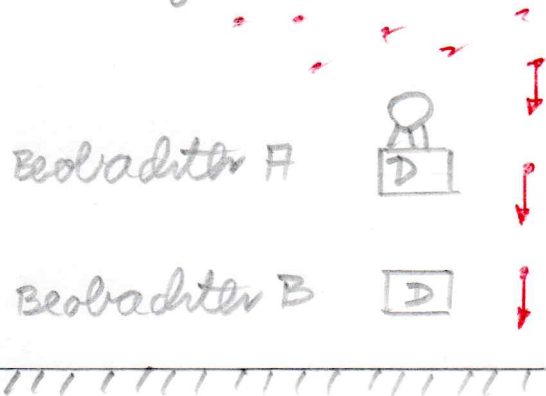
Wir lesen also  $t' < t$  ab, d.h. eine relativ zu einem Bezugssystem bewegte Uhr geht langsamer im Vergleich zu einer ruhenden Uhr. Man bezeichnet diesen Effekt als Zeitdilatation (= Zeitdehnung). Er gilt nicht nur für Uhren sondern für alle Prozesse.

Es ist zu beachten, dass auch umgekehrt der Beobachter O sagen kann, dass seine Uhren ruhen und sich die Uhren im Bezugssystem  $\Sigma$  bewegen. Dann würde O' messen, dass die Uhren in  $\Sigma$  langsamer gehen als seine Uhren.

### 11.3.2 Myonen-Experiment:

Die Zeitdilatation wurde 1941 durch ein Myonen-Experiment von Rossi und Hall quantitativ bestätigt. In der Erdatmosphäre erzeugen kosmische Strahlen Myonen, die sich dann mit nahezu Lichtgeschwindigkeit zur

Erzeugung von Myonen



Erde hin bewegen. Ein Detektor A in Höhe von 1910 m zählte 563 Myonen pro Stunde, die sich mit etwa 99,52% der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegten. Ein anderer Detektor B in Höhe von 3 m zählte 408 Myonen pro Stunde. Wir wollen nun dieses Messergebnis auswerten. Hierzu benötigen wir das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-t/t_0} \quad (11.10)$$

Hierbei ist  $N_0$  die Zahl der Myonen zur Zeit  $t=0$ ,  $N(t)$  die Zahl der zur Zeit  $t$  noch nicht zerfallenen Myonen und  $t_0 = 2,2 \mu\text{s}$  die mittlere Lebensdauer ruhender Myonen. Zunächst gehen wir von der Laborszeit aus und berechnen die Flugzeit der Myonen zwischen Detektor A und B:

$$t = \frac{1910 \text{ m} - 3 \text{ m}}{0,9952 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6,4 \mu\text{s} \quad (11.11)$$

Demnach würde man beim Detektor B eigentlich nur noch 31 Myonen pro Stunde erwarten:

$$N(t=6,4 \mu\text{s}) = 563 \cdot e^{-6,4/2,2} \approx 31 \quad (11.12)$$

Stattdessen wurden aber 408 Myonen pro Stunde gemessen. Hieraus kann man die Zeit der bewegten Myonen berechnen:

$$t' = 2,2 \mu\text{s} \cdot \ln \frac{563}{408} = 0,7 \mu\text{s} \quad (11.13)$$

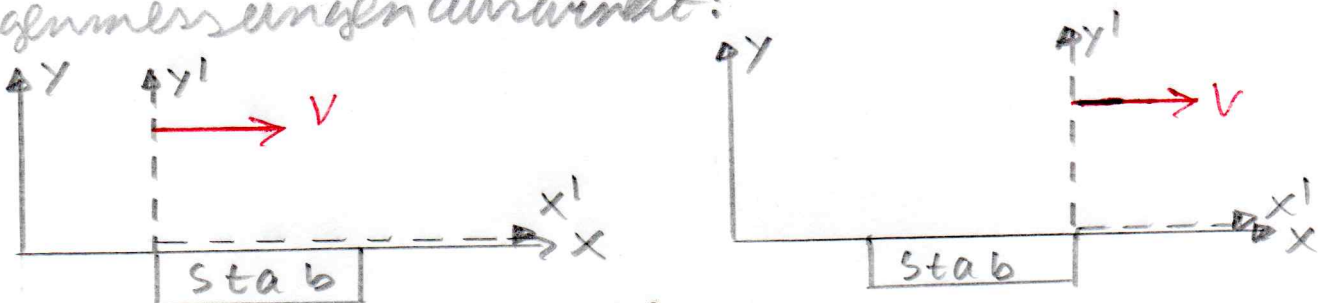
Demnach beträgt die Zeitdilatation  $t'/t = 0,7/6,4 \approx 0,11$ . Mit Hilfe von (11.9) lässt sich hieraus die Geschwindigkeit der Myonen berechnen:

$$v = \sqrt{1 - (0,11)^2} c \approx 0,994 \cdot c \quad (11.14)$$

Im Rahmen der experimentellen und statistischen Fehler stimmt dies mit der gemessenen Geschwindigkeit von  $0,9952 \cdot c$  gut überein.

### 11.3.3 Längenkontraktion:

Wir untersuchen nun, wie sich die Zeitdilatation auf Längenmessungen auswirkt:



Im ruhenden Inertialsystem  $\Sigma$  misst man die Ruhelänge

$$x = v t \quad (11.15)$$

während im bewegten Inertialsystem  $\Sigma'$  die Länge des mit  $v$  bewegten Stabes zu

$$x' = v t' \quad (11.16)$$

bestimmt wird. Das bedeutet, dass ein mit der Geschwindigkeit  $v$  in Längsrichtung bewegter Stab gegenüber seiner Ruhelänge verkürzt um den Faktor

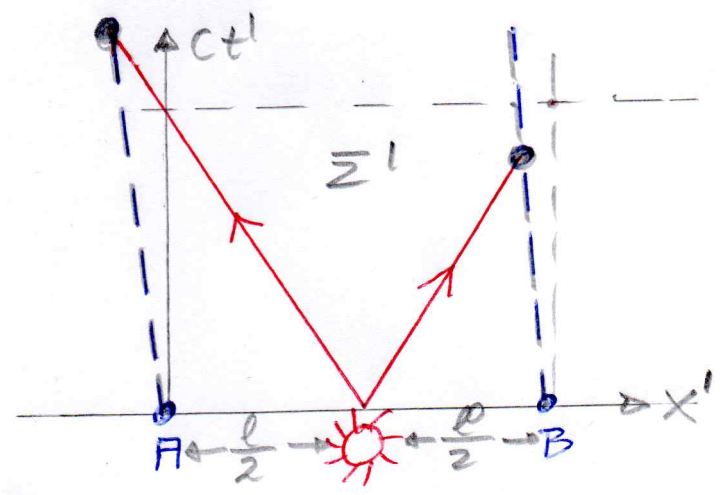
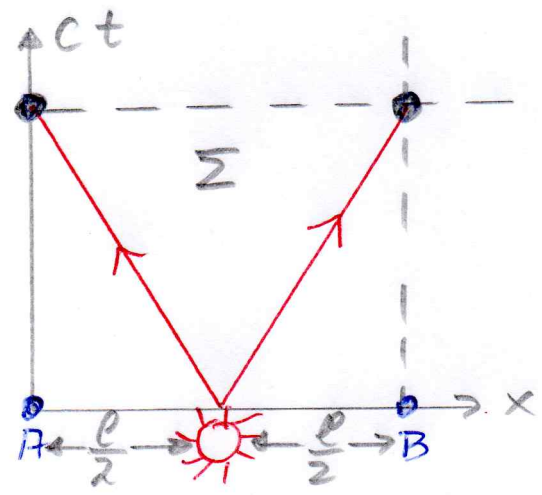
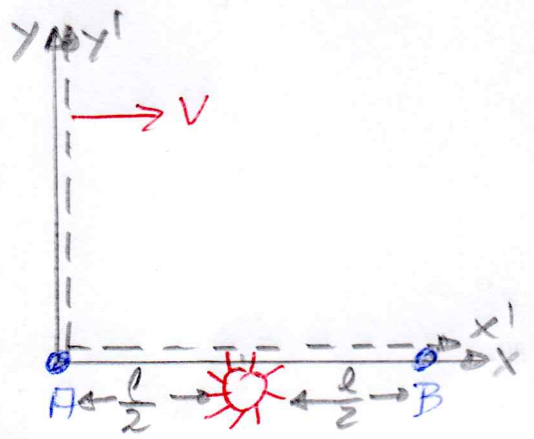
$$\frac{x'}{x} \stackrel{(11.15), (11.16)}{=} \frac{t}{t'} \stackrel{(11.9)}{=} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.17)$$

gemessen wird. Dieses Phänomen bezeichnet man als Längenkontraktion. Im Falle der umgekehrten Situation, dass ein ruhender Stab in  $\Sigma'$  vorliegt, würde in  $\Sigma$  eine verkürzte Länge gemessen.

### 11.3.4 Gleichzeitigkeit ist relativ:

In einem Bezugssystem kann man einfach feststellen, ob zwei Ereignisse gleichzeitig vorliegen. Beim jeweiligen Ereignis sieht man auf die dort angebrachte Uhr. Zeigen die beiden Uhren das Gleiche an, so sind die Ereignisse gleichzeitig, andernfalls nicht.

Wir untersuchen nun die Gleichzeitigkeit von Ereignissen. Hierzu betrachten wir Lichtblitze, die durch eine in  $\Sigma$  ruhende Lichtquelle ausgesandt werden und fragen uns, ob sie an den Orten  $A$  und  $B$ , die den Abstand  $l/2$  von der Lichtquelle haben, gleichzeitig ankommen:



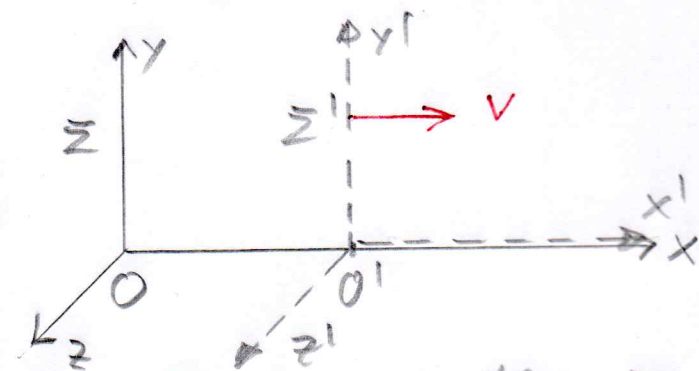
In  $\Sigma$  ruhen A und B und die von der Lichtquelle ausgehenden Lichtblitze breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  aus, so dass sie gleichzeitig ankommen. In  $\Sigma'$  dagegen bewegen sich A, B mit der Geschwindigkeit  $-v$ . Dennoch sendet die Lichtquelle Lichtblitze aus, die sich mit der Lichtgeschwindigkeit bewegen. So mit Erscheinen die Lichtblitze bei B früher und bei A später. Die Gleichzeitigkeit von Ereignissen gilt also nicht mehr absolut, sondern hängt vom Bezugssystem ab. Wir bemerken, dass diese Tatsache die Quelle für viele Paradoxien der speziellen Relativitätstheorie ist.

#### 11.4 Lorentz-Transformationen:

In der speziell relativistischen Kinematik haben wir immer zwei Beobachter, die jeder für sich in ihrem Inertialsystem den Ort und die Zeit von Ereignissen messen. Kennt man Ort und Zeit in einem Inertialsystem, so möchte man Ort und Zeit auch in einem anderen Inertialsystem kennen. Diese Umrechnung leistet die Lorentz-Transformation.

##### 11.4.1 Herleitung der Lorentz-Transformation:

Als Standardkonfiguration verwenden wir die Synchronisation  $t = t' = 0$  bei  $0 = 0'$ . Außerdem sei  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  die Geschwindigkeit, mit der sich  $\Sigma'$  gegenüber  $\Sigma$  bewegt. Dann gilt für den Ursprung  $0'$  von  $\Sigma'$  vom Bezugssystem  $\Sigma$  aus gesehen:



$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x'=0} = v \quad (11.18)$$

Umgekehrt wird dann der Ursprung  $0$  von  $\Sigma$  vom Bezugssystem  $\Sigma'$  aus gesehen beobachtet durch

$$\left. \frac{dx'}{dt'} \right|_{x=0} = -v \quad (11.19)$$

Wir betrachten zunächst die Umrechnung der Koordinaten und überlegen uns, wie hierfür die Galilei-Trans-

formation (11.3) abzuändern ist. Ein in  $\Sigma'$  ruhender Stab von  $O'$  nach  $x'$  bewegt sich von  $\Sigma$  aus gesehen mit der Geschwindigkeit  $v$  und ist daher mit einer Längenkontraktion mit dem Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  versehen. Diese in  $\Sigma$  beobachtete Längenkontraktion zusammen genommen mit (11.18) führt auf

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.20)$$

$$y = y' \quad (11.21)$$

$$z = z' \quad (11.22)$$

Nun wollen wir auch noch die Umkehrumkehrung der Zeiten erhalten. Hierzu stellen wir die umgekehrte Überlegung an. Von  $\Sigma'$  aus gesehen bewegt sich der Stab von  $O$  nach  $x$  mit der Geschwindigkeit  $-v$ , was ebenfalls zu einer Längenkontraktion mit dem Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$  führt. Diese in  $\Sigma'$  beobachtete Längenkontraktion ergibt dann zusammen mit (11.19):

$$x' = -vt' + x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (11.23)$$

Löst man (11.23) nach  $x$  auf

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.24)$$

und setzt dies in (11.20) ein, so folgt

$$t = \frac{1}{v} \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x'}{v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.25)$$

Insgesamt erhalten wir damit für die Lorentz-Transformation von  $\Sigma'$  nach  $\Sigma$  aus (11.21), (11.22), (11.24) und (11.25):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (11.26)$$

Es handelt sich demnach um eine lineare Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten.

#### 11.4.2 Gruppen Eigenschaft:

Wir untersuchen nun, was sich durch Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Transformationen

erzählt. Hierzu führen wir nach (11.26) noch eine Lorentz-Transformation zuwenden  $\bar{z}'$  und  $\bar{z}''$  durch

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{v'/c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v'/c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.27)$$

und erhalten zunächst

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + vv'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{(v+v')/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{(v+v')/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & \frac{1 + vv'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-v'^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.28)$$

Damit es sich bei (11.28) wieder um eine Lorentz-Transformation der Geschwindigkeit  $v''$  handelt

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & \frac{v''/c}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v''/c}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v''^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (11.29)$$

müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$1. \text{ Bedingung: } \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}} \quad (11.30)$$

$$2. \text{ Bedingung: } \frac{\frac{v+v'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v''}{c}}{\sqrt{1-\frac{v''^2}{c^2}}} \quad (11.31)$$

Aus (11.30) folgern wir das einsteinsche Additionstheorem für Geschwindigkeiten:

$$\frac{v''^2}{c^2} = \frac{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{v+v'}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vv'}{c^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow v''(v, v') = \frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad (11.32)$$

Dies führt dazu, dass auch (11.31) erfüllt ist. Wir entnehmen (11.32), dass sich für kleine Geschwindigkeiten

$v/c \ll 1, v'/c \ll 1$  das Galileische Additionstheorem von (11.7) ergibt. Außerdem stellen wir fest, dass auch für  $v' = c$  auch  $v'' = c$  ergibt:

$$v''(v, c) \stackrel{(11.32)}{=} c \quad (11.33)$$

Demnach beinhaltet das einsteinsche Additionstheorem für Lichtgeschwindigkeiten (11.32) das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Wir halten ferner fest, dass die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen die mathematische Struktur einer Gruppe besitzt. Dabei besagt (11.32) gerade, dass die Menge der Lorentz-Transformationen bezüglich der Hintereinanderausführung zweier Lorentz-Transformationen abgeschlossen ist. Bei der Hintereinanderausführung von zwei Lorentz-Transformationen erhalten wir aus (11.32):

$$v + \frac{v' + v''}{1 + \frac{v'v''}{c^2}} \stackrel{(11.32)}{=} \frac{v + v' + v'' + \frac{vv'v''}{c^2}}{1 + \frac{v'v''}{c^2} + \frac{vv'}{c^2} + \frac{vv''}{c^2}} \stackrel{(11.32)}{=} \frac{\frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} + v''}{1 + \frac{v+v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \cdot \frac{v''}{c^2}} \quad (11.34)$$

so dass auch die Assoziativität gewährleistet ist. Das Einselement ist eine Lorentz-Transformation mit der Lichtgeschwindigkeit  $v = 0$ . In der Tat folgt nach (11.32) aus  $v = 0$  unmittelbar  $v''(0, v') = v'$ . Das zu (11.26) inverse Element ist eine Lorentz-Transformation mit der Lichtgeschwindigkeit  $-v$ . In der Tat folgt aus (11.32) aus  $v' = -v$  unmittelbar  $v''(v, -v) = 0$ , d. h. das Einselement der Lorentz-Transformationen.

Wir bemerken, dass für kleine Lichtgeschwindigkeiten  $v/c \ll 1$  die Lorentz-Transformation (11.26) in die Galilei-Transformation (11.3) übergeht. Zwischen beiden Transformationen besteht dabei der folgende qualitative Unterschied. Bei der Galilei-Transformation (11.3) wird die Zeitkoordinate nicht verändert, während bei der Lorentz-Transformation (11.26) die Zeit und die Raumkoordinaten miteinander vermischt werden. Raum und Zeit sind folgendermaßen zusammengefasst: "Man stand an vollen Raum für sich und Zeit".

sich sich völlig zu Schratten herabzinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren."

Die Lorentz-Transformationen enthalten die gesamte speziell relativistische Kinematik in kompakter Form. Alle bisher erwähnten physikalischen Phänomene der Speziellen Relativitätstheorie lassen sich aus diesen Lorentz-Transformationen herleiten. Dies wollen wir im folgenden an ausgewählten Beispielen explizit durchführen.

### 11.4.3 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Ein Lichtsignal starte zur Zeit  $t = t' = 0$  im gemeinsamen Ursprung  $0 = 0'$  von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ . Wir zeigen, dass sich dann die Lichtfront in beiden Inertialsystemen kugelförmig ausbreitet. Hierzu verwenden wir die Lorentz-Transformation (11.26) und erhalten zunächst

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \frac{(ct')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{\frac{v^2}{c^2} x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\frac{v^2}{c^2} (ct')^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{x'^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y'^2 - z'^2 = (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \quad (11.35)$$

wenn sich also eine Lichtfront in  $\Sigma$  mit der Lichtgeschwindigkeit kugelförmig ausbreitet

$$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \quad (11.36)$$

dann folgt aus (11.35), dass sie sich auch in  $\Sigma'$  mit derselben Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet:

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 \quad (11.37)$$

### 11.4.4 Relativität der Gleichzeitigkeit:

Wir betrachten zwei Ereignisse, die gleichzeitig in  $\Sigma'$  stattfinden:  $t_1' = t_2'$ . Dann gilt für die Differenz der Zeiten  $t_1, t_2$ , an denen dieselben Ereignisse in  $\Sigma$  beobachtet werden nach (11.26):

$$t_2 - t_1 = \frac{v(x_2' - x_1') / c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.38)$$

was für  $x_1' \neq x_2'$  von Null verschieden ist. Nur dann, wenn die Ereignisse am selben Ort  $x_1' = x_2'$  und zur selben Zeit  $t_1' = t_2'$  in  $\Sigma'$  stattfinden, dann sind die Ereignisse auch in  $\Sigma$  gleichzeitig.

### 11.4.5 Zeitdilatation:

Wir betrachten eine Uhr  $x'$  im Inertialsystem  $\Sigma'$  ruhende Uhr. Außerdem sollen zwei Ereignisse stattfinden, wenn die Uhr die beiden Zeiten  $t_1'$  und  $t_2'$  anzeigt. Dann folgt aus der Lorentz-Transformation (11.26) für  $x_1' = x_2'$

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > t_2' - t_1' \quad (11.39)$$

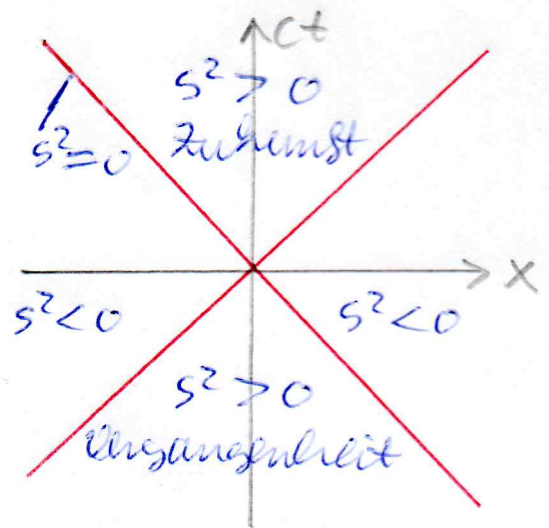
d.h. die bewegte Uhr in  $\Sigma'$  geht langsamer als die ruhende Uhr in  $\Sigma$ .

### 11.4.6 Lichtkegel:

Wir haben in Abschnitt 11.4.4 schon diskutiert, dass die Gleichzeitigkeit von Ereignissen in einem relativ ist, als sie vom Inertialsystem des Beobachters abhängt. Wir wollen deshalb hinterfragen, ob dadurch die Kausalität, dass also eine Ursache vor einer Wirkung stattfinden muss, verletzt ist. Hierzu betrachten wir zwei Ereignisse  $P = (ct, x, y, z)$  und  $O = (0, 0, 0, 0)$  in  $\Sigma$ . Dann definieren wir

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (11.40)$$

als das Quadrat des Raum-Zeit-Abstandes. Dabei haben wir schon in (11.35) gesehen, dass dieser Raum-Zeit-Abstand  $s$  in allen Inertialsystemen gleich groß ist, es gilt also  $s = s'$ . Es handelt sich demnach um eine Invariante, die vom gewählten Inertialsystem unabhängig ist.



Ist  $s^2 = 0$ , dann handelt es sich im  $ct-x$ -Diagramm um lichtartige Punkte, da sie durch Lichtsignale miteinander verbunden sind. Man spricht davon, dass  $s^2 = 0$  den Lichtkegel bzw. den Ereignishorizont definiert.

Diejenigen Ereignisse im  $ct-x$ -Diagramm mit  $s^2 > 0$  heißen zeitartig, da sie kausal miteinander verbunden sein können. Ein Ereignis mit  $s^2 > 0$  und  $t < 0$  aus der Vergangenheit kann ein Ereignis bei  $t = 0$ ,

$x=0$  beeinflussen und ein Ereignis bei  $t=0, x=0$  kann ein Ereignis  $s^2 > 0$  und  $t > 0$  in der Zukunft beeinflussen.

Beieigenen Ereignissen im  $ct-x$ -Diagramm mit  $s^2 < 0$  heißen raumartig, da sie so weit auseinander liegen, dass sie kausal nicht miteinander verknüpft sein können. Der Grund hierfür ist, dass es keine Signale gibt, die sich mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist.

### 11.5 Vektor- und Tensor-Kalkül:

Das Vektor- und Tensor-Kalkül ermöglicht im  $\mathbb{R}^3$  physikalische Naturgesetze kompakt und basisunabhängig zu formulieren. Beispielsweise lassen sich die drei Newton-Gleichungen

$$\begin{aligned} m a_x &= F_x \\ m a_y &= F_y \\ m a_z &= F_z \end{aligned} \quad (11.41)$$

zu einer einzigen basisunabhängigen Newton-Gleichung zusammenfassen

$$m \vec{a} = \vec{F} \quad (11.42)$$

entsprechend lässt sich auch das Superpositionsprinzip für Kräfte entweder komponentenweise

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} &= F_x \\ F_{1y} + F_{2y} &= F_y \\ F_{1z} + F_{2z} &= F_z \end{aligned} \quad (11.43)$$

oder aber basisunabhängig formulieren:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} \quad (11.44)$$

Wir führen nun auf der Grundlage des Relativitätsprinzips eine analoge Vektor- bzw. Tensor-Schreibweise ein, um physikalische Naturgesetze in der vierdimensionalen Raum-Zeit zu formulieren.

#### 11.5.1 Vierervektoren:

Wir fassen die Raum-Zeit-Koordinaten eines Ereignisses zu den Komponenten eines Vierer-Ortsvektors zusammen:

$$(x^\mu) = (ct, \vec{z}) = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, x^i) \quad (11.45)$$

Dabei werden griechische Indizes wie  $\mu$  sowohl als Laufzahl für die Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  als auch als Bezeichnung eines Vierervektors verwendet. Entsprechend verwenden wir lateinische Indizes wie  $i$  sowohl als Laufzahl für die Menge  $\{1, 2, 3\}$  als auch als Bezeichnung eines räumlichen Dreiervektors.

### 11.5.2 Lorentz-Transformation:

Mit Hilfe der Vierer-Ortsvektoren (11.45) läßt sich die Lorentz-Transformation (11.26) kompakt formulieren:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (11.46)$$

Dabei bezeichnet  $\Lambda^\mu{}_\nu$  die Lorentz-Matrix, wobei  $\mu$  den Zeilen- und  $\nu$  den Spaltenindex darstellt:

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.47)$$

Im folgenden werden wir immer die einsteinsche Summenkonvention verwenden, nach der bei doppelt auftretenden Indizes immer automatisch über alle Komponenten summiert wird. Wodurch reduziert sich (11.46) auf

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu \quad (11.48)$$

Damit die einsteinsche Summenkonvention zur Anwendung kommt, muss immer einer der beiden doppelt auftretenden Indizes oben stehen (kontravariant), während der andere unten steht (kovariant).

### 11.5.3 Metrik:

Das Quadrat des Raum-Zeit-Abstandes (11.40) zwischen zwei Ereignissen  $P = (ct, x, y, z)$  und  $O = (0, 0, 0, 0)$  in  $\Sigma$  läßt sich mit Hilfe der Komponenten des Vierer-Ortsvektors (11.45) notieren:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (11.49)$$

Führen wir die Minkowski-Metrik

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(11.50)

ein, so lässt sich (11.49) zusammenfassen als

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (11.51)$$

Aus früheren Rechnungen in (11.35) wissen wir, dass das Abstandsquadrat (11.51) unter Lorentz-Transformationen invariant ist. Das bedeutet, dass auch in  $\Sigma'$  der Raum-Zeit-Abstand der beiden Ereignisse durch

$$s^2 = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (11.52)$$

gegeben ist. Aus der Gleichheit von (11.51) und (11.52) folgen wir mit der Lorentz-Transformation (11.48)

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu x'^\mu x'^\nu \quad (11.53)$$

Da dies für alle vierer-Ortsvektoren  $x'^\mu$  eine Identität darstellt, schließen wir hieraus

$$g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu = g_{\mu\nu} \quad (11.54)$$

oder in Matrix-Schreibweise

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad (11.55)$$

Man kann (11.55) auch als die definierende Gleichung für Lorentz-Transformationen ansehen. Dabei besagt die linke Seite von (11.55), dass sich die Minkowski-Metrik wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert, da zwei 1-Matrizen auftreten. Im Unterschied dazu transformiert sich ein vierer-Ortsvektor gemäß (11.48) wie ein Tensor erster Stufe, es tritt nur eine 1-Matrix auf. Die fundamentale Einschränkung auf Lorentz-Transformationen kommt nun dadurch zu Stande, dass auf der rechten Seite von (11.55) nach einer solchen Transformation die Minkowski-Metrik (11.50) wieder auftritt.

#### 11.5.4 Einschluss: Rotationen

Wir bemerken in einem Einschluss, dass analog zu (11.55) auch andere Transformationen definiert werden. Ein elementares Beispiel stellen Rotationen dar. Sie entsprechen den  $3 \times 3$ -Rotationsmatrizen  $R$  sind nämlich durch

$$R^T I R = I \quad (11.56)$$

definiert, wobei  $I$  die  $3 \times 3$ -Einheitsmatrix darstellt. Da

mit entspricht (11.56) gerade der Aussage, dass die Rotationsmatrizen orthogonale Matrizen mit der Eigenschaft

$$RT = R^{-1} \quad (11.57)$$

sind. Die linke Seite von (11.56) besagt, dass sich die Euklidische Metrik wie ein Tensor zweiter Stufe mit zwei Rotationsmatrizen transformiert. Und die rechte Seite von (11.56) besagt, dass durch eine solche Rotation die Euklidische Metrik nicht verändert wird. Interessanter Weise sind auch die so definierten Rotationen Bestandteil der Lorentz-Gruppe. Da Rotationen nur die Ortsvektoren aber nicht die Zeit verändern, lassen sie sich auch als  $4 \times 4$ -Matrizen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0}^T & R \end{pmatrix} \quad (11.58)$$

mittelm Nullvektor  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  darstellen, die dann aufgrund von (11.50) und (11.56) auch die definierende Eigenschaft (11.55) erfüllen. Demnach besteht die Lorentz-Gruppe aus den speziellen Lorentz-Transformationen der Form (11.47), die auch als Boosts bezeichnet werden, und den Rotationen (11.58).

### 11.5.5 Einschluss: Kanonische Transformationen

Ein weiteres zu (11.55) analoges Beispiel stellen kanonische Transformationen in der hamiltonschen Mechanik dar. Ausgangspunkt sind hier die hamiltonschen Bewegungsgleichungen, die für einen Freiheitsgrad durch

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad (11.59)$$

$$\dot{p} = - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q}$$

mit der hamilton-Funktion  $H(q, p)$  gegeben sind. Führt man einen Vektor im Phasenraum durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (11.60)$$

ein, dann lassen sich die hamilton-Gleichungen (11.59) kompakt zusammenfassen zu

$$\dot{\vec{x}} = M \vec{\nabla}_{\vec{x}} H(\vec{x}) \quad (11.61)$$

hierbei tritt die sogenannte symplektische Metrik

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.62)$$

auf. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Poisson-Klammer

Zweier Phasenraumfunktion  $F(q, P)$  und  $G(q, P)$

$$\{F, G\}_{q, P} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial P} - \frac{\partial F}{\partial P} \frac{\partial G}{\partial q} \quad (11.63)$$

definierten als

$$\{F, G\}_{\vec{x}} = (\vec{\nabla}_{\vec{x}} F)^T M \vec{\nabla}_{\vec{x}} G \quad (11.64)$$

Führt man nun eine kanonische Transformation

$$q = q(Q, P) \quad (11.65)$$

$$P = P(Q, P)$$

von den alten Phasenraumkoordinaten  $q, P$  zu den neuen Phasenraumkoordinaten  $Q, P$  durch, so müssen die Hamilton-Gleichungen (11.59) forminvariant sein, d.h. es muss gelten

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}(Q, P)}{\partial P} \quad (11.66)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}(Q, P)}{\partial Q}$$

mit der neuen Hamilton-Funktion

$$\tilde{H}(Q, P) = H(q(Q, P), P(Q, P)) \quad (11.67)$$

Wir erhalten demnach für den Vektor im Phasenraum

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (11.68)$$

analog zu (11.61)

$$\dot{\vec{x}} = M \vec{\nabla}_{\vec{x}} \tilde{H}(\vec{x}) \quad (11.69)$$

mit derselben symplektischen Matrix  $M$ . In der Hamiltonschen Mechanik wird nun gefordert, dass genau dann eine kanonische Transformation vorliegt, wenn die fundamentalen Poisson-Klammern forminvariant sind, d.h. es gilt

$$\{q, P\}_{Q, P} = 1 \quad (11.70)$$

Es stellt sich nun heraus, dass (11.70) folgender Aussage entspricht

$$\mathcal{J}^T M \mathcal{J} = M \quad (11.71)$$

wobei  $\mathcal{J}$  die Jacobi-Matrix der kanonischen Transformation darstellt

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial P}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial P}{\partial P} \end{pmatrix} \quad (11.72)$$

In der Tat führt Einsetzen von (11.62) und (11.72) in (11.71) gerade auf (11.70). Nach (11.71) sind kanon-

nische Transformationen also gerade dadurch definiert, dass sie die symplektische Metrik, mit der der Phasenraum ausgestattet ist, nicht verändern.

### 11.5.6 Skalarprodukt:

Liegen zwei verschiedene Vierervektoren  $A^\mu$  und  $B^\nu$  vor, so lässt sich mit Hilfe der Minkowski-Metrik (11.50) ein Skalarprodukt einführen:

$$(A, B) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (11.73)$$

Jeder Vierervektor lässt sich wie der Vierer-Ortsvektor in (11.48) mit einer Lorentz-Transformation in ein anderes Inertialsystem überführen:

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha A'^\alpha, \quad B^\mu = \Lambda^\mu{}_\beta B'^\beta \quad (11.74)$$

Deshalb folgt mit Hilfe von (11.54), dass das Skalarprodukt (11.73) invariant ist:

$$(A, B) \stackrel{(11.73)}{\stackrel{(11.74)}}{=} g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta A'^\alpha B'^\beta \stackrel{(11.54)}{=} g_{\alpha\beta} A'^\alpha B'^\beta \stackrel{(11.73)}{\stackrel{(11.75)}}{=} (A', B') \quad (11.75)$$

### 11.5.7 Ko- und kontravariante Vierervektoren:

Die Form des Skalarproduktes (11.73) legt es nahe, neben einem kontravarianten Vierervektor  $A^\mu$  auch einen kovarianten Vierervektor

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (11.76)$$

einzuführen. Beispielsweise erhalten wir aus dem kontravarianten Vierer-Ortsvektor (11.45) und der Minkowski-Metrik (11.50) den kovarianten Vierer-Ortsvektor

$$(x_\mu) = (ct, -x, -y, -z) \quad (11.77)$$

Mit Hilfe des kovarianten Vierervektors (11.76) lautet das Skalarprodukt (11.73)

$$(A, B) = A_\mu B^\mu \quad (11.78)$$

Führen wir neben der kovarianten Minkowski-Metrik (11.50) auch noch die kontravariante Minkowski-Metrik

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.79)$$

ein, so lässt sich auch umgekehrt ein kovarianter Vierervektor in einen kontravarianten Vierervektor umwandeln:

$$A^\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (11.80)$$

Beispielsweise geht (11.77) mit Hilfe von (11.79), (11.80) in (11.45) über. Man spricht davon, dass sich mit Hilfe der Minkowski-Metriken (11.50), (11.79) gemäß (11.76), (11.80) die Indizes runter- und hochheben lassen.

Wir untersuchen nun, wie sich ein kovarianter Vektor unter einer Lorentz-Transformation verändert:

$$A_\alpha \stackrel{(11.76)}{=} g_{\alpha\mu} A^\mu \stackrel{(11.74)}{=} g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \stackrel{(11.80)}{=} g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta} A_\beta \quad (11.81)$$

Wir erhalten demnach

$$\bar{A}_\alpha = \bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta A_\beta \quad (11.82)$$

mit der Matrix

$$\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta = g_{\alpha\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\beta} \quad (11.83)$$

Dabei steht  $\alpha$  für den Zeilen- und  $\beta$  für den Spaltenindex, so dass (11.83) in Matrixschreibweise lautet

$$\bar{\Lambda} = g \Lambda g \quad (11.84)$$

Aus (11.47), (11.50), (11.79) folgt damit

$$(\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta) = \begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_0^0 & \bar{\Lambda}_0^1 & \bar{\Lambda}_0^2 & \bar{\Lambda}_0^3 \\ \bar{\Lambda}_1^0 & \bar{\Lambda}_1^1 & \bar{\Lambda}_1^2 & \bar{\Lambda}_1^3 \\ \bar{\Lambda}_2^0 & \bar{\Lambda}_2^1 & \bar{\Lambda}_2^2 & \bar{\Lambda}_2^3 \\ \bar{\Lambda}_3^0 & \bar{\Lambda}_3^1 & \bar{\Lambda}_3^2 & \bar{\Lambda}_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.85)$$

Der Vergleich von (11.85) mit (11.47) zeigt, dass  $\bar{\Lambda}_\alpha{}^\beta$  gerade die zu  $\Lambda^\mu{}_\nu$  inverse Lorentz-Transformation darstellt:

$$\bar{\Lambda}(v) = \Lambda(-v) \quad (11.86)$$

Es gilt deshalb

$$\Lambda \cdot \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \cdot \Lambda = I \quad (11.87)$$

und der  $4 \times 4$ -Einheitsmatrix  $I$ .

### 11.5.8 Tensoren:

Wir verallgemeinern nun den Tensorbegriff und führen einen Tensor  $(m, n)$ ter Stufe ein. Dabei sollen  $m$  Komponenten kontravariant und  $n$  Komponenten kovariant sein:  $T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n}$ . In Verallgemeinerung von (11.74) und (11.82) transformiert sich ein solcher Tensor  $(m, n)$ ter Stufe mit  $m$   $\Lambda$ 's und  $n$   $\bar{\Lambda}$ 's:

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\alpha_m}{}_{\mu_m} \bar{\Lambda}_{\beta_1}{}^{\nu_1} \dots \bar{\Lambda}_{\beta_n}{}^{\nu_n} T^{\mu_1 \dots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} \quad (11.88)$$

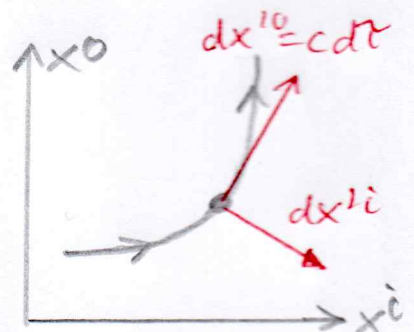
Nach dieser Definition ist der invariante Raum-Zeit Abstand (11.51), (11.52) ein Tensor (0,0)ter Stufe und (11.74) bzw. (11.82) definieren die Transformation eines kontravarianten bzw. kovarianten Vektorvektors als Tensor (1,0)ter bzw. (0,1)ter Stufe.

## 12 Relativistische Mechanik:

Die Newtonsche Mechanik ist invariant unter Galilei-Transformationen und widerspricht demnach den Grundprinzipien der Speziellen Relativitätstheorie. Deshalb wurde die Newtonsche Mechanik von Einstein dahingehend erweitert, dass sie invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Die dadurch entstandene relativistische Mechanik beinhaltet die richtigen Bewegungsgleichungen für solche Teilchen, deren Geschwindigkeiten in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit kommen.

### 12.1 Eigenzeit:

Ein Teilchen bewegt sich entlang einer Trajektorie. Dann lässt sich in jedem Punkt der Trajektorie ein momentanes Ruhesystem des Teilchens angeben. Eine infinitesimale Veränderung der Eigenzeit  $d\tau = dt'$  in diesem Ruhesystem hängt dann über die Zeitdilatation (11.9) mit der infinitesimalen Veränderung  $dt$  der Zeit im Laborsystem zusammen:



$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (12.1)$$

Dabei ist im momentanen Ruhesystem die infinitesimale Veränderung des Raum-Zeit-Abstandes

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \quad (12.2)$$

ein Lorentz-Skalar, so dass auch die infinitesimale Veränderung der Eigenzeit  $d\tau$  ein Lorentz-Skalar ist. Interpretiert man (12.1) zwischen zwei Ereignissen, so folgt ein Zusammenhang zwischen der Eigenzeit und der Laberzeit:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (12.3)$$

### 12.2 Vierer-Geschwindigkeitstensor:

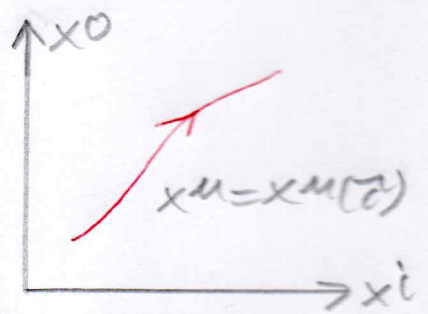
Wir verwenden im folgenden die Eigenzeit  $\tau = t'$  als Parameter, um die Trajektorie des Teilchens in der vier-

dimensionalen Raum-Zeit zu pa-  
rametrisieren:

$$x^\mu = x^\mu(\tau) \quad (12.4)$$

deshalb definiert dann

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (12.5)$$



einen Geschwindigkeitsvektor. Da  $\tau$  ein Lorentz-Ska-  
lar ist und sich  $dx^\mu$  wie ein Viervektor transfor-  
miert, ist auch (12.5) ein Viervektor. Verwendet man  
die Zeitdilatation (12.1), so kann man aber auch die  
Labzeit  $t$  als Parameter verwenden

$$x^\mu = x^\mu(t) \quad (12.6)$$

und erhält aus (12.5)

$$u^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu(t)}{dt} \quad (12.7)$$

Einsetzen von (11.45) in (12.7) führt dann auf

$$(u^\mu(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2(t)}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{pmatrix} \quad (12.8)$$

wir bilden das Skalarprodukt des Vierer-Geschwin-  
digsvektors mit sich selber:

$$u_\mu(t) u^\mu(t) \stackrel{(11.50), (11.76)}{=} u_0(t)^2 - \vec{u}(t)^2 \stackrel{(12.8)}{=} c^2 \quad (12.9)$$

Demnach ist (12.9) manifest ein Lorentz-Skalar. Das  
bedeutet also, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  in allen  
Inertialsystemen denselben Wert hat und sich nicht  
beim Wechsel in ein anderes Inertialsystem ändert.

### 12.3 Newton-Gleichung:

Die Newtonsche Bewegungsgleichung gilt nicht allge-  
mein in der speziellen Relativitätstheorie. Wir fordern  
aber, dass die Newtonsche Bewegungsgleichung im mo-  
mentanen Ruhesystem gilt. Das heißt, dass zwar im  
momentanen Ruhesystem  $\vec{v}' = \vec{0}$  aber im allgemei-  
nen  $d\vec{v}'/dt' \neq \vec{0}$  ist mit

$$m \frac{d\vec{v}'(t')}{dt'} = \vec{F}' \quad (12.10)$$

hierbei bezeichnet  $m$  die Ruhemasse des Teilchens,  $\vec{F}'$  die im Ruhesystem wirkende Kraft auf das Teilchen und  $t' = \tau$  die Eigenzeit.

### 12.4 Verallgemeinerung der Newton-Gleichung:

Mit Hilfe des Vierer-Geschwindigkeitsvektors (12.5) definieren wir den Vierer-Impulsvektor

$$P^\mu(\vec{v}) = m u^\mu(\vec{v}) \quad (12.11)$$

wobei dann aus (12.9) folgt

$$P^\mu(\vec{v}) P_\mu(\vec{v}) = m^2 c^2 \quad (12.12)$$

Demnach ist auch die Masse  $m$  ein Lorentz-Skalar. Die verallgemeinerte Newton-Gleichung lautet dann

$$m \frac{d u^\mu(\vec{v})}{d\vec{v}} \stackrel{(12.11)}{=} \frac{d P^\mu(\vec{v})}{d\vec{v}} = F^\mu \quad (12.13)$$

im Ruhesystem gilt wegen  $\vec{v} = \vec{0} = t'$  für die linke Seite

$$\left( \frac{d u^\mu(\vec{v})}{d\vec{v}} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d \vec{v}'(t')}{d t'} \end{pmatrix} \quad (12.14)$$

und entsprechend auf der rechten Seite

$$(F^\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{F}' \end{pmatrix} \quad (12.15)$$

damit (12.13) tatsächlich in (12.10) übergeht. Wir erhalten nun den Vierer-Kraftvektor  $F^\mu$  in  $\Sigma$  aus dem Vierer-Kraftvektor  $F'^\mu$  im Ruhesystem  $\Sigma'$ , indem wir analog zu (11.48) eine Lorentz-Transformation anwenden:

$$F^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu F'^\nu \quad (12.16)$$

Explizit in Komponenten ausgedrückt lautet dies für eine Bewegung in  $x$ -Richtung mit (11.47) und (12.15):

$$\begin{pmatrix} F^0 \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1' v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} \quad (12.17)$$

Für eine allgemeine Lorentz-Transformation in ein mit  $\vec{v}$  bewegtes Koordinatensystem kann man zeigen, siehe z. B. Eisebriecher-Mechanik, dass (12.17) übergeht in

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} & \frac{v_i/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \\ \frac{v_i/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} & \delta_{ij} + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - 1 \right) \frac{v_i v_j}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F'_j \end{pmatrix} \quad (12.18)$$

Eine Durchmultiplikation führt auf

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}/c}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \\ \vec{F}' + \left( \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} - 1 \right) \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F}') \vec{v}}{v^2} \end{pmatrix} \quad (12.19)$$

### 12.5 Relativistische Energie:

Wir betrachten nun die 0-Komponente der relativistischen Newton-Gleichung (12.13). Aus (12.8) und (12.19) folgt

$$mc \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}'}{c} \quad (12.20)$$

Mit Hilfe von (12.1) lässt sich die Eigenzeit  $\tau$  in (12.20) durch die Laborszzeit  $t$  ersetzen:

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}(t)^2/c^2}} = \vec{v} \cdot \vec{F}' \quad (12.21)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{v} \cdot \vec{F}'$  die auf das Teilchen übertragene Leistung. Deshalb identifizieren wir

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\vec{v}^2/c^2}} \quad (12.22)$$

mit der relativistischen Energie des Teilchens. Aus (12.8), (12.11) und (12.22) lesen wir ab, dass die Energie  $E$  des Teilchens in der nullten Komponente des Vierer-Impulsvektors auftritt

$$p_0 = \frac{E}{c} \quad (12.23)$$

Mit dem Ansatz

$$(P^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (12.24)$$

erhalten wir für den räumlichen Anteil des Vierer-

Impulsvektor:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.25)$$

Aus (12.12) und (12.24) folgt dann

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad (12.26)$$

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung lautet demnach

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2} \quad (12.27)$$

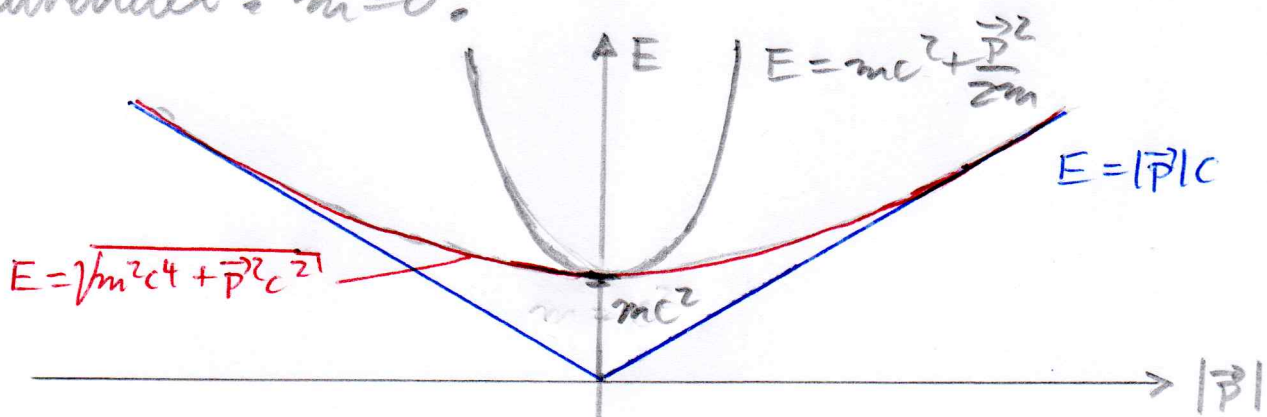
Im nichtrelativistischen Limes  $|\vec{p}| \ll mc$  folgt dann

$$E \stackrel{(12.27)}{\approx} mc^2 + \frac{\vec{p}^2}{2m} + \dots \quad (12.28)$$

Demnach besitzt ein ruhendes Teilchen die Ruheenergie  $mc^2$ . Dies hat wichtige physikalische Konsequenzen z.B. bei Kernfusion oder Kernspaltung und hat zur Entwicklung der Atombombe geführt. Ein sich langsam bewegendes Teilchen hat nach (12.28) die übliche nichtrelativistische Energie-Impuls-Beziehung. Im relativistischen Limes  $|\vec{p}| \gg mc$  erhalten wir dagegen aus (12.27)

$$E = |\vec{p}|c \quad (12.29)$$

Sie gilt z.B. für Photonen, deren Ruhemasse verschwindet:  $m=0$ .

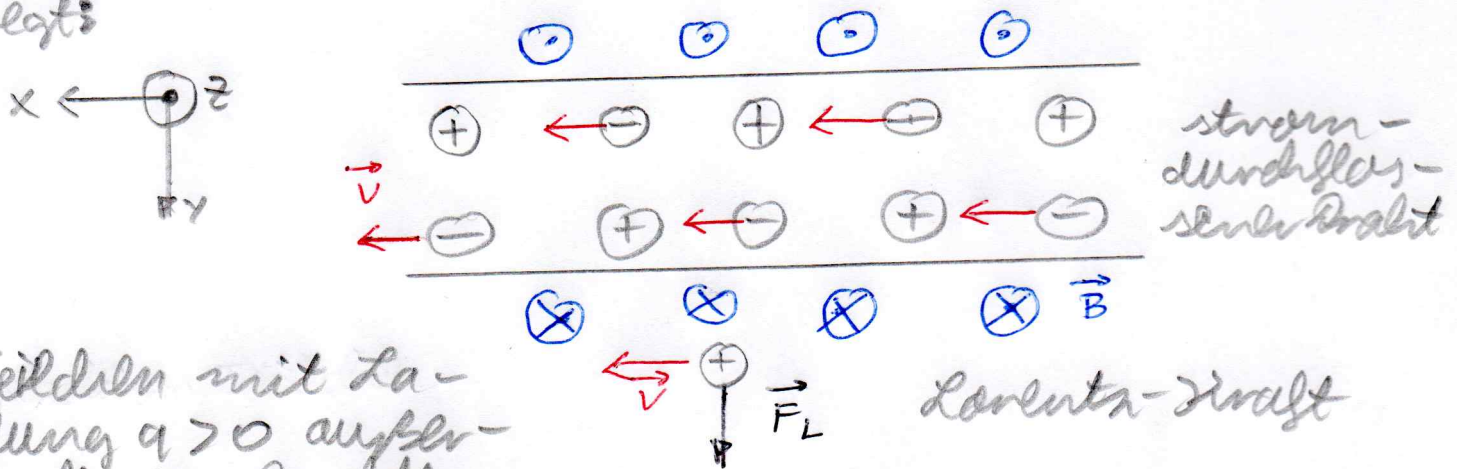


# 13 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Wir diskutieren nun die Konsequenzen der speziellen Relativitätstheorie für die Elektrodynamik. Hierzu zeigen wir, dass Lorentz-Transformationen zwischen Inertialsystemen zu Transformationen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern führen. Führt man aber das elektrische und das magnetische Feld zu einem Feldstärkensor zusammen, so lassen sich die Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik kovariant formulieren. Das bedeutet, dass sich die Maxwell-Gleichungen so formulieren lassen, dass ihre Invarianz unter Lorentz-Transformationen offensichtlich ist.

## 13.1 Phänomenologische Beschreibung:

Wir betrachten ein Teilchen der Ladung  $q$  in der Nähe eines stromdurchflossenen Drahtes, das sich mit derselben Geschwindigkeit wie die Elektronen im Draht bewegt:



Teilchen mit Ladung  $q > 0$  außerhalb des Drahtes

Diese Situation beschreiben wir nun in zwei Inertialsystemen.

Im Ruhesystem des Drahtes ist der Draht elektrisch neutral. Die positiv geladenen Ionenrumpfe ruhen und die negativ geladenen Elektronen bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Durch den Stromfluss entsteht gibt es ein Magnetfeld  $\vec{B}$ , sodass die außen mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegte Ladung  $q$  eine Lorentz-Kraft  $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$  erfährt. Ist  $q > 0$  so zeigt  $\vec{F}_L$  immer senkrecht zum Draht weg von ihm.

Im Ruhesystem des Teilchens fließt kein Strom, so dass es weder ein Magnetfeld noch eine Lorentz-Kraft geben kann. Andererseits verlangt das Relativitätsprinzip, dass das Teilchen auch in seinem eigenen Ruhesystem eine Kraft erfährt. Durch die folgenden physikalischen Überlegungen kann man sich klar machen, dass es sich hierbei um eine Kraft handelt, die durch ein elektrisches Feld vermittelt wird.

Beim Wechsel zwischen beiden Inertialsystemen verändert sich die Anzahl und die Stärke der einzelnen Ladungen nicht. Aber im Ruhesystem des Teilchens sind die positiv geladenen Stromröhre bewegt, so dass sie durch die Längenkontraktion bedingt etwas näher zusammenrücken. Demgegenüber ruhen nun die negativ geladenen Elektronen, sie erfahren aber keine Längenkontraktion und sind somit etwas weiter voneinander entfernt als die positiv geladenen Stromröhre. Deshalb zeigt der Kraft im Ruhesystem des Teilchens einen positiven Ladungsüberschuss, der zu einem elektrischen Feld und damit zu einer elektrostatischen Kraft auf das ruhende, geladene Teilchen führt.

Demnach können wir festhalten, dass das elektrische und das magnetische Feld keine absoluten physikalischen Größen darstellen, da sie sich beim Wechsel von einem in ein anderes Inertialsystem verändern. Wir werden daher nun den elektromagnetischen Feldstärketensor einführen, aus dessen Transformationsverhalten beim Wechsel des Inertialsystems sich dann die entsprechenden Transformationen des elektrischen und magnetischen Feldes ergeben.

### 13.2 Elektromagnetischer Feldstärketensor:

Wir führen nun eine antisymmetrische  $4 \times 4$ -Matrix ein, die sowohl die Komponenten des elektrischen Feldstärkes  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$  als auch die der magnetischen Induktion  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  beinhaltet. Als kovariante elektromagnetische Feldstärketensor lautet:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.1)$$

Der entsprechende kontravariante elektromagnetische Feldstärketensor folgt dann aus

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \quad (13.2)$$

Einsetzen von (11.79) und (13.1) in (13.2) führt auf

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

Die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \vec{B} \stackrel{(4.13)}{=} 0 \quad (13.4)$$

$$\text{rot } \vec{E} \stackrel{(4.14)}{=} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13.5)$$

lassen sich nun mit Hilfe des kovarianten elektromagnetischen Feldstärketensors wie folgt zusammenschreiben:

$$\partial_x F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \quad (13.6)$$

Wir bemerken, dass die einzelnen Terme in (13.6) durch zyklische Vertauschung der Indizes ineinander übergehen. Besonders ist zu beachten, dass der Vierergradient definiert wird durch

$$(\partial_\mu) = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (13.7)$$

Das bedeutet also, dass die partiellen Ableitungen nach den kontravarianten Komponenten des Vierer-Ortsvektors zu kovarianten Komponenten des Vierergradienten führen. Wir erhalten aus (13.6) durch  $\nu = 0, \mu = 1$  und  $\alpha = 2$

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \stackrel{(13.1), (13.7)}{=} -\frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_2 = 0 \quad (13.8)$$

und entsprechend durch  $\lambda=0, \mu=2, \nu=3$

$$\partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} \underline{(13.1), (13.7)} - \frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x = 0 \quad (13.9)$$

und durch  $\lambda=0, \mu=3, \nu=1$

$$\partial_0 F_{31} + \partial_3 F_{10} + \partial_1 F_{03} \underline{(13.1), (13.7)} - \frac{1}{c} \left( \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_y = 0 \quad (13.10)$$

ferner erhalten wir aus (13.6) für  $\lambda=1, \mu=2, \nu=3$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \underline{(13.1), (13.7)} - \text{div } \vec{B} = 0 \quad (13.11)$$

### 13.3 Lorentz-Transformationen:

Wir führen eine Lorentz-Transformation von einem in ein anderes Inertialsystem durch und fordern, dass sich der kontravariante elektromagnetische Feldstärketensor (13.3) wie ein Tensor (2,0)ter Stufe transformiert, siehe Abschnitt 11.5.8:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (13.12)$$

einsetzen von (11.47) und (13.3) in (13.12) führt schließlich auf

$$(F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (F')^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c & -E'_y/c & -E'_z/c \\ E'_x/c & 0 & -B'_z & B'_y \\ E'_y/c & B'_z & 0 & -B'_x \\ E'_z/c & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \quad (13.13)$$

Dabei lauten die transformierten elektrischen Felder

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ E'_z &= \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (13.14)$$

und entsprechend die transformierten magnetischen Felder

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \frac{B_y + v E_z/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ B'_z &= \frac{B_z - v E_y/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir erneut den Draht von Abschnitt 13.1. Im Ruhesystem des Drahtes ist  $\vec{E} = \vec{0}$  und  $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ . Für das Ruhesystem des Teilchens folgt dann

$$\vec{E}' = -\frac{v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_y \quad (13.16)$$

d.h. es wirkt ein elektrisches Feld in  $y$ -Richtung und nach (13.15) wirkt auch noch ein magnetisches Feld in  $z$ -Richtung

$$\vec{B}' = \frac{B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_z \quad (13.17)$$

Wir betrachten nun, welche Kräfte in dem jeweiligen Bezugssystem auf das Teilchen der Ladung  $q$  wirken, das sich mit derselben Geschwindigkeit wie die Elektronen im Draht bewegt. Im Ruhesystem des Drahtes wirkt nach (4.18) die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q (v \vec{e}_x) \times (B_z \vec{e}_z) = -q v B_z \vec{e}_y \quad (13.18)$$

Im Ruhesystem des Teilchens wirkt dagegen aufgrund von (4.18) und (13.16) nur eine elektrostatische Kraft

$$\vec{F}' = q \vec{E}' = -\frac{q v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{e}_y \quad (13.19)$$

Demnach sind die Richtungen beider Kräfte (13.18), (13.19) dieselben. Aber vom Betrag her ist  $F'$  aufgrund der Längenkontraktion größer als  $F$ .

Wir bemerken, dass sich die Transformation des elektrischen und des magnetischen Feldes auch für den Fall einer allgemeinen Geschwindigkeit  $\vec{v}$  angeben lässt. Hierzu ist wieder (13.12) zu verwenden, dieses Mal aber mit der allgemeinen Lorentz-Transformation (12.18). Wir führen die entsprechende Matrixmultiplikation nicht explizit vor, sondern beschränken uns auf die Angabe des Ergebnisses. Hierzu bezeichnen wir mit  $\parallel$  und  $\perp$  die jeweiligen Felder parallel und senkrecht zur Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und erhalten für das transformierte elektrische Feld

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad (13.20)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

und entsprechend für das transformierte magnetische Feld

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

(13.21)

$$\vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \vec{v} \times \vec{E}_{\perp} / c^2}{\gamma(1 - \vec{v}^2/c^2)}$$

Wir können also festhalten, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  nicht unabhängig voneinander sind. Ein reines  $\vec{E}$ -Feld in einem Inertialsystem erscheint als eine Mischung von  $\vec{E}'$  und  $\vec{B}'$  in einem anderen Inertialsystem und umgekehrt. Entsprechendes gilt auch für ein reines  $\vec{B}$ -Feld. Daher verwendet man für den Wechsel zwischen Inertialsystemen den elektromagnetischen Feldstärkevektoren  $F^{\mu\nu}$  und nicht die separaten Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ .

### 13.4 Kontinuitätsgleichung:

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

(13.22)

lässt sich relativistisch kovariant formulieren. Um zu führen wie die Vierer-Stromdichte

$$j^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

(13.23)

ein, deren zeitliche Komponente die Ladungsdichte  $\rho$  und deren räumliche Komponenten die Stromdichte  $\vec{j}$  beinhalten. In der Tat lässt sich (13.22) mit Hilfe von (13.7) und (13.23) durch

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

(13.24)

kompakt relativistisch kovariant formulieren. Wir fordern nun, dass sich die Vierer-Stromdichte (13.23) wie ein Tensor (1,0)ter Stufe transformiert

$$j'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu}$$

(13.25)

Einsetzen von (11.47) und (13.23) in (13.25) führt auf

$$j'^0 = \frac{\rho - v j_x}{\gamma(1 - v^2/c^2)}$$

$$j'^x = \frac{j_x - v \rho}{\gamma(1 - v^2/c^2)}$$

(13.26)

$$j'^y = j_y$$

$$j'^z = j_z$$

Dies bedeutet anschaulich, dass eine ruhende Ladung  $\rho \neq 0, \vec{j} = \vec{0}$  in  $\Sigma$  in  $\Sigma'$  als Ladung  $\rho' \neq 0$  und Strom  $\vec{j}' = \vec{0}$

erscheint. Da bei diesem Wechsel der Inertialsysteme eine Längenkontraktion auftritt, enthält (13.26) den Faktor  $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ .

13.5 Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

Auch die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\text{div } \vec{E} \stackrel{(4.12)}{=} \frac{\rho}{\epsilon_0} \stackrel{(4.17)}{=} \mu_0 c^2 \rho \quad (13.27)$$

$$\text{rot } \vec{B} \stackrel{(4.15)}{=} \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (13.28)$$

lassen sich relativistisch kovariant formulieren. Mit Hilfe des kontravarianten elektromagnetischen Feldstärketensors erhalten wir

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (13.29)$$

In der Tat reduziert sich (13.29) z. B. für  $\nu=0$  auf

$$\partial_0 F^{00} = \frac{1}{c} \text{div } \vec{E} = \mu_0 j_0 \stackrel{(13.23)}{=} \mu_0 c \rho \stackrel{(13.27)}{=} \mu_0 c \rho$$

während wir für  $\nu=i$  erhalten

$$\left. \begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_x = \mu_0 j_x \\ \partial_0 F^{02} + \partial_1 F^{12} + \partial_3 F^{32} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_y = \mu_0 j_y \\ \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + \partial_2 F^{23} &\stackrel{(13.3), (13.7)}{=} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot } \vec{B}\right)_z = \mu_0 j_z \end{aligned} \right\} \stackrel{(13.28)}{=}$$

Wir bemerken noch, dass sich aus (13.29) unmittelbar die Kontinuitätsgleichung (13.24) ableiten lässt. Bilden wir die Divergenz von (13.29), so folgt aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors:

$$0 \stackrel{(13.29)}{=} \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} \stackrel{(13.29)}{=} \mu_0 \partial_\nu j^\nu \stackrel{(13.24)}{=}$$

13.6 Vierer-Vektorpotential:

Im Abschnitt 6.2 hatten wir aus den homogenen Maxwell-Gleichungen (13.4) und (13.5) mit Hilfe des Helmholtzschen Vektorzerlegungssatzes abgeleitet, dass sich die elektromagnetischen Felder  $\vec{E}, \vec{B}$  durch die Gradienten aus dem skalaren Potential  $\phi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$  ableiten lassen:

$$\vec{B} \stackrel{(6.5)}{=} \text{rot } \vec{A} \quad (13.30)$$

$$\vec{E} \stackrel{(6.6)}{=} -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (13.31)$$

Wir lassen nun skalares Potential  $\phi$  und Vektor-

potential  $\vec{A}$  zu einem kontravarianten Vierer-Vektor-potential zusammen:

$$(A^\mu) = \left( \frac{\varphi/c}{\vec{A}} \right) \quad (13.32)$$

Entsprechend lautet das kovariante Vierer-Vektor-potential

$$(A_\mu) \stackrel{(11.50), (11.76)}{=} \left( -\frac{\varphi/c}{\vec{A}} \right) \quad (13.33)$$

Damit können wir (13.30), (13.31) kovariant zusammenfassen zu

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (13.34)$$

In der Tat erhalten wir aus (13.7), (13.33), (13.34):

$$F_{0i} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-A_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\varphi}{c} \stackrel{(13.31)}{=} \frac{E_i}{c} \quad \checkmark$$

$$F_{21} = \frac{\partial}{\partial y} (-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} (-A_y) = (\text{rot } \vec{A})_z \stackrel{(13.30)}{=} B_z \quad \checkmark$$

$$F_{32} = \frac{\partial}{\partial z} (-A_y) - \frac{\partial}{\partial y} (-A_z) = (\text{rot } \vec{A})_x \stackrel{(13.30)}{=} B_x \quad \checkmark$$

$$F_{13} = \frac{\partial}{\partial x} (-A_z) - \frac{\partial}{\partial z} (-A_x) = (\text{rot } \vec{A})_y \stackrel{(13.30)}{=} B_y \quad \checkmark$$

Demnach beinhaltet (13.34) schon die homogenen Maxwell-Gleichungen. Das sehen wir durch explizit durch, dass (13.6) aufgrund von (13.34) automatisch erfüllt ist:

$$\cancel{\partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y)} + \cancel{\partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z)} + \cancel{\partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x)} = 0 \quad \checkmark$$

Zurück haben wir angenommen, dass das Vierer-Vektorpotential mindestens zweimal stetig differenzierbar ist (Satz von Schwarz):

$$\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda = \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda \quad (13.35)$$

Setzen wir das in (13.34) in die kovariante Form der Maxwell-Gleichungen (13.29) ein, so folgt

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 j^\nu \quad (13.36)$$

Zurück haben wir den D'Alembert-Operator eingeführt:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \stackrel{(11.80)}{=} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \stackrel{(11.79), (13.7)}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad (13.37)$$

Dabei besagt (13.36), dass die Komponenten des Vierer-Vektorpotentials gekoppelte Differentialgleichungen sind.

Man kann nun aber ausnutzen, dass das Vierer-Vektorpotential nicht eindeutig definiert ist. Führt man nämlich die Eichtransformation

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda \quad (13.38)$$

durch, so bleibt der elektromagnetische Feldstärketensor (13.34)

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad (13.39)$$

und damit auch die elektromagnetischen Felder invariant, sofern die Eichfunktion  $\Lambda$  mindestens zweimal stetig differenzierbar ist (Satz von Schwarz)

$$\partial_\mu \partial_\nu \Lambda = \partial_\nu \partial_\mu \Lambda \quad (13.40)$$

Offenbar handelt es sich bei (13.38) gerade um die Eichtransformation (6.8), (6.9)

$$A'_0 = A_0 - \partial_0 \Lambda \quad (13.7), (13.33) \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (6.8)$$

$$A'_i = A_i - \partial_i \Lambda \quad (13.7), (13.33) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \Lambda \quad (6.9)$$

Nur nutzen die Eichfreiheit aus und wählen die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (13.41)$$

reduziert sich (13.41) aufgrund von (13.7) und (13.33) auf die frühere Lorenz-Eichung (6.14). Mit Hilfe der Lorenz-Eichung (13.41) entkoppeln die Bewegungsgleichungen (13.36) und wir erhalten zur Bestimmung des Vierer-Vektorpotentials

$$\square A^\nu = \mu_0 \dot{j}^\nu \quad (13.42)$$

Aufgrund des D'Alembert-Operators (13.37) stellen (13.42) inhomogene Wellengleichungen dar die aufgrund von (4.17), (13.23), (13.37) mit (6.15), (6.16) übereinstimmen.