

Mathematische Grundlagen der Physik

Priv.-Doz. Dr. Axel Pelster

Fachbereich Physik



Vorlesung im Wintersemester 2021/2022

Kaiserslautern, den 11. Februar 2022

Vorwort

Physikalische Naturgesetze lassen sich immer mit Hilfe von Formeln quantifizieren, so dass die Mathematik eine „Sprache“ darstellt, in der physikalische Gesetzmäßigkeiten präzise formuliert werden. Daher kommt der Ausbildung in Höherer Mathematik im Physikstudium eine grundlegende Bedeutung zu. Zu Beginn des Physikstudiums, wenn in Lehrveranstaltungen üblicherweise die Experimente und die daraus resultierenden Gesetze der Mechanik und der Elektrodynamik behandelt werden, liegen aber diese Grundkenntnisse in der Höheren Mathematik in der Regel noch nicht vor. Sie werden nach den Studienplänen normalerweise erst zeitversetzt in höheren Semestern im Rahmen von Vorlesungen der Mathematik oder aber der Theoretischen Physik vermittelt.

Aus diesem Grund wird am Fachbereich Physik der TU Kaiserslautern zunächst vor Vorlesungsbeginn fakultativ ein zweiwöchiger **Kompaktkurs in Mathematik** angeboten, der die Schulmathematik wiederholt [1]. Schon im ersten Semester des Studiums führt dann die Lehrveranstaltung **Mathematische Grundlagen der Physik** in die mathematische Methoden der Physik ein. Hierbei werden ausgehend von der Schulmathematik genau die Grundkenntnisse der Höheren Mathematik vermittelt, die für die Studienanfänger in der Physik benötigt werden. Dabei werden diese mathematischen Methoden anhand des konkreten Anwendungsbezugs in der Physik entwickelt, so dass eher exemplarisches Rechnen sowie anschauliches Verstehen und weniger die mathematische Strenge im Vordergrund stehen. Zum einen werden Vektoren, Matrizen, komplexe Zahlen, Differentiation und Integration von Funktionen mit mehreren Veränderlichen sowie lineare gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt, da deren Kenntnisse für die Beschreibung der Newtonschen Mechanik benötigt werden. Zum anderen werden aber auch Grundkenntnisse der Vektoranalysis vermittelt, die die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation sowie die Integralsätze von Gauß und Stokes umfassen, da sie für die Formulierung der Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik essentiell sind. Trotz des Umfangs von wöchentlich vierstündigen Vorlesungen, zweistündigem Tutorium und zweistündigen Übungen muss hier allerdings angesichts der Fülle des Stoffes eine gewisse Auswahl getroffen werden.

Das vorliegende Vorlesungsmanuskript zur Lehrveranstaltung **Mathematische Grundlagen der Physik** stellt kein Originalwerk dar, da viele Anregungen von Vorlesungsmitschriften und Monografien miteingeflossen sind. Der erste Teil zur Newtonschen Mechanik beruht auf der Vorlesung **Theoretische Mechanik**, die ich zwei Mal an der Freien Universität Berlin

für Diplom-Studenten im dritten Fachsemester hielt [2]. Allerdings muss hierzu das damalige Skript erweitert werden, um wesentliche Konzepte der Höheren Mathematik für Studienanfänger pädagogisch einzuführen. Hierbei greife ich auf die langjährigen Erfahrungen meiner Kollegen Hans Jürgen Korsch [3] und Michael Fleischhauer [4] zurück. Der zweite Teil zur Vektoranalysis sowie deren Anwendung in der Elektrostatik und Magnetostatik beruht auf einer zweistündige Vorlesung **Elektrodynamik**, die ich für Lehramtsstudenten im Sommersemester 2005 an der Universität Duisburg-Essen sowie in erweiterter Form für Physik-Studenten im zweiten Studiensemester im Sommersemester 2020 an der TU Kaiserslautern hielt. Dankenswerterweise half mir Fernando Grumpe, das handschriftliche Manuskript dieser drei Kapitel in \LaTeX zu übersetzen. Zur Vertiefung des behandelten Stoffes und als Nachschlagewerke verweise ich auf die einschlägigen Bücher [5-15]. Und schließlich gilt der Dank meinem Kollegen Georg Lefkidis für die Übernahme des Tutoriums sowie den Übungsgruppenleitern Carsten Dittrich, Tobias Held, Til Möhnen, Stephanie Roden, und Enrico Stein. Sie alle haben durch tatkräftige Betreuung der Erstsemesterstudenten wesentlich zum Erfolg der Lehrveranstaltung beigetragen.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung	1
1.1	Rechenregeln mit Vektoren	1
1.2	Komponentendarstellung von Vektoren	2
1.3	Skalarprodukt zweier Vektoren	3
1.4	Vektorprodukt zweier Vektoren	5
1.5	Spatprodukt dreier Vektoren	8
1.6	Zweifaches Vektorprodukt	8
1.7	Levi-Civita-Symbol	10
1.7.1	Definition	10
1.7.2	Vektorprodukt	10
1.7.3	Spatprodukt	12
1.8	Koordinatentransformation	13
2	Kinematik	15
2.1	Bahnkurve	15
2.2	Ebene Polarkoordinaten	18
2.2.1	Kreisbewegung	18
2.2.2	Basisvektoren	19
2.2.3	Partielle Ableitung	21
2.3	Krummlinige Koordinaten	24
2.3.1	Zylinderkoordinaten	25
2.3.2	Kugelkoordinaten	26
3	Dynamik	29

3.1	Erstes Axiom: Trägheitsgesetz	29
3.2	Zweites Axiom: Grundgleichung der Dynamik	30
3.3	Drittes Axiom: Wechselwirkungsgesetz	31
3.4	Viertes Axiom: Superpositionsprinzip der Kräfte	32
3.5	Arbeit als Kurvenintegral über Kraftfeld	32
3.6	Beispiele	34
3.6.1	Erstes Kraftfeld	35
3.6.2	Zweites Kraftfeld	35
3.7	Kinetische Energie	36
3.8	Konservatives Kraftfeld	37
3.9	Gradient	37
3.10	Kriterium für Wegunabhängigkeit	40
3.10.1	Hinreichendes Kriterium	40
3.10.2	Notwendiges Kriterium	41
3.11	Rotation	42
3.12	Zurück zu den Beispielen	44
3.13	Energieerhaltungssatz	45
3.14	Impuls- und Drehimpulserhaltung	47
3.15	Zentralkräfte	48
4	Komplexe Zahlen	51
4.1	Definition komplexer Zahlen	51
4.2	Rechnen mit komplexen Zahlen	52
4.2.1	Addition und Subtraktion	53
4.2.2	Multiplikation	53
4.2.3	Konjugiert komplexe Zahl	54
4.2.4	Division	55
4.2.5	Folgerungen	56
4.3	Taylor-Reihe	56
4.3.1	Tangente	57
4.3.2	Herleitung	57

4.3.3	Beispiele	59
4.4	Euler-Formel	59
4.4.1	Herleitung über Taylor-Reihen	59
4.4.2	Trigonometrische Additionstheoreme	60
4.5	Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen	60
4.5.1	Argument und Phasenfaktor	61
4.5.2	Multiplikation und Division	62
4.5.3	Folgerungen	62
4.6	Fundamentalsatz der Algebra	63
5	Harmonischer Oszillator	65
5.1	Harmonische Schwingung	65
5.2	Gedämpfte harmonische Schwingung	68
5.2.1	Schwache Dämpfung	69
5.2.2	Aperiodischer Grenzfall	71
5.2.3	Starke Dämpfung	72
5.2.4	Energie	73
5.3	Beliebige zeitabhängige Kraft	74
5.3.1	Schwache Dämpfung	77
5.3.2	Aperiodischer Grenzfall	77
5.3.3	Starke Dämpfung	78
5.4	Erzwungene Schwingungen	79
5.5	Diracsche Delta-Funktion	80
5.6	Zweidimensionales Integral	82
5.7	Eigenschaften der Diracschen Delta-Funktion	84
5.8	Fourier-Transformation	86
5.9	Fourier-Transformation der Delta-Funktion	87
5.10	Inverse Fourier-Transformation	88
5.11	Greensche Funktion	89
5.12	Fourier-Transformation der Greenschen Funktion	91

6	Zweikörper-Problem	93
6.1	Problemstellung	93
6.2	Symmetrieüberlegungen	94
6.3	Reduktion auf Einkörper-Problem	95
6.4	Reduktion auf Radialgleichung	96
6.5	Energieerhaltung	98
6.6	Diskussion der Bewegung	99
6.6.1	Newton'sches Gravitationspotential	99
6.6.2	Beliebiges Zentralpotential	100
7	Kepler-Problem	103
7.1	Bahnkurve	103
7.2	Ellipse	105
7.3	Kepler-Gesetze	106
7.3.1	Erstes Kepler-Gesetz	106
7.3.2	Zweites Kepler-Gesetz	108
7.3.3	Drittes Kepler-Gesetz	108
7.4	Hyperbel	111
7.5	Coulomb-Potential	112
8	System von Massenpunkten	115
8.1	Newton'sche Grundgleichung	115
8.2	Schwerpunkt	116
8.3	Gesamtdrehimpuls	118
8.4	Schwerpunktsystem	120
8.5	Gesamtenergie	122
9	Matrizen	125
9.1	Definitionen	125
9.2	Rechenoperationen mit Matrizen	126
9.2.1	Elementare Rechenoperationen	127
9.2.2	Multiplikation von Matrizen	127

9.3	Determinante	129
9.4	Inverse Matrix	132
9.5	Eigenwertprobleme von Matrizen	133
9.5.1	Eigenwerte	134
9.5.2	Eigenvektoren	134
9.5.3	Beispiel	135
9.6	Reelle Symmetrische Matrizen	136
9.6.1	Eigenwerte	136
9.6.2	Eigenvektoren	137
9.6.3	Beispiel	138
9.7	Transformation von Matrizen	138
9.8	Diagonalisierung	139
10	Harmonische Schwingungen von Massenpunkten	141
10.1	Notation	141
10.2	Kleine Auslenkungen aus Ruhelage	142
10.3	Koordinatentransformationen	144
10.4	Eigenwertproblem	145
10.4.1	Eigenfrequenzen	145
10.4.2	Eigenvektoren	146
10.4.3	Rücktransformation	146
10.5	Einarbeiten der Anfangsbedingungen	147
10.6	Dreiatomiges Molekül	148
11	Rotierendes Bezugssystem	151
11.1	Transformation der Einheitsvektoren	151
11.2	Zeitableitung der Einheitsvektoren	152
11.3	Zeitableitung der Vektorkomponenten	154
11.4	Trägheitskräfte	155
11.5	Freier Fall auf rotierender Erde	157
12	Mehrdimensionale Integrale	161

12.1	Flächenintegrale	161
12.2	Volumenintegrale	162
12.3	Oberflächenintegrale	164
12.3.1	Gekrümmte Fläche	164
12.3.2	Ebene Fläche	165
12.3.3	Fluß eines Vektorfeldes	165
12.3.4	Beispiel	166
12.4	Jacobi-Determinante	167
12.4.1	Flächenintegrale	167
12.4.2	Volumenintegrale	169
13	Vektoranalysis	171
13.1	Anschauliche Definitionen	171
13.1.1	Gradient	171
13.1.2	Divergenz	172
13.1.3	Rotation	172
13.2	Kartesische Koordinaten	173
13.2.1	Gradient	174
13.2.2	Divergenz	174
13.2.3	Rotation	175
13.3	Integralsätze	177
13.3.1	Integralsatz von Gauß	178
13.3.2	Integralsatz von Stokes	179
14	Elektrostatik	181
14.1	Fluß der elektrischen Feldstärke	181
14.2	Überlegungen	182
14.3	Erste Maxwell Gleichung der Elektrostatik	183
14.4	Zirkulation der elektrischen Feldstärke	184
14.5	Zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik	184
14.6	Poisson-Gleichung	185

14.7 Poisson-Gleichung für Punktladung	186
14.8 Greensche Funktion der Poisson-Gleichung	187
15 Magnetostatik	189
15.1 Zirkulation der magnetischen Flußdichte	189
15.2 Erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik	191
15.3 Zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik	193
15.4 Vektorpotential	193
15.5 Berechnung des Vektorpotentials	194
15.6 Biot-Savart-Gesetz	195

Kapitel 1

Vektorrechnung

In der Physik hat man es häufig mit Größen zu tun, die eine Richtung besitzen. Wichtige Beispiele hierfür sind der Ort eines Teilchens, seine Geschwindigkeit oder die Kraft, die auf das Teilchen wirkt. Solche gerichteten Größen bezeichnet man als Vektoren.

1.1 Rechenregeln mit Vektoren

Ein Vektor \vec{a} ist eine gerichtete Größe, die durch einen Pfeil mit dem Betrag $|\vec{a}|$ und die Richtung $\vec{a}/|\vec{a}|$ definiert wird, siehe Abb. 1.1a). Die beiden grundlegenden Operationen von Vektoren sind die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl, die graphisch wie in Abb. 1.1b) eingeführt werden. Multipliziert man einen Vektor \vec{a} mit einer reellen Zahl λ , so führt dies auf den Vektor $\lambda\vec{a}$, der in Richtung von \vec{a} zeigt und den Betrag $\lambda|\vec{a}|$ besitzt, siehe Abb. 1.1c). Für diese beiden Operationen mit Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (1.1)$$

$$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda. \quad (1.2)$$

b) Assoziativität:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (1.3)$$

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}. \quad (1.4)$$

c) Distributivität:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \quad (1.5)$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \quad (1.6)$$

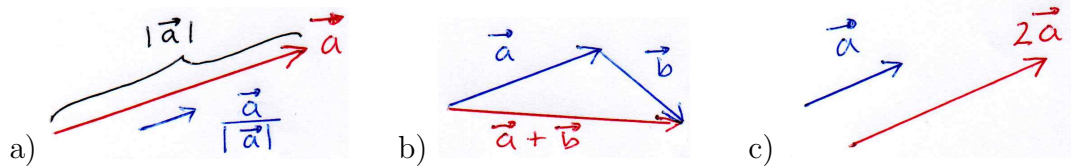


Abbildung 1.1: Graphische Darstellung von a) einem Vektor, b) der Addition zweier Vektoren und c) der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl.

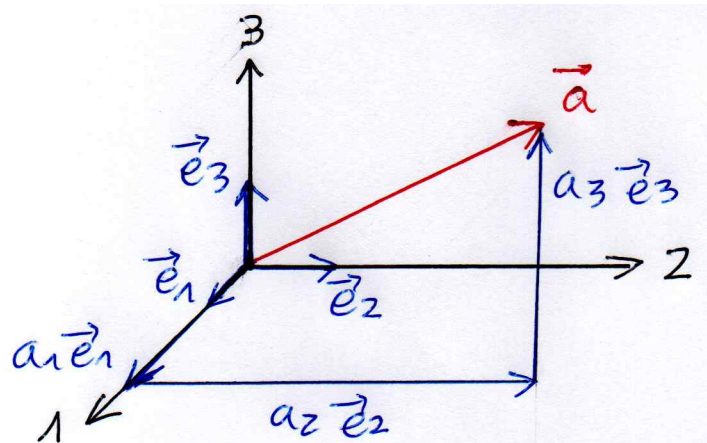


Abbildung 1.2: Zerlegung eines Vektors \vec{a} in die Projektionen auf die drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ entsprechend (1.7).

1.2 Komponentendarstellung von Vektoren

Zu einem Vektor \vec{a} mit dem Betrag $|\vec{a}|$ lässt sich ein Einheitsvektor $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$ konstruieren, der in Richtung von \vec{a} zeigt und den Betrag $|\vec{e}| = 1$ hat. Ein Koordinatensystem wird durch drei Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ definiert, die jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. Projiziert man einen Vektor \vec{a} auf diese Einheitsvektoren, so ergeben sich die Vektoren $a_1\vec{e}_1, a_2\vec{e}_2, a_3\vec{e}_3$, deren Addition wieder auf den Vektor \vec{a} führt, siehe Abb. 1.2:

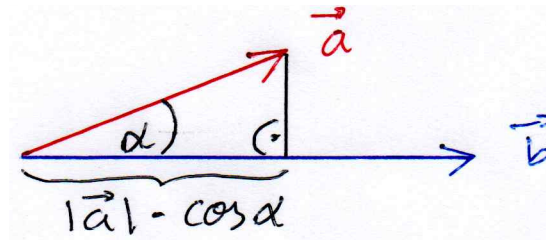
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \quad (1.7)$$

Aufgrund dieser Komponentendarstellung schreibt man den Vektor \vec{a} durch das Tripel der Projektionslängen a_1, a_2, a_3 :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Die drei Einheitsvektoren entsprechen dann den Tripeln:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Abbildung 1.3: Projektion des Vektors \vec{a} in Richtung von \vec{b} .

Der Betrag des Vektors \vec{a} ergibt sich aus dem räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.10)$$

Die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sind dann komponentenweise definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

1.3 Skalarprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren \vec{a} und \vec{b} wird mit Hilfe eines Skalarproduktes ein Skalar zugeordnet, indem das Produkt der Beträge der beiden Vektoren mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ multipliziert wird:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha. \quad (1.12)$$

Anschaulich entspricht das Skalarprodukt der Länge der Projektion von \vec{a} in Richtung von \vec{b} multipliziert mit $|\vec{b}|$, siehe Abb. 1.3. Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} , \vec{b} genügt den folgenden Axiomen:

a) Kommutativität:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (1.13)$$

b) Distributivität:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (1.14)$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}). \quad (1.15)$$

Es gibt zwei wichtige Spezialfälle des Skalarproduktes:

1.) Sind \vec{a} und \vec{b} parallel zueinander, ist also $\alpha = 0$, so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \quad \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (1.16)$$

Insbesondere gilt dann für $\vec{b} = \vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (1.17)$$

2.) Sind \vec{a} und \vec{b} senkrecht zueinander, ist also $\alpha = \pi/2$, so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (1.18)$$

Demnach gilt für das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren \vec{e}_i und \vec{e}_j eines Koordinatensystems mit zueinander orthogonalen Koordinatenachsen

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad (1.19)$$

wobei das Kronecker-Symbol definiert ist durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}. \quad (1.20)$$

Es seien nun zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} in der jeweiligen Komponentendarstellung (1.7) gegeben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j. \quad (1.21)$$

Dann läßt sich mit Hilfe von (1.19) und (1.20) das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ durch die Komponenten der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ausdrücken:

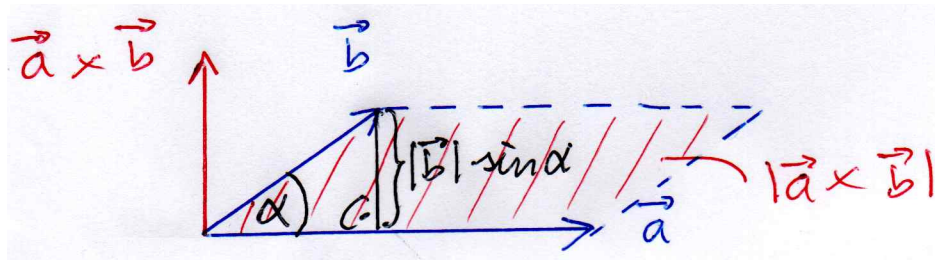
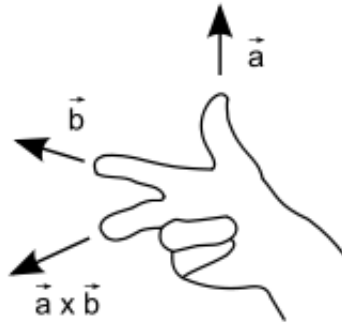
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Hieraus lassen sich die folgenden Konsequenzen ablesen:

1) Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors \vec{a} mit einem Einheitsvektor \vec{e}_i , so folgt unmittelbar aus (1.22)

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \quad (1.23)$$

Demnach ist die Projektion a_i des Vektors \vec{a} auf die i te Koordinatenachse durch das Skalarprodukt von \vec{a} mit \vec{e}_i gegeben.

Abbildung 1.4: Zur Definition des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$.Abbildung 1.5: Rechte-Hand-Regel für die relative Lage der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$.

- 2) Das Skalarprodukt eines Vektors \vec{a} mit sich selbst führt gemäß (1.17) und (1.22) auf den räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.24)$$

- 3) Den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ zwischen zwei Vektoren \vec{a} , \vec{b} lässt sich nach (1.12), (1.22) und (1.24) mit deren Komponenten berechnen:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) = \arccos \left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \right]. \quad (1.25)$$

1.4 Vektorprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren \vec{a} und \vec{b} wird mit Hilfe des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor zugeordnet. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ steht dabei zu dem von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramm senkrecht, so dass \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem bilden, siehe Abb. 1.4. Die relative Lage dieser drei Vektoren zueinander lässt sich einprägsam mit Hilfe der Rechte-Hand-Regel zusammenfassen, siehe Abb. 1.5. Wenn die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} in Richtung von Daumen und Zeigefinger der rechten Hand zeigen, dann zeigt das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ in Richtung des Mittelfingers. Der Betrag des Vektorproduktes entspricht dabei der Fläche des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha, \quad \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (1.26)$$

Hierbei bezeichnen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}| \sin \alpha$ Grundlänge und Höhe des Parallelogramms, siehe Abb. 1.4. Das Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} genügt den folgenden Axiomen:

a) Antikommutativität:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (1.27)$$

b) Distributivität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (1.28)$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}). \quad (1.29)$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren \vec{e}_i und \vec{e}_j . Für $i = j$ folgt aus der Antikommutativität (1.27) der Nullvektor:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}. \quad (1.30)$$

Im Falle $i \neq j$ ergibt aber $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ einen Vektor vom Betrag Eins. Ferner steht der Vektor $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ senkrecht auf \vec{e}_i und \vec{e}_j , so dass \vec{e}_i , \vec{e}_j und $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ ein Rechtssystem bilden. Somit erhalten wir im Einzelnen:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Mit der Komponentendarstellung der Vektoren \vec{a} , \vec{b} folgt nun für das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zunächst

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3), \quad (1.32)$$

so dass das Ausmultiplizieren auf insgesamt 9 Terme führt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_1b_1\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ &+ a_2b_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + a_3b_1\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3 \times \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Mit Hilfe von (1.30) und (1.31) vereinfacht sich das Vektorprodukt (1.33) schließlich zu

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3. \quad (1.34)$$

Dies lässt sich wie folgt kompakt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

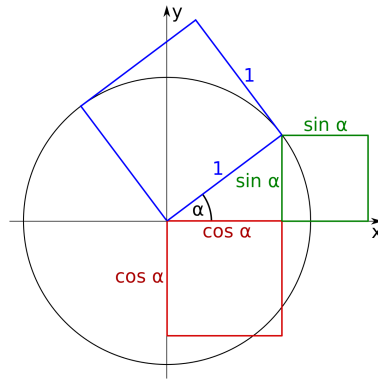


Abbildung 1.6: Graphische Veranschaulichung des trigonometrischen Pythagoras (1.41).

Wir können nun anhand der Komponentendarstellung zeigen, dass das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf \vec{a} steht:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Analog folgt aus Antikommutativität (1.27) und (1.36):

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = 0, \quad (1.37)$$

d.h. das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ steht auch senkrecht auf \vec{b} . Außerdem folgt aus der Komponentendarstellung des Skalarproduktes und des Vektorproduktes

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 \\ &\quad + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2, \end{aligned} \quad (1.38)$$

was durch Ausmultiplizieren schließlich auf den räumlichen Pythagoras (1.10) führt:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2. \quad (1.39)$$

Daraus folgt dann mit Hilfe von (1.12):

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (1.40)$$

so dass sich aufgrund des trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1.41)$$

der in Abb. 1.6 veranschaulicht ist, das Resultat (1.26) ergibt.

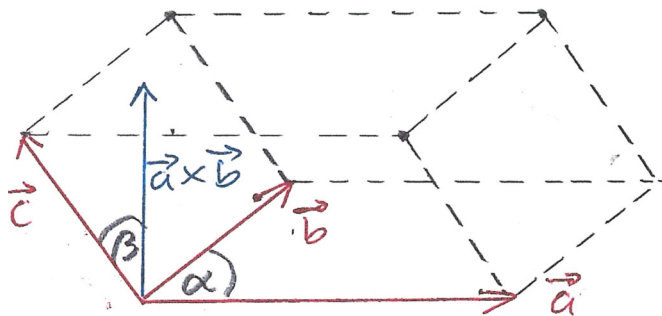


Abbildung 1.7: Zur Definition des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ in (1.43).

1.5 Spatprodukt dreier Vektoren

Das Spatprodukt dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} wird so definiert, dass es gerade mit dem Volumen $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ des Parallelepipedes übereinstimmt, das von den drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} aufgespannt wird, siehe Abb. 1.7. Aufgrund der Grundfläche des Parallelepipedes $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$ mit $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ und dessen Höhe $|\vec{c}| \cos \beta$ mit $\beta = \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ folgt dann

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha |\vec{c}| \cos \beta, \quad (1.42)$$

was sich zusammenfassen läßt als

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (1.43)$$

Für die Komponentendarstellung gilt dann:

$$\begin{aligned} V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3. \end{aligned} \quad (1.44)$$

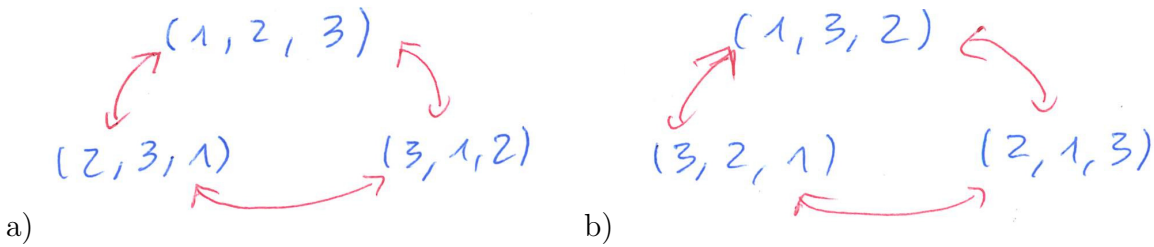
Hieraus folgt, dass man innerhalb des Spatproduktes die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} zyklisch vertauschen kann:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = V(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}). \quad (1.45)$$

Bilden die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ein Rechtssystem, so wird das Volumen des Parallelepipedes positiv gerechnet, im Falle eines Linkssystems entsprechend negativ. Sind zwei der drei Vektoren linear abhängig, so verschwindet das von den drei Vektoren aufgespannte Volumen und damit auch deren Spatprodukt.

1.6 Zweifaches Vektorprodukt

Das zweifache Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ist im Unterschied zum Spatprodukt wiederum ein Vektor. Da ein Vektorprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, ist das zweifache Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ orthogonal sowohl zu \vec{a} als auch zu $\vec{b} \times \vec{c}$:

Abbildung 1.8: Illustration von a) geraden und b) ungeraden Permutationen von $(1, 2, 3)$.

- Das Vektorprodukt $\vec{b} \times \vec{c}$ wiederum ist senkrecht zu der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene. Deshalb muss das zweifache Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene liegen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \quad (1.46)$$

- Aus der Orthogonalität von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ zu \vec{a} folgt dann:

$$\vec{a} \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = 0 = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{c}), \quad (1.47)$$

so dass gilt:

$$\beta = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}), \quad \gamma = -\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (1.48)$$

Einsetzen von (1.48) in (1.46) führt zum Zwischenergebnis

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]. \quad (1.49)$$

Um den noch offenen Faktor α zu bestimmen, gehen wir in (1.49) zur Komponentenschreibweise über. Für die linke Seite erhalten wir

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

während sich die rechte Seite ergibt zu

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Der Vergleich von (1.49)–(1.51) führt auf $\alpha = 1$ und wir erhalten die „bac–cab“-Regel:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (1.52)$$

1.7 Levi-Cività-Symbol

Sowohl das Vektor- als auch das Spatprodukt lassen sich auch eleganter formulieren.

1.7.1 Definition

Hierzu führen wir das Levi-Cività-Symbol ϵ_{ijk} ein, das die folgenden Werte annehmen kann:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i, j, k) \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ -1 & (i, j, k) \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (1.53)$$

Demnach beruht die Definition des Levi-Cività-Symbols auf dem Begriff der Permutation, also der Vertauschung von Indizes. Bei einer gerade Permutation werden alle Indizes im oder gegen der Uhrzeigersinn gedreht, so dass alle Indizes ihre Position wechseln. Konkret sind die geraden Permutationen durch $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ und $(3, 1, 2)$ gegeben, siehe Abb. 1.8a). Bei einer ungeraden Permutation werden zwei Indizes untereinander vertauscht, so dass nur zwei der drei Indizes ihre Position wechseln. Das bedeutet, dass die ungeraden Permutationen durch $(1, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$ und $(2, 1, 3)$ gegeben sind, siehe Abb. 1.8b). Da die Indizes i, j, k des Levi-Cività-Symbols ϵ_{ijk} jeweils die Werte 1, 2, 3 durchlaufen, gibt es gemäß (1.53) genau 6 Fälle, bei denen ϵ_{ijk} von Null verschiedene Werte annimmt:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, \quad \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1. \quad (1.54)$$

All diese 6 Fälle lassen sich alternativ auch auf andere Weise erfassen. Hierzu legt man den Wert $\epsilon_{123} = 1$ festlegt und definiert, dass das Levi-Cività-Symbol ϵ_{ijk} bezüglich der Vertauschung von zwei der drei Indizes antisymmetrisch ist:

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}. \quad (1.55)$$

So erhalten wir ausgehend von der Festlegung $\epsilon_{123} = 1$ durch iteratives Vertauschen von zwei der drei Indizes beispielsweise:

$$1 = \epsilon_{123} = -\epsilon_{213} = \epsilon_{231}. \quad (1.56)$$

1.7.2 Vektorprodukt

Mit Hilfe des so eingeführten Levi-Cività-Symbols ϵ_{ijk} lassen sich nun die jeweiligen Vektorprodukte zweier Einheitsvektoren \vec{e}_i und \vec{e}_j in (1.30) und (1.31) wie folgt kompakt zusammenfassen:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k. \quad (1.57)$$

In der Tat erhalten wir durch Spezialisierung von (1.57) auf den Fall $i = 1$ und $j = 2$ aufgrund von (1.54) das erste Ergebnis von (1.31):

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{12k} \vec{e}_k = \epsilon_{123} \vec{e}_3 = \vec{e}_3. \quad (1.58)$$

Entsprechend ergibt sich aus (1.57) für $i = 2$ und $j = 1$ aufgrund von (1.54) das vierte Ergebnis von (1.31):

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{21k} \vec{e}_k = \epsilon_{213} \vec{e}_3 = -\vec{e}_3. \quad (1.59)$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} mit den jeweiligen Komponentendarstellungen (1.7) und erhalten zunächst

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j. \quad (1.60)$$

Unter Verwendung von (1.57) läßt sich dann das Vektorprodukt mit Hilfe des Levi-Cività-Symbols darstellen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i b_j \vec{e}_k \epsilon_{ijk}. \quad (1.61)$$

Wertet man die 27 Summanden in (1.61) explizit unter Berücksichtigung der Definition des Levi-Cività-Symbols ϵ_{ijk} in (1.53) aus

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & \left(a_1 b_1 \underbrace{\epsilon_{113}}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{\epsilon_{123}}_{=1} + a_1 b_3 \underbrace{\epsilon_{133}}_{=0} + a_2 b_1 \underbrace{\epsilon_{213}}_{=-1} + a_1 b_2 \underbrace{\epsilon_{223}}_{=0} \right. \\ & \left. + a_1 b_3 \underbrace{\epsilon_{233}}_{=0} + a_3 b_1 \underbrace{\epsilon_{313}}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{\epsilon_{323}}_{=0} + a_1 b_3 \underbrace{\epsilon_{333}}_{=0} \right) \vec{e}_3 + 18 \text{ weitere Terme,} \end{aligned} \quad (1.62)$$

so führt dies gerade auf die früheren Komponentenschreibweise des Vektorprodukts (1.34). Darüber hinaus stellt aber (1.61) auch ein einprägsames Ergebnis, da es sich als Determinante einer 3×3 -Matrix interpretieren läßt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.63)$$

Für eine solche Determinante gilt nämlich die Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \quad (1.64)$$

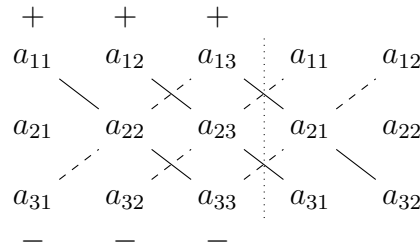


Abbildung 1.9: Jägerzaun-Regel zur Berechnung einer Determinante nach der Regel von Sarrus (1.64).

Sie wird auch als Jägerzaun-Regel bezeichnet, da sie auf das in Abb. 1.9 dargestellte Merkschema zurückzuführen ist. Wendet man die Regel von Sarrus (1.64) auf (1.63) an, so entspricht dies gerade der früheren Komponentenschreibweise des Vektorprodukts (1.34). Statt sich also die Komponentenschreibweise des Vektorprodukts (1.34) zu merken, reicht es aus, das Vektorprodukt als Determinante (1.63) darzustellen und dann die Regel von Sarrus (1.64) bzw. der Jägerzaun-Regel von Abb. 1.9 anzuwenden. Für konkrete Rechnungen stellt dies eine enorme rechentechnische Vereinfachung dar. Abschließend verweisen wir darauf, dass weitergehende Rechenregeln für die Determinanten von Matrizen beispielsweise in Kapitel 11 von Ref. [1] zusammengestellt sind.

1.7.3 Spatprodukt

Betrachten wir nun das Spatprodukt dreier Vektoren (1.43) unter Verwendung von (1.61) und der Komponentendarstellung (1.7) des Vektors \vec{c} :

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i b_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^3 c_l \vec{e}_l \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_i b_j \epsilon_{ijk} c_l \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l. \quad (1.65)$$

Mit Hilfe von (1.19) und der Definition des Kronecker-Symbols (1.20) reduziert sich dies auf

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_i b_j c_k \epsilon_{ijk}. \quad (1.66)$$

Auch dieses Zwischenergebnis läßt sich als Determinante interpretieren:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1.67)$$

In der Tat zeigt die Regel von Sarrus (1.64), dass (1.67) der Komponentendarstellung des Spatprodukts (1.44) entspricht. Daher muss man auch die Komponentendarstellung des Spatprodukts (1.44) nicht auswendig lernen, sondern kann sie sich mit Hilfe von (1.67) und der Regel von Sarrus (1.64) bzw. der Jägerzaun-Regel von Abb. 1.9 entsprechend herleiten.

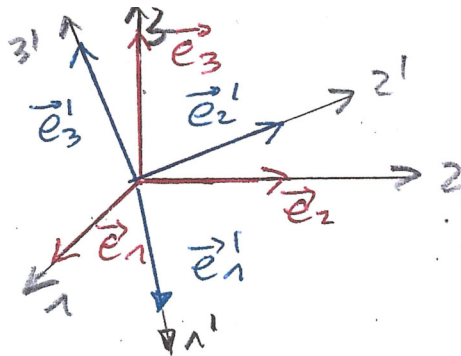


Abbildung 1.10: Einheitsvektoren zweier Koordinatensysteme.

1.8 Koordinatentransformation

Die Komponenten-Darstellung eines Vektors hat einerseits den Vorteil, dass sie anschaulich ist und eine einfache Berechnung von Skalar- und Vektorprodukten erlaubt. Andererseits hat sie den Nachteil, dass sie von der Wahl des Koordinatensystems abhängig ist. Daher untersuchen wir nun, wie sich eine Transformation der Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ des ursprünglichen Koordinatensystems in die Einheitsvektoren $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ des transformierten Koordinatensystems auswirkt, siehe Fig. 1.10. Ein Vektor \vec{x} kann sowohl nach den Einheitsvektoren des alten als auch des neuen Koordinatensystems entwickelt werden:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3. \quad (1.68)$$

Die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten x_1, x_2, x_3 bzw. x'_1, x'_2, x'_3 ergeben sich dann nach (1.23) durch Projektion des Vektors \vec{x} auf die jeweiligen Einheitsvektoren:

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3, \quad (1.69)$$

$$x'_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_1, \quad x'_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_2, \quad x'_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_3. \quad (1.70)$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ nach den alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ entwickeln:

$$\vec{e}'_1 = R_{11} \vec{e}_1 + R_{12} \vec{e}_2 + R_{13} \vec{e}_3, \quad (1.71)$$

$$\vec{e}'_2 = R_{21} \vec{e}_1 + R_{22} \vec{e}_2 + R_{23} \vec{e}_3, \quad (1.72)$$

$$\vec{e}'_3 = R_{31} \vec{e}_1 + R_{32} \vec{e}_2 + R_{33} \vec{e}_3. \quad (1.73)$$

In kompakter Schreibweise lautet dieser Zusammenhang:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \vec{e}_j. \quad (1.74)$$

Die dabei auftretenden Matrixelemente R_{ij} sind durch die Skalarprodukte und damit durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren \vec{e}'_i und \vec{e}_j bestimmt:

$$\cos[\angle(\vec{e}'_i, \vec{e}_j)] = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \delta_{kj} = R_{ij}. \quad (1.75)$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die alten Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gemäß (1.19) orthonormal zueinander sind. Fordert man nun, dass auch die neuen Einheitsvektoren $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ orthonormal zueinander sind, so gilt analog zu (1.19) auch

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}. \quad (1.76)$$

Aus (1.19) und (1.76) folgt dann eine wesentliche Einschränkung an die Matrix R :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_k \cdot \vec{e}'_l &= \left(\sum_{i=1}^3 R_{ki} \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 R_{lj} \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ki} R_{lj} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ki} R_{lj} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 R_{ki} R_{li} = \sum_{i=1}^3 R_{li} R_{ik}^T = \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Dabei wurde die zu R transponierte Matrix R^T durch Vertauschung von Zeilen und Spalten in der Komponentendarstellung eingeführt:

$$R_{ik}^T = R_{ki}. \quad (1.78)$$

Die Bedingung (1.77) besagt, dass die Matrix R orthonormal ist, d.h. dass die jeweiligen Zeilen bzw. Spalten orthonormal zueinander sind:

$$RR^T = R^T R = E. \quad (1.79)$$

Hier bezeichnet $E = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix. Da andererseits die zu R inverse Matrix R^{-1} definiert ist durch [1, Kapitel 10]

$$RR^{-1} = R^{-1}R = E, \quad (1.80)$$

besagt (1.79), dass orthonormale Matrizen auch charakterisiert sind durch

$$R^T = R^{-1}. \quad (1.81)$$

Ferner folgt aus dem Transformationsgesetz für die Einheitsvektoren in (1.74) auch ein entsprechendes Transformationsgesetz für die Komponenten eines Vektors \vec{x} :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \left(\sum_{j=1}^3 R_{ij} \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 x'_i R_{ij} \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j. \quad (1.82)$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (1.78)

$$x_j = \sum_{i=1}^3 x'_i R_{ij} = \sum_{i=1}^3 R_{ji}^T x'_i, \quad (1.83)$$

was in Vektorschreibweise heißt:

$$\vec{x} = R^T \vec{x}' \quad \iff \quad \vec{x}' = R \vec{x}. \quad (1.84)$$

Dieses Ergebnis wird zur strengen mathematischen Definition eines Vektors herangezogen. Ein System von drei Elementen x_1, x_2, x_3 ist genau dann ein Vektor, wenn es sich beim Übergang vom einem zum anderen Koordinatensystem genau so transformiert. Demnach stellen z.B. die Masse, die Zeit und die x -Koordinate nicht die Komponenten eines Vektors dar.

Kapitel 2

Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Bewegung. Dabei behandeln wir nur die Beschreibung der Bewegung und fragen zunächst nicht nach den Ursachen, d.h. nach den vorhandenen Kräften. Dies werden wir erst zu einem späteren Zeitpunkt im Rahmen der Dynamik diskutieren, wo wir die Bewegung einer Punktmasse als Folge der auf sie einwirkenden Kräfte auffassen. Zunächst führen wir den Ortsvektor, den Geschwindigkeitsvektor, den Beschleunigungsvektor und die Bogenlänge einer Bahnkurve ein.

2.1 Bahnkurve

Die Kinematik eines Massenpunktes besteht darin, dessen Bewegung zu beschreiben. Seine Lage können wir nur durch die relative Position zu einem anderen Körper angeben. In der Regel dient als ein solcher Bezugskörper die Erde bzw. das Zimmer, in dem wir uns befinden. Führen wir ein dreidimensionales Koordinatensystem ein, so können wir die momentane Lage des Körpers zum Zeitpunkt t durch die Angabe dreier kartesischer Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ mit Hilfe eines zeitabhängigen Ortsvektors

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad (2.1)$$

beschreiben. Dies bedeutet entsprechend von Abb. 2.1, dass der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ des betrachteten Massenpunktes zu jedem Zeitpunkt t durch die Summe der Projektionen auf die jeweiligen Koordinatenachsen $x(t)\vec{e}_x$, $y(t)\vec{e}_y$ und $z(t)\vec{e}_z$ dargestellt werden kann. Hierbei ist zu beachten, dass die kartesischen Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y , und \vec{e}_z zeitunabhängig sind:

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Der Kürze halber können wir die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ auch zusammenfassen und den Ortsvektor (2.1) verkürzt darstellen als:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

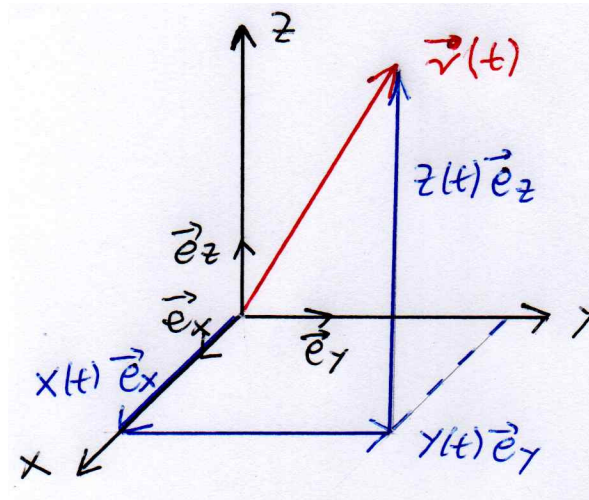


Abbildung 2.1: Darstellung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ zum Zeitpunkt t durch die kartesischen Koordinaten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ gemäß (2.1).

Wir bilden nun die zeitliche Ableitung des Ortsvektors $\vec{r}(t)$ und erhalten den Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

Hierbei stammt die Abkürzung v für die Geschwindigkeit vom Englischen *velocity*. Aufgrund von (2.1) und (2.2) ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor zu

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z, \quad (2.5)$$

wobei der jeweilige Punkt eine Abkürzung für die Zeitableitung darstellt:

$$\cdot = \frac{d}{dt}. \quad (2.6)$$

Demnach bedeutet (2.5), dass die zeitliche Ableitung des Ortsvektors (2.3) gemäß (2.4) so durchgeführt wird, dass jede einzelne Komponente differenziert wird. Deshalb lauten die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Wie lassen sich nun Richtung und Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ physikalisch interpretieren? Aus der Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten folgt unmittelbar, dass die Geschwindigkeit in Richtung der Bahntangenten weist, siehe Abb. 2.2

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (2.8)$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors gibt die momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes an:

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}. \quad (2.9)$$

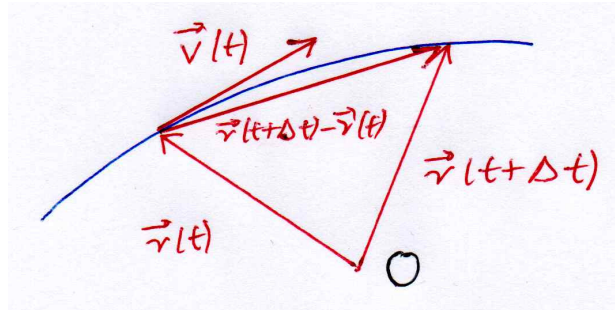


Abbildung 2.2: Der Geschwindigkeitsvektor (2.4) als Grenzwert von Differenzenquotienten (2.8) zeigt tangential zur Bahnkurve.

Die zeitliche Ableitung des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t)$ führt entsprechend nach Gleichung (2.4) auf den Beschleunigungsvektor

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}. \quad (2.10)$$

Hierbei stammt die Abkürzung a für die Beschleunigung vom Englischen *acceleration*. Die einzelnen Komponenten von (2.10) lauten mit Gleichung (2.7):

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Höhere zeitliche Ableitungen des Ortsvektors spielen in der Mechanik eine untergeordnete Rolle.

Wir bemerken, dass man statt der Zeit t auch einen anderen Parameter zur Charakterisierung einer Bahnkurve verwenden kann. Hierzu ist beispielsweise die Bogenlänge s gebräuchlich, die die Länge der Bahnkurve angibt, die entlang der gekrümmten Bahn von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkt aus gemessen wird. Aus der Definition des Geschwindigkeitsvektors (2.4) folgt für eine infinitesimale Veränderung des Ortsvektors

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \quad (2.12)$$

und dessen Betrag wird als infinitesimale Veränderung der Bogenlänge s definiert. Mit Gleichung (2.9) und (2.12) ergibt sich somit:

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{v}(t)| dt = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt. \quad (2.13)$$

Integriert man diese Beziehung von einem Anfangspunkt t_0 bis zur Zeit t , so ergibt sich die Bogenlänge s als Funktion der Zeit t :

$$s(t) = \int_0^{s(t)} ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t') + \dot{z}^2(t')} dt'. \quad (2.14)$$

Nehmen wir an, dass sich die resultierende Beziehung

$$s = s(t). \quad (2.15)$$

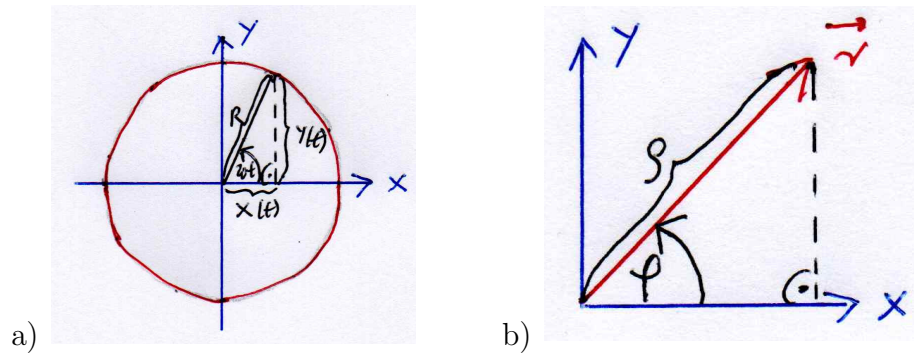


Abbildung 2.3: a) Beschreibung einer Kreisbewegung durch kartesische Koordinaten gemäß (2.20). b) Ebene Polarkoordinaten gemäß (2.22) und (2.23).

eindeutig invertieren lässt als

$$t = t(s) . \quad (2.16)$$

Dann können wir den Ortsvektor \vec{r} über eine Verkettung der beiden Funktionen $\vec{r}(t)$ und (2.16) auch als Funktion der Bogenlänge s angeben:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)) . \quad (2.17)$$

Und umgekehrt kann man die ursprüngliche Funktion $\vec{r}(t)$ aus der Verkettung von $\vec{r}(s)$ und (2.15) auch wieder zurückgewinnen:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(s(t)) . \quad (2.18)$$

2.2 Ebene Polarkoordinaten

Bisher haben wir zur Beschreibung eines Vektors kartesische Koordinaten verwendet. Auch wenn dies zunächst als eine natürliche Beschreibung erscheint, so erweist sich dies in vielen Fällen als unhandlich. Statt kartesischer Koordinaten ist es häufig nützlicher, sogenannte krummlinige Koordinaten einzuführen. Da bei einem solchen Wechsel der Koordinaten die Zahl der Freiheitsgrade erhalten bleibt, benötigt man in einem D -dimensionalen Raum mit D kartesischen Koordinaten entsprechend D krummlinige Koordinaten. Wir erläutern dieses grundlegende Konzept krummliniger Koordinaten zunächst am Beispiel einer Ebene, die $D = 2$ Freiheitsgrade besitzt. Anstelle der beiden kartesischen Koordinaten x, y lassen sich auch zwei ebene Polarkoordinaten verwenden.

2.2.1 Kreisbewegung

Hierzu betrachten wir die Bewegung auf einer Kreisbahn in der xy -Ebene. Einerseits lässt sie sich beschreiben durch

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \quad (2.19)$$

mit den zeitabhängigen kartesischen Koordinaten, siehe Abb. 2.3a):

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\omega t), \\y(t) &= R \sin(\omega t).\end{aligned}\tag{2.20}$$

Hierbei bezeichnet R den Radius des Kreises und ω stellt die Winkelgeschwindigkeit dar, wobei letztere gemäß $\omega = 2\pi/T$ mit der Periodendauer T der Kreisbewegung verknüpft ist. Aufgrund des trigonometrischen Pythagoras (1.41), siehe Abb. 1.6, gilt für die kartesischen Koordinaten (2.20) offensichtlich

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2,\tag{2.21}$$

was dem Satz des Pythagoras entspricht, siehe Abb. 2.3a). Ein Punkt in der xy -Ebene kann aber anstelle von kartesischen Koordinaten x, y auch durch ebene Polarkoordinaten ρ, φ beschrieben werden, siehe Abb. 2.3b). Hierbei bezeichnet

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\tag{2.22}$$

den Abstand des Punktes vom Ursprung und

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}\tag{2.23}$$

den Winkel zur x -Achse. Während sich aus (2.22), (2.23) die ebenen Polarkoordinaten aus den kartesischen Koordinaten x, y ergeben, lassen sich umgekehrt die kartesischen Koordinaten aus den ebenen Polarkoordinaten wie folgt berechnen:

$$x = \rho \cos \varphi,\tag{2.24}$$

$$y = \rho \sin \varphi.\tag{2.25}$$

Beschreibt man nun die Bewegung eines Punktes in der xy -Ebene, so werden die ebenen Polarkoordinaten zeitabhängig und aus (2.19) und (2.24), (2.25) folgt dann der Ortsvektor

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \varphi(t) \\ \rho(t) \sin \varphi(t) \end{pmatrix}.\tag{2.26}$$

Beispielsweise lesen wir aus dem Vergleich von (2.20) und (2.24), (2.25) ab, wie die Kreisbewegung mit Hilfe von ebenen Polarkoordinaten beschrieben wird:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= R, \\ \varphi(t) &= \omega t.\end{aligned}\tag{2.27}$$

2.2.2 Basisvektoren

Wir berechnen nun den Geschwindigkeitsvektor einer Bahnbewegung mit Hilfe ebener Polarkoordinaten. Aus (2.4) und (2.26) erhalten wir

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t),\tag{2.28}$$

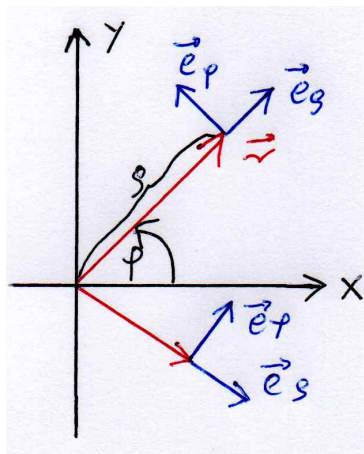


Abbildung 2.4: Basisvektoren (2.29) der ebenen Polarkoordinaten.

wobei wir als Abkürzung die Basisvektoren

$$\vec{e}_\rho(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

eingeführt haben. Offenbar handelt es sich bei (2.29) um Einheitsvektoren, es gilt also

$$\vec{e}_\rho(t) \cdot \vec{e}_\rho(t) = \vec{e}_\varphi(t) \cdot \vec{e}_\varphi(t) = 1. \quad (2.30)$$

Ferner zeigt $\vec{e}_\rho(t)$ vom Ursprung aus radial nach Außen und $\vec{e}_\varphi(t)$ steht dazu senkrecht, siehe Abb. 2.4:

$$\vec{e}_\rho(t) \cdot \vec{e}_\varphi(t) = 0. \quad (2.31)$$

Die zeitunabhängigen kartesischen Basisvektoren \vec{e}_x, \vec{e}_y werden demnach durch die zeitabhängigen Basisvektoren (2.29) der ebenen Polarkoordinaten ersetzt, die die Eigenschaft

$$\dot{\vec{e}}_\rho(t) = \dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi(t), \quad \dot{\vec{e}}_\varphi(t) = -\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\rho(t) \quad (2.32)$$

besitzen. So erhalten wir z.B. für den Ortsvektor (2.26)

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t). \quad (2.33)$$

Und durch dessen Zeitableitung folgt aufgrund von (2.32) unmittelbar der Geschwindigkeitsvektor (2.28). Dessen Komponenten

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = v_\rho(t)\vec{e}_\rho(t) + v_\varphi(t)\vec{e}_\varphi(t) \quad (2.34)$$

bezüglich der Basisvektoren (2.29) werden als radiale Geschwindigkeit

$$v_\rho(t) = \dot{\rho}(t) \quad (2.35)$$

und als azimuthale Geschwindigkeit

$$v_\varphi(t) = \rho(t)\dot{\varphi}(t) \quad (2.36)$$

bezeichnet, wobei $\dot{\varphi}(t)$ die Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t darstellt. Aufgrund der Orthonormalität (2.30), (2.31) der Basisvektoren $\vec{e}_\rho(t)$ und $\vec{e}_\varphi(t)$ lesen wir aus (2.34) ab, dass sich der Betrag des Geschwindigkeitsvektors in ebenen Polarkoordinaten aus der radialen Geschwindigkeit (2.35) und der azimuthalen Geschwindigkeit (2.36) entsprechend des Satzes von Pythagoras ergibt:

$$v(t) = \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = \sqrt{v_\rho^2(t) + v_\varphi^2(t)}. \quad (2.37)$$

Eine weitere Differentiation des Geschwindigkeitsvektors (2.28) führt auf den Beschleunigungsvektor (2.10) in ebenen Polarkoordinaten:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \dot{\rho}(t)\dot{\vec{e}}_\rho(t) + \left[\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) + \rho(t)\ddot{\varphi}(t) \right] \vec{e}_\varphi(t) + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\dot{\vec{e}}_\varphi(t). \quad (2.38)$$

Mit Hilfe von (2.32) reduziert sich (2.38) schließlich auf

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = a_\rho(t)\vec{e}_\rho(t) + a_\varphi(t)\vec{e}_\varphi(t), \quad (2.39)$$

wobei die Radialbeschleunigung

$$a_\rho(t) = \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\varphi}^2(t) \quad (2.40)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$a_\varphi(t) = \rho(t)\ddot{\varphi}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\varphi}(t) \quad (2.41)$$

auftreten. Analog zu (2.37) ist auch der Betrag des Beschleunigungsvektors in ebenen Polarkoordinaten durch den entsprechenden Satz von Pythagoras gegeben:

$$a(t) = \sqrt{\vec{a}(t) \cdot \vec{a}(t)} = \sqrt{a_\rho^2(t) + a_\varphi^2(t)}. \quad (2.42)$$

2.2.3 Partielle Ableitung

Um die Überlegungen zu ebenen Polarkoordinaten auf allgemeine krummlinige Koordinaten erweitern zu können, müssen wir verstehen, wie man den Ableitungsbegriff auf Funktionen ausdehnt, die von mehreren Variablen abhängen. Hierzu betrachten wir eine Funktion $f(x, y, z)$ der drei kartesischen Koordinaten x, y, z . Man definiert nun eine sogenannte partielle Ableitung nach der Koordinate x durch den Limes des entsprechenden Differenzenquotienten bei Änderungen nur dieser einen Variablen x , während die anderen beiden Variablen y und z konstant gehalten werden. Für die partielle Ableitung nach x bedeutet dies

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (2.43)$$

Ganz entsprechend definiert man auch die partiellen Ableitungen nach y und z :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}. \quad (2.45)$$

Manchmal ist es von Nutzen, explizit hervorzuheben, welche Variablen bei der partiellen Ableitung konstant gehalten werden. Daher verwendet man z.B. in der Thermodynamik die Notation

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \left. \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \right|_{y, z} . \quad (2.46)$$

da bei der Differentiation nach x die beiden anderen Variablen y, z konstant gehalten werden. Ferner sind in der gängigen Literatur die folgenden Kurzformen für die partielle Ableitung verbreitet:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f_x = f_{,x} . \quad (2.47)$$

Entsprechend lassen sich auch höhere partielle Ableitungen einführen. So kann beispielsweise die erste partielle Ableitung (2.43) ein weiteres Mal nach x oder nach y partiell differenziert werden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_x^2 f = f_{xx} = f_{,xx} , \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_y \partial_x f = f_{xy} = f_{,xy} . \quad (2.49)$$

Als Beispiel betrachten wir eine Funktion von zwei Variablen

$$f(x, y) = 4x^5 + 2x^2y + 9xy^3 , \quad (2.50)$$

die die ersten Ableitungen

$$f_x = 20x^4 + 4xy + 9y^3 , \quad f_y = 2x^2 + 27xy^2 \quad (2.51)$$

und die zweiten Ableitungen

$$f_{xx} = 80x^3 + 4y , \quad f_{xy} = 4x + 27y^2 , \quad f_{yx} = 4x + 27y^2 , \quad f_{yy} = 54xy \quad (2.52)$$

besitzt. Die Gleichheit $f_{xy} = f_{yx}$ in (2.52) ist kein Zufall, sondern stellt einen Spezialfall des Satzes von Schwarz dar. Falls die zweiten partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, dann sind die gemischten zweiten Ableitungen vertauschbar, es gilt also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} . \quad (2.53)$$

Wir betrachten nun die verkettete funktionale Abhängigkeit

$$f(t) = f(x(t), y(t), z(t)) . \quad (2.54)$$

Dann kann der entsprechende Differenzenquotient für die gewöhnliche Ableitung

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), z(t + \Delta t)) - f(t)}{\Delta t} \quad (2.55)$$

mit Hilfe der Differenzen

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t), \quad \Delta y = y(t + \Delta t) - y(t), \quad \Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) \quad (2.56)$$

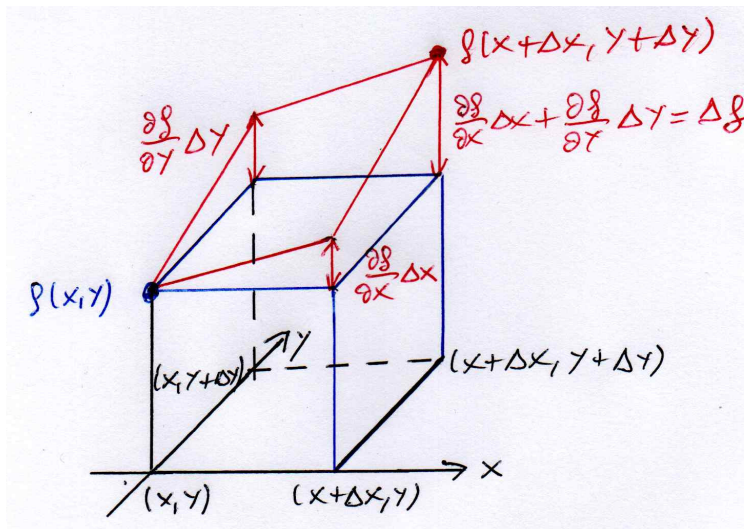


Abbildung 2.5: Graphische Darstellung des totalen Differentials df von f gemäß (2.59) in zwei Dimensionen.

wie folgt weiter ausgewertet werden:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right]. \quad (2.57)$$

Dabei impliziert der Limes $\Delta t \rightarrow 0$ aufgrund von (2.56) die Limes $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$. Somit folgt aus und (2.43) und (2.57) eine Verallgemeinerung der Kettenregel auf eine Funktion, die von mehreren Variablen abhängt:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.58)$$

Multipliziert man (2.58) formal mit dt , so erhält man ein analoges Resultat für das totale Differential df von f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (2.59)$$

Dies läßt sich entsprechend von Abb. 2.5 graphisch veranschaulichen.

Ausgestattet mit dem Wissen um die partielle Ableitung können wir nun wieder auf die Basisvektoren (2.29) der ebenen Polarkoordinaten zurückkommen und diese von einem anderen Blickwinkel beleuchten. Hierzu erinnern wir uns an die ursprüngliche Definition der ebenen Polarkoordinaten (2.24), (2.25) und erkennen, dass es sich um eine Verkettung funktionaler Abhängigkeiten handelt:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(\rho(t), \varphi(t)). \quad (2.60)$$

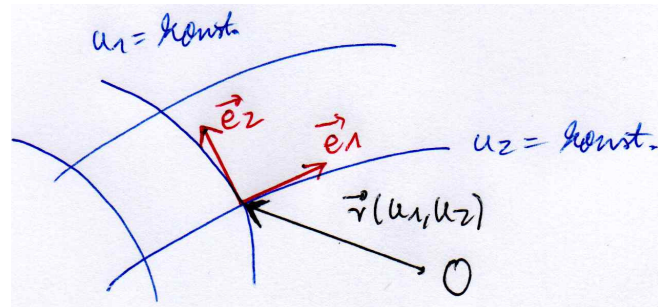


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung krummliniger Koordinaten und ihrer Einheitsvektoren in zwei Dimensionen.

Daher führt die zeitliche Differentiation des Ortsvektors (2.60) mit Hilfe der Kettenregel (2.58) auf den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \rho(t)} \dot{\rho}(t) + \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial \varphi(t)} \dot{\varphi}(t). \quad (2.61)$$

Dabei beschreiben die partiellen Ableitungen des Ortsvektors \vec{r} dessen Änderung, wenn man eine der beiden ebenen Polarkoordinaten ρ , φ verändert, während die andere konstant gehalten wird. Um das Zwischenergebnis (2.61) auf die Form (2.28) zu bringen, führen wir nun die normierten Basisvektoren

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|}, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} \quad (2.62)$$

ein. In der Tat reduziert sich (2.62) aufgrund von (2.24), (2.25) auf (2.29) und aus (2.61) folgt dann entsprechend (2.28).

2.3 Krummlinige Koordinaten

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, dass der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ im dreidimensionalen Raum von allgemeinen krummlinigen Koordinaten u_1 , u_2 , u_3 abhängt, siehe Abb. 2.6:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)). \quad (2.63)$$

Für den Geschwindigkeitsvektor (2.4) folgt dann mit Hilfe der Kettenregel der Differentiation:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial u_i(t)} \dot{u}_i(t). \quad (2.64)$$

Dies legt nahe, dass auch im allgemeinen Fall zeitabhängige Basisvektoren eingeführt werden können

$$\vec{e}_i(t) = \frac{\frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial u_i(t)}}{\left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial u_i(t)} \right|}, \quad (2.65)$$

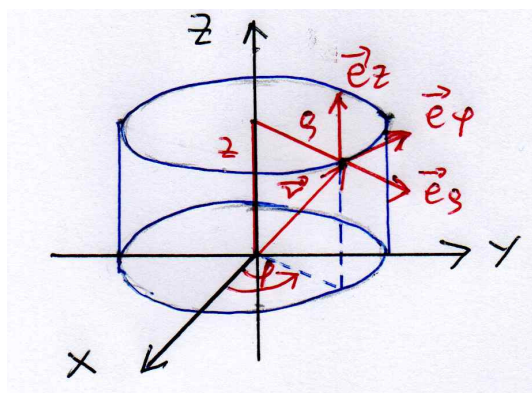


Abbildung 2.7: Zylinderkoordinaten (2.71) mit Einheitsvektoren (2.74).

die normiert sind:

$$\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_i(t) = 1. \quad (2.66)$$

Bei orthogonalen krummlinigen Koordinaten stehen die Basisvektoren (2.65) sogar senkrecht aufeinander:

$$\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t) = 0, \quad i \neq j. \quad (2.67)$$

Dann lassen sich Normierung (2.66) und Orthogonalität (2.67) kompakt zusammenfassen zu:

$$\vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t) = \delta_{ij}. \quad (2.68)$$

Und der Geschwindigkeitsvektor (2.64) läßt sich nach diesen Basisvektoren zerlegen

$$\dot{\vec{v}}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t) \vec{e}_i(t), \quad (2.69)$$

wobei die entsprechenden Komponenten

$$v_i(t) = \left| \frac{\partial \vec{r}(t)}{\partial u_i(t)} \right| \dot{u}_i(t) \quad (2.70)$$

auftreten.

2.3.1 Zylinderkoordinaten

Im Falle von Zylinderkoordinaten führt man für die x und y Koordinaten ebene Polarkoordinaten ρ und φ wie in (2.22), (2.23) bzw. (2.24), (2.25) ein, während die z Koordinate auch weiterhin verwendet wird, siehe Abb. 2.7:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

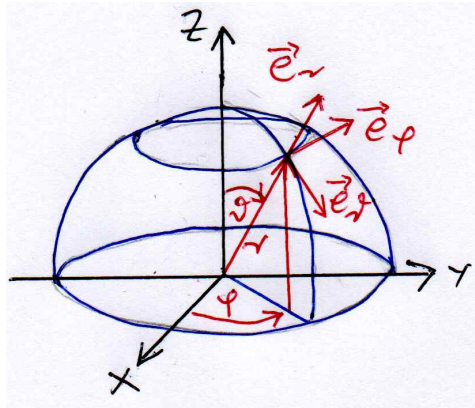


Abbildung 2.8: Kugelkoordinaten (2.75) mit Einheitsvektoren.

Somit erhalten wir für die einzelnen partielle Ableitungen des Ortsvektors (2.71 nach den Zylinderkoordinaten ρ , φ , z)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho \sin \varphi \\ \rho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

so dass die entsprechenden Beträge gegeben sind durch

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = 1. \quad (2.73)$$

Die Basisvektoren (2.65) lauten demnach in Zylinderkoordinaten

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.74)$$

und sind in Abb. 2.7 skizziert. Es handelt sich bei Zylinderkoordinaten in der Tat um ortho-normale krummlinige Koordinaten, da die Basisvektoren (2.73) die Eigenschaft (2.68) besitzen.

2.3.2 Kugelkoordinaten

Eine andere Möglichkeit, den Ortsvektor \vec{r} zu charakterisieren, bieten die Kugelkoordinaten, die auch als räumliche bzw. spärische Polarkoordinaten bezeichnet werden. Hierbei wird ein Punkt im dreidimensionalen Raum durch seinen Abstand r vom Ursprung und die beiden Winkel ϑ , φ angegeben, siehe Abb. 2.8.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Der Abstand r vom Ursprung ist durch den räumlichen Pythagoras von den kartesischen Koordinaten x, y, z bestimmt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.76)$$

Ferner bezeichnet

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (2.77)$$

den Polarwinkel zwischen der z -Achse und dem Ortsvektor \vec{r} , der im Bogen- bzw. Gradmaß Werte zwischen 0 und π bzw. 0° und 180° annimmt. Demgegenüber steht

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.78)$$

für den Azimutalwinkel zwischen der x -Achse und der Projekt des Ortsvektors \vec{r} auf die xy -Ebene und variiert im Bogen- bzw. Gradmaß zwischen 0 und 2π bzw. 0° und 360° . Die einzelnen partielle Ableitungen des Ortsvektors (2.75 nach den Kugelkoordinaten r, ϑ, φ lauten

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Aufgrund der entsprechenden Beträge

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = 1, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = r, \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sin \vartheta \quad (2.80)$$

lauten die Basisvektoren (2.65) in Kugelkoordinaten, siehe Abb. 2.8:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Auch bei Kugelkoordinaten handelt sich um orthonormale krummlinige Koordinaten, da die Basisvektoren (2.81) die Eigenschaft (2.68) besitzen.

Kapitel 3

Dynamik

Die Dynamik ist die Lehre von den Kräften. Dabei wird untersucht, welchen Einfluß die Kräfte auf die Bewegung des Massepunktes ausüben. Im folgenden diskutieren wir zunächst die Grundgesetze der Dynamik, die im 1687 erschienenen Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie*) von Isaac Newton erstmalig formuliert wurden. Sie werden heutzutage als die vier Newtonschen Axiome bezeichnet. Anschließend diskutieren wir einige grundlegende Eigenschaften von Kräften. Hierzu führen wir die Arbeit als Kurvenintegral der Kraft ein und behandeln konservative Kraftfelder, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist. Anschließend erläutern wir die Erhaltungssätze der Energie, des Impulses und des Drehimpulses sowie den Flächensatz von Zentralkräften.

3.1 Erstes Axiom: Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn keine Kräfte von Außen auf ihn einwirken.

- Ob eine Bewegung gleichförmig verläuft oder nicht, hängt natürlich vom Bezugssystem ab. Die Gültigkeit des ersten Newtonschen Axioms ist in einem Inertialsystem gegeben. Man definiert also ein Inertialsystem als ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Massepunkt gleichförmig bewegt oder stillsteht.
- Gibt es ein solches Inertialsystem, so sind alle gleichförmig dazu bewegten Bezugssysteme ebenfalls Inertialsysteme. Dabei sind alle Inertialsysteme zur Beschreibung der Bewegung gleichberechtigt. Es ist nicht möglich, ein ausgezeichnetes, absolutes Inertialsystem festzulegen.
- Der Übergang zwischen zwei Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} bewegen, wird durch die Galilei-Transformation beschrieben:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t. \tag{3.1}$$

Dabei wird implizit angenommen, dass in beiden relativ zueinander gleichförmig bewegten Inertialsystemen dieselbe Zeit vorhanden ist:

$$t' = t. \quad (3.2)$$

Albert Einstein konnte im Rahmen seiner Speziellen Relativitätstheorie zeigen, dass (3.1) und (3.2) gelten, so lange die Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$ klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s ist.

- Ein rotierendes System stellt kein Inertialsystem dar. In ihm müssen Scheinkräfte eingeführt werden, um eine Bahnbewegung erklären zu können. Aber man kann beispielsweise ein mit der sich drehenden Erde verbundenes Bezugssystem für die meisten Versuche näherungsweise als Inertialsystem benutzen, da sich die Erde so langsam dreht.

3.2 Zweites Axiom: Grundgleichung der Dynamik

Die auf einen Körper wirkende Kraft \vec{F} ist proportional zu seiner Beschleunigung \vec{a} , die wiederum durch (2.10) definiert ist:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}. \quad (3.3)$$

Die dabei auftretende Proportionalitätskonstante m nennt man die Masse des Körpers.

- Verschwindet die äußere Kraft \vec{F} , so reduziert sich das zweite auf das erste Axiom.
- In der Mechanik kümmert man sich nicht um die Herkunft der Kräfte. Es kann sich hierbei um Gravitationskräfte, Reibungskräfte oder auch um elektrische bzw. magnetische Kräfte auf ruhende bzw. bewegte Ladungen handeln. In der Mechanik werden nur die Auswirkungen diese Kräfte untersucht.
- Bei der im Newtonschen Grundgesetz (3.3) auftretenden Masse m handelt es sich eigentlich um die träge Masse m_t . Sie stellt eine Eigenschaft des Massepunktes dar, sich einer Beschleunigung durch die Einwirkung einer Kraft zu widersetzen. Die träge Masse ist zu unterscheiden von der schweren Masse, mit der ein Körper auf der Erde die Anziehungskraft

$$\vec{F} = m_s \vec{g} \quad (3.4)$$

erfährt. Hierbei bezeichnet \vec{g} die Erdbeschleunigung, die den Wert $|\vec{g}| = 9,81$ m/s² besitzt. Experimentell stellt man mit hoher Genauigkeit fest, dass schwere und träge Masse übereinstimmen:

$$m_t = m_s. \quad (3.5)$$

Schon Galileo Galilei stellte aufgrund seiner Fallexperimente am Schiefen Turm in Pisa (3.5) in der Form fest, dass alle Körper gleich schnell fallen. Bei satellitengestützten Experimenten ist die Gültigkeit von (3.5) mit einer Genauigkeit von 10^{-18} überprüft worden.

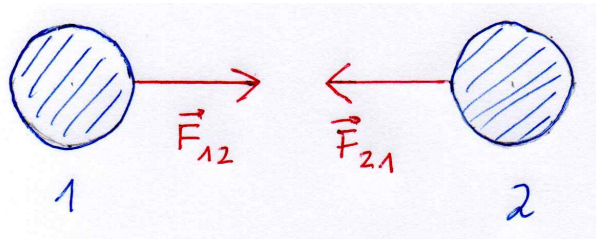


Abbildung 3.1: Graphische Illustration von “actio = - reactio” gemäß (3.8).

- Mit Hilfe des Newtonschen Grundgesetzes (3.3) kann man bei bekannter Kraft $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ die Bahnkurve ausrechnen, indem man die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\vec{r}(t)$ löst. Umgekehrt kann man aber auch aus einer bekannten Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit Hilfe des Newtonschen Grundgesetzes (3.3) die zugrunde liegende Kraft bestimmen.
- Da die Masse eines Massenpunktes in der Regel eine Konstante darstellt, kann man das Newtonsche Grundgesetz (3.3) mit Hilfe des Impulses

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (3.6)$$

auch auf die allgemeinere Form

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.7)$$

bringen. Es gibt einige mechanische Probleme, wie zum Beispiel den Flug einer Rakete oder das Herunterfallen eines Regentropfens, bei denen die Masse m des Körpers nicht zeitlich konstant ist. In diesen Fällen ist als Grundgesetz (3.7) und nicht (3.3) zu verwenden.

3.3 Drittes Axiom: Wechselwirkungsgesetz

Übt ein Körper 2 auf einen Körper 1 eine Kraft \vec{F}_{12} aus, so übt umgekehrt der Körper 1 auf den Körper 2 die Kraft $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ aus, siehe Abb. 3.1:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}. \quad (3.8)$$

Die zwischen zwei Körpern wirkenden Kräfte sind dem Betrage nach gleich groß, besitzen aber die entgegengesetzte Richtung. Ein typisches Beispiel für dieses Gesetz “actio = - reactio” ist die gravitative Anziehungskraft zwischen Sonne und Erde in der Mechanik oder die elektrische Anziehungs- bzw. Abstoßungskraft zwischen entgegengesetzten bzw. gleichen Ladungen in der Elektrostatik.

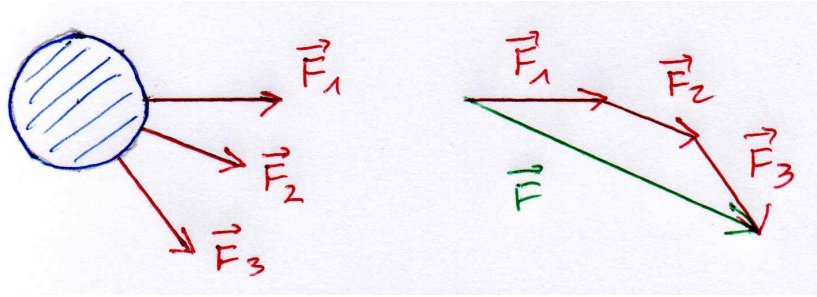


Abbildung 3.2: Graphische Illustration des Superpositionsprinzips der Kräfte (3.9).

3.4 Viertes Axiom: Superpositionsprinzip der Kräfte

Wenn auf einen Körper mehrere Kräfte einwirken, so addieren sich diese vektoriell zur Gesamtkraft:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (3.9)$$

Dieses Superpositionsgesetz wird in Abb. 3.2 anhand eines Beispiels illustriert. Es lässt sich aber auch in umgekehrter Richtung anwenden. Demnach kann eine Kraft \vec{F} , die auf einen Körper einwirkt, so in mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ aufgeteilt werden, dass die Zerlegung (3.9) gilt.

3.5 Arbeit als Kurvenintegral über Kraftfeld

Da Kräfte eine herausragende Bedeutung bei der Formulierung der vier Newtonschen Axiome haben, wollen wir nun deren Eigenschaften genauer untersuchen. Hierzu beschränken wir uns auf solche Kräfte

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \quad (3.10)$$

die zwar vom Ortsvektor \vec{r} aber nicht von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ oder von der Zeit t explizit abhängen. Es sei nun eine Kurve \mathcal{C} gegeben, die durch die Ortsvektoren $\vec{r}(t)$ und einen Bahnparameter t wie folgt beschrieben wird, siehe Abb. 3.3a):

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{r}(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2 \right\}. \quad (3.11)$$

Wenn sich ein Massenpunkt entlang dieser Kurve \mathcal{C} bewegt, dann verrichtet das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ an ihm eine Arbeit, die durch das folgende Kurvenintegral gegeben ist:

$$W_{12}(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.12)$$

Wir bemerken, dass im Integranden das Skalarprodukt zwischen dem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ und dem infinitesimalen Wegelement $d\vec{r}$ auftritt. Das bedeutet, dass nur die Projektion von $\vec{F}(\vec{r})$ auf den tangential zur Kurve \mathcal{C} gerichteten Vektor $d\vec{r}$ zur Arbeit beiträgt. Hierbei ist das Kurvenintegral

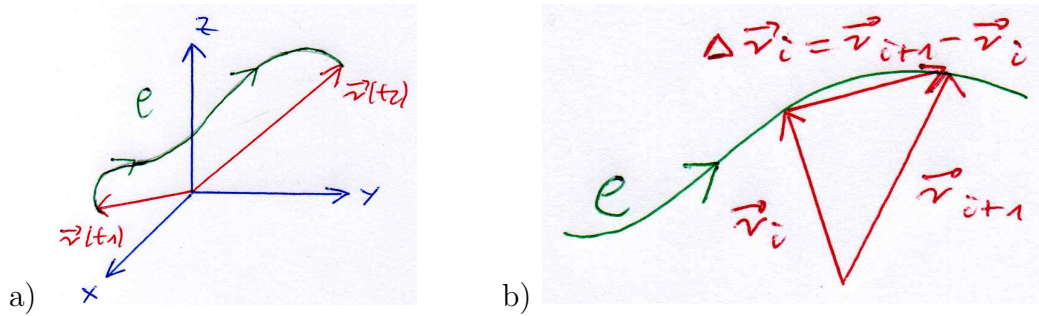


Abbildung 3.3: a) Parametrisierung einer Kurve \mathcal{C} gemäß (3.11); b) Zwei nah benachbarte Punkte auf der Kurve \mathcal{C} .

wie ein gewöhnlichen Integral als Grenzprozess einer Riemann-Summe aufzufassen, die durch eine immer feinere Diskretisierung entsteht:

$$W_{12}(\mathcal{C}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i. \quad (3.13)$$

Aufgrund der Parametrisierung (3.11) der Kurve \mathcal{C} ist bei der Diskretisierung die Differenz $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ zweier benachbarten Ortsvektoren $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ und $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}(t_{i+1})$ durch zwei nah beieinanderliegenden Zeitpunkten t_i und t_{i+1} gegeben, siehe Abb. 3.3b). Wählt man eine immer feinere Diskretisierung, so kann diese Ortsvektordifferenz $\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ mit Hilfe der lokalen Geschwindigkeit des Massenpunktes approximiert werden:

$$\Delta \vec{r}_i \approx \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t_i} \Delta t_i. \quad (3.14)$$

Die diskretisierte Definition der Arbeit (3.13) geht dann mit Hilfe von (3.14) über in

$$W_{12}(\mathcal{C}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t_i} \Delta t_i. \quad (3.15)$$

Im Grenzprozess einer unendlich feinen Diskretisierung reduziert sich das Kurvenintegral (3.12) auf ein gewöhnliches Integral bezüglich des Bahnparameters t :

$$W_{12}(\mathcal{C}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt. \quad (3.16)$$

Aus der Identität von (3.12) und (3.16) ergeben sich die beiden folgenden nützlichen Eigenschaften für das Kurvenintegral:

- Geht man von \mathcal{C} zu $-\mathcal{C}$ über, durchläuft man also die Kurve in der umgekehrten Richtung, so ist $d\vec{r}$ durch $-d\vec{r}$ zu ersetzen und es folgt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{-\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.17)$$

- Zerlegt man die Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ in zwei Teilkurven \mathcal{A} und \mathcal{B} , so ist das Kurvenintegral (3.12) additiv:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{A}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{B}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.18)$$

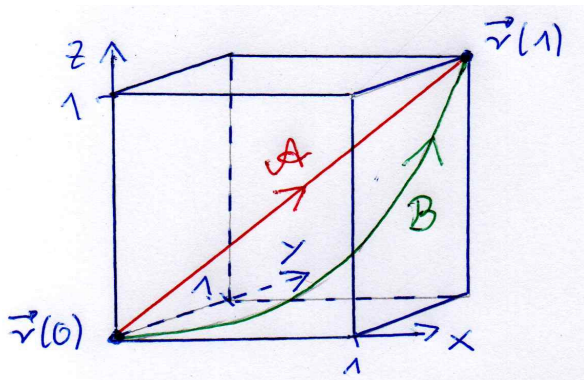


Abbildung 3.4: Die Wege \mathcal{A} und \mathcal{B} verbinden zwei raumdiagonal gegenüberliegende Eckpunkte des Einheitswürfels.

3.6 Beispiele

Um mit dem neuen Begriff des Kurvenintegrals vertrauter zu werden, betrachten wir einige Beispiele. Hierbei untersuchen wir exemplarisch, inwieweit die verrichtete Arbeit wegabhängig ist. Als Anfangs- und Endpunkt der Wege wählen wir zwei raumdiagonal gegenüberliegende Eckpunkte des Einheitswürfels, siehe Abb. 3.4:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Zwei Wege \mathcal{A} und \mathcal{B} , die diese beiden Punkte (3.19) miteinander verbinden, sind durch die folgenden Parametrisierungen gegeben, siehe Abb. 3.4:

$$\mathcal{A} = \left\{ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \middle| t_1 = 0 \leq t \leq t_2 = 1 \right\}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \middle| t_1 = 0 \leq t \leq t_2 = 1 \right\}. \quad (3.21)$$

Aufgrund der unterschiedlichen Parametrisierungen ergeben sich bei beiden Wegen unterschiedliche Geschwindigkeiten:

$$\mathcal{A}: \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_1 = 0 \leq t \leq t_2 = 1, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{B}: \quad \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad t_1 = 0 \leq t \leq t_2 = 1. \quad (3.23)$$

3.6.1 Erstes Kraftfeld

Wir betrachten zunächst das Kraftfeld

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 6y \\ -14yz \\ 20xz^2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Die entlang von \mathcal{A} verrichtete Arbeit lautet aufgrund von (3.12) und (3.16)

$$W_{12}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \vec{F}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt. \quad (3.25)$$

Einsetzen von (3.20) und (3.22) ergibt dann

$$\begin{aligned} W_{12}(\mathcal{A}) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^2 + 6t \\ -14t^2 \\ 20t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3) dt \\ &= \left[t^3 + 3t^2 - \frac{14}{3}t^3 + 5t^4 \right]_0^1 = \frac{13}{3}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Entsprechend berechnen wir auch die entlang von \mathcal{B} verrichtete Arbeit:

$$W_{12}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \vec{F}_1(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt. \quad (3.27)$$

Hier erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} W_{12}(\mathcal{B}) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 9t^2 \\ -14t^5 \\ 20t^7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9) dt \\ &= \left[3t^2 - 4t^7 + 6t^{10} \right]_0^1 = 5. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aus dem Vergleich von (3.26) und (3.28) lesen wir ab, dass die entlang des Kraftfeldes (3.24) verrichtete Arbeit im allgemeinen vom Weg abhängt.

3.6.2 Zweites Kraftfeld

Nun betrachten wir ein anderes Kraftfeld:

$$\vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 2xy + 2xz^2 \\ x^2 \\ 2x^2z \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Hier erhalten wir für die entlang \mathcal{A} verrichtete Arbeit

$$W_{12}(\mathcal{A}) = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t^2 + 2t^3 \\ t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (5t^2 + 4t^3) dt = \frac{8}{3}. \quad (3.30)$$

Entsprechend gilt für die entlang \mathcal{B} verrichtete Arbeit

$$W_{12}(\mathcal{B}) = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^2 + 2t^3 + 2t^7 \\ t^2 \\ 2t^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^2 + 4t^3 + 8t^7) dt = \frac{8}{3}. \quad (3.31)$$

Beim Kraftfeld (3.29) ergibt sich also, dass die entlang von \mathcal{A} und \mathcal{B} verrichteten Arbeiten identisch sind. Im folgenden zeigen wir, dass dies kein Zufall ist sondern dass diese Identität auf einer speziellen Eigenschaft des zweiten Kraftfeldes (3.29) beruht, die das erste Kraftfeld (3.24) nicht besitzt.

3.7 Kinetische Energie

Wir betrachten nun die Arbeit (3.16) für den Fall, dass die Kraft (3.10) gemäß dem Newtonschen Grundgesetz (3.3) die Bahnkurve \mathcal{C} verursacht. Einsetzen von (3.3) in (3.16) führt auf

$$W_{12}(\mathcal{C}) = m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\dot{\vec{r}}(t)}{dt} \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) \right\} dt. \quad (3.32)$$

Das Zeitintegral kann nun mit Hilfe der Stammfunktion ausgewertet werden und wir erhalten:

$$W_{12}(\mathcal{C}) = \left[\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t_2) - \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t_1). \quad (3.33)$$

Die entlang des Weges \mathcal{C} von 1 nach 2 geleistete Arbeit ist also gerade die Differenz der kinetischen Energie

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) \quad (3.34)$$

am Endpunkt \vec{r}_2 und am Anfangspunkt \vec{r}_1 .

Bisher wurde über die auf den Massenpunkt wirkende Kraft (3.10) nichts vorausgesetzt. Im allgemeinen hängt die Arbeit $W_{12}(\mathcal{C})$ vom Weg \mathcal{C} ab. Dies bedeutet, dass entlang zwei verschiedener Wege \mathcal{A} und \mathcal{B} , die vom Anfangspunkt \vec{r}_1 zum Endpunkt \vec{r}_2 führen, in der Regel eine unterschiedliche Arbeit verrichtet wird:

$$W_{12}(\mathcal{A}) \neq W_{12}(\mathcal{B}). \quad (3.35)$$

Dies wurde schon anhand des Kraftfelds (3.24) in Abschnitt 3.6.1 exemplarisch gezeigt. Andererseits hatten wir in Abschnitt 3.6.2 am Beispiele des Kraftfelds (3.29) gesehen, dass es auch Fälle gibt, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist. Es lohnt sich, diesen wichtigen Spezialfall genauer zu untersuchen.

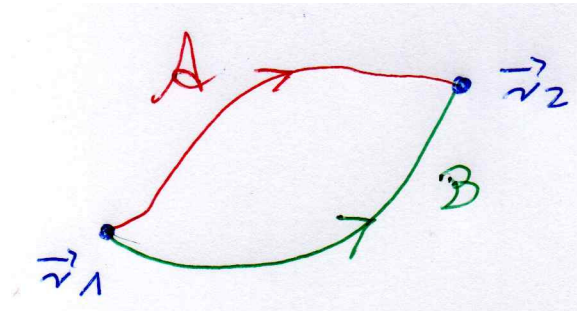


Abbildung 3.5: Illustration der Wegunabhängigkeit der Arbeit (3.36).

3.8 Konservatives Kraftfeld

Wir wollen nun speziell solche Kräfte (3.10) betrachten, bei denen die Arbeit wegunabhängig ist. Letzteres besagt, dass für zwei beliebige Wege \mathcal{A} und \mathcal{B} von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 gilt, siehe Abb. 3.5

$$\int_{\vec{r}_{1,\mathcal{A}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_{1,\mathcal{B}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (3.36)$$

Dann können wir aus (3.36) mit Hilfe von (3.17) folgern, dass

$$\int_{\vec{r}_{1,\mathcal{A}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_{1,\mathcal{B}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_{1,\mathcal{A}}}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2,-\mathcal{B}}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{0}. \quad (3.37)$$

Hierbei tritt aufgrund von (3.18) das Umlaufintegral der Kraft über eine beliebige geschlossene Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$ auf, das auch als Zirkulation bezeichnet wird. Und wir sehen, dass aus der Wegunabhängigkeit der Arbeit folgt, dass die Zirkulation der Kraft verschwindet. Kräfte (3.10), die der Bedingung (3.37) gehorchen, bezeichnet man als konservative Kräfte bzw. konservative Kraftfelder. Es soll nun sowohl ein notwendiges als auch ein hinreichendes Kriterium für die Wegunabhängigkeit der Arbeit angegeben werden. Hierzu ist es allerdings notwendig, einen neuen mathematischen Begriff einzuführen.

3.9 Gradient

Bei einer Funktion $f(x)$ von einer Variablen x ist deren totales Differential

$$df = \frac{df}{dx} dx \quad (3.38)$$

durch die erste totale Ableitung df/dx bestimmt, da sie ein Maß für die Änderung der Funktion $f(x)$ ist, wenn sich x auf $x + dx$ erhöht. Bei einer Funktion $f(x, y, z)$ von mehreren Variablen x, y, z dagegen ist das totale Differential durch (2.59) gegeben. Es hängt von den drei partiellen Ableitungen (2.43–(2.45) ab, die die jeweiligen Änderungen von $f(x, y, z)$ beschreiben, wenn x auf $x + dx$, y auf $y + dy$ und z auf $z + dz$ erhöht wird. Bei näherer Betrachtung des totalen

Differentials (2.59) fällt auf, dass es sich als Skalarprodukt zweier Vektoren darstellt:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}. \quad (3.39)$$

Hierbei bezeichnet $d\vec{r}$ den Vektor einer infinitesimalen Änderung des Ortsvektors

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

und der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist ein Differentialoperator, der die ersten partiellen Ableitungen nach den Koordinaten zu einem Vektor zusammenfasst:

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Die Anwendung des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ auf eine Funktion $f(x, y, z)$ wird auch als Gradient bezeichnet:

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f. \quad (3.42)$$

Wie bei gewöhnlichen Ableitungen gilt auch für den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ die Additivität

$$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g \quad (3.43)$$

und die Produktregel

$$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f. \quad (3.44)$$

Zur Vertiefung dieser Rechenregeln sollen nun zwei Beispiele betrachtet werden:

- Zunächst betrachten wir die Funktion

$$f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_x x + a_y y + a_z z. \quad (3.45)$$

Durch Anwendung von (3.41) auf (3.45) erhalten wir für den Gradienten

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = \vec{a}. \quad (3.46)$$

- Anschließend betrachten wir eine Funktion $f(\vec{r})$, die nur vom Betrag des Ortsvektors \vec{r} abhängt:

$$f(\vec{r}) = f(r), \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.47)$$

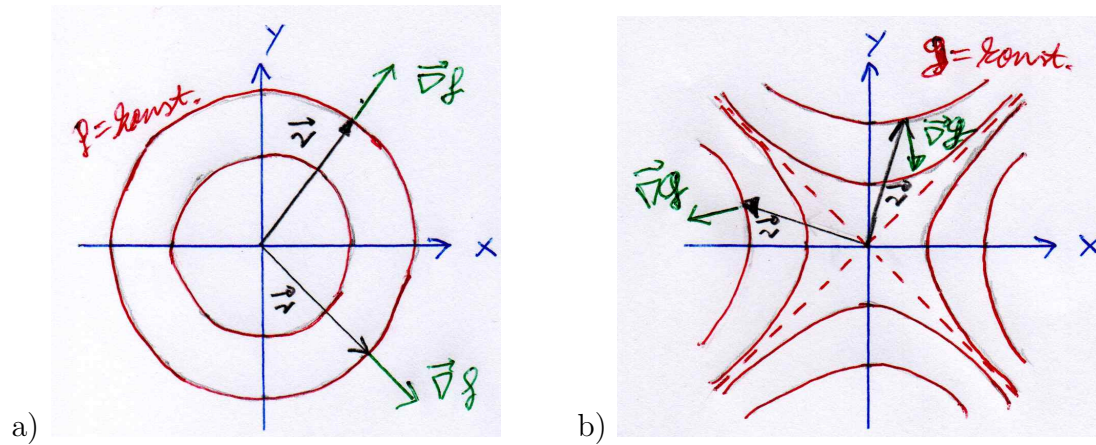


Abbildung 3.6: Graphische Illustration von (3.51) anhand der beiden Beispiele (3.52) und (3.53).

Hier führt die Kettenregel zunächst auf

$$\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} = \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}. \quad (3.48)$$

Aufgrund analoger Resultate für die partiellen Ableitungen nach y und z folgt hieraus der Gradient zu

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.49)$$

Wir bemerken ferner, dass der Gradient (3.42) senkrecht auf den Flächen $f(x, y, z) = \text{konst.}$ steht. Bilden wir nämlich das totale Differential von $f(x, y, z) = \text{konst.}$, so ist die linke Seite durch (3.39) gegeben und die rechte Seite verschwindet:

$$0 = df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}. \quad (3.50)$$

Demnach lesen wir aus (3.50) ab

$$\vec{\nabla} f \perp d\vec{r}, \quad (3.51)$$

wobei $d\vec{r}$ innerhalb der Fläche liegt, die durch $f(x, y, z) = \text{konst.}$ charakterisiert ist. Wir illustrieren das Ergebnis (3.51) durch zwei Beispiele:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), \quad \vec{\nabla} f(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2), \quad \vec{\nabla} g(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Hierbei stellen die Punkte eines konstanten Funktionswertes $f(x, y) = \text{konst.}$ Kreise dar, während $g(x, y) = \text{konst.}$ auf Hyperbeln führen. Die entsprechenden Gradienten stehen aufgrund von (3.51) immer senkrecht auf diesen Linien gleicher Funktionswerte, siehe Abb. 3.6.

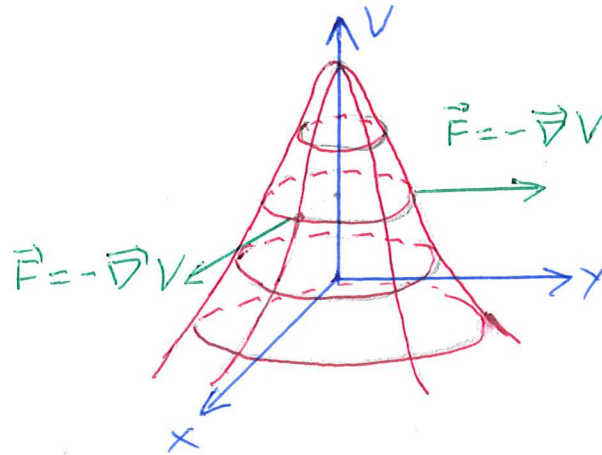


Abbildung 3.7: Kraftfeld (3.54) zeigt in Richtung des stärksten Potentialgefälles.

3.10 Kriterium für Wegunabhängigkeit

Wir zeigen nun, dass ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Wegunabhängigkeit der Arbeit darin besteht, dass sich das Kraftfeld (3.10) als Gradient eines Skalarfeldes, nämlich des Potentials $V(\vec{r})$, darstellen lässt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \text{grad } V(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}). \quad (3.54)$$

Hierbei wurde das Minuszeichen aus Konventionsgründen eingeführt. Veranschaulicht man sich das Potential als Gebirgslandschaft, so zeigt \vec{F} in Richtung des stärksten Potentialgefälles, siehe Abb. 3.7. Aufgrund der Definition des Nabla-Operators $\vec{\nabla}$ in (3.41) lautet (3.54) in Komponentenschreibweise

$$\begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \\ -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \\ -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

3.10.1 Hinreichendes Kriterium

Zunächst zeigen wir, dass das Kriterium hinreichend ist, d.h. aus (3.54) folgt (3.37). Für das Umlaufintegral einer Kraft (3.54) erhalten wir:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \oint \text{grad } V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \oint dV(\vec{r}) = 0. \quad (3.56)$$

Es gilt nämlich für das Kurvenintegral des Gradientenfeldes

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} dV = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1), \quad (3.57)$$

so dass aus $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$ unmittelbar (3.56) folgt. Hierbei haben wir in (3.57) im ersten Schritt die Definition des Gradienten (3.41) verwendet und im zweiten Schritt den Zusammenhang zwischen dem totalen Differential eines Skalarfeldes und seinen ersten partiellen Ableitungen gemäß (2.59) berücksichtigt. Ferner lesen wir aus (3.57) das nützliche Ergebnis ab, dass die Arbeit eines Kraftfeldes (3.10) mit der Eigenschaft (3.54) gegeben ist durch

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -[V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1)]. \quad (3.58)$$

Es hängt also nur von der Differenz der Potentialwerte am Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab und ist von der konkreten Kurve zwischen Anfangs- und Endpunkt unabhängig.

3.10.2 Notwendiges Kriterium

Nun zeigen wir, dass das Kriterium auch notwendig ist, d.h. aus (3.37) folgt (3.54). Hierzu definieren wir für das gegebene Kraftfeld (3.10) das Skalarfeld

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (3.59)$$

Da die Arbeit des Kraftfeldes wegunabhängig ist, hängt das Skalarfeld nur von einem beliebig gewählten Anfangspunkt \vec{r}_0 und vom Endpunkt \vec{r} , nicht aber vom gewählten Weg zwischen \vec{r}_0 und \vec{r} ab. Wir berechnen die partielle Ableitung des Skalarfeldes (3.59) nach x :

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r} + \epsilon \vec{e}_x} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right\}. \quad (3.60)$$

Mit Hilfe von (3.17) und (3.18) vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + \epsilon \vec{e}_x} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'. \quad (3.61)$$

Zur weiteren Auswertung von (3.61) erinnern wir an den Mittelwertsatz der Integralrechnung an. Er besagt, dass das Integral einer stetigen Funktion $f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ gegeben ist durch

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a), \quad \xi \in [a, b]. \quad (3.62)$$

Dies lässt sich entsprechend Abb. 3.8 geometrisch veranschaulichen. Die Fläche unterhalb der Kurve $f(x)$ zwischen a und b stimmt nämlich mit dem Inhalt eines Rechtecks überein, dessen Breite durch $b - a$ und dessen Höhe durch den Funktionswert $f(\xi)$ gegeben ist, wobei der Punkt ξ zwischen a und b liegt. Erweitert man den Mittelwertsatz der Integralrechnung (3.62) auf das Kurvenintegral (3.61), so führt dies zu:

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = - \lim_{\epsilon \downarrow 0} \vec{e}_x \cdot \vec{F}(\vec{r} + \xi \epsilon \vec{e}_x), \quad \xi \in [0, 1]. \quad (3.63)$$

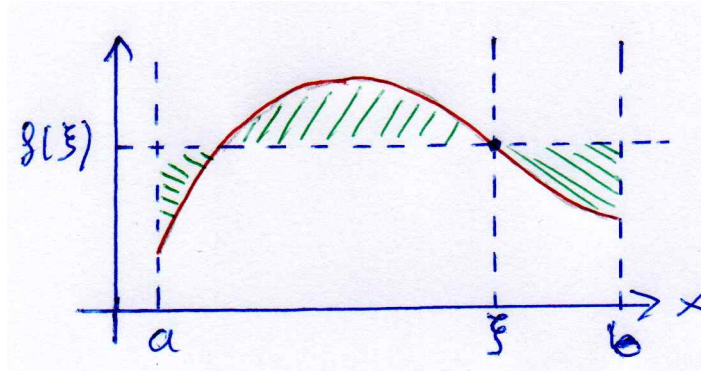


Abbildung 3.8: Zur geometrischen Deutung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (3.62).

Wertet man nun den Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ aus, so geht (3.63) über in

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} = -F_x(\vec{r}). \quad (3.64)$$

Analog verfährt man mit den anderen partiellen Ableitungen nach y und z , so dass sich insgesamt (3.54) ergibt.

3.11 Rotation

Es stellt sich nun aber die Frage, wie man einem vorgegebenen Kraftfeld (3.10) ansieht, ob es gemäß (3.54) als Gradient eines Skalarfeldes geschrieben werden kann. Hierzu ist es offenbar nicht praktikabel nachzuprüfen, ob dessen Zirkulation, also dessen Kurvenintegral bezüglich einer geschlossenen Kurve, verschwindet, da dieser Nachweis gemäß (3.37) für jede geschlossene Kurve zu führen wäre. Stattdessen gehen wir davon aus, dass (3.54) gegeben ist und nehmen an, dass der Satz von Schwarz (2.53) für alle gemischten zweiten partiellen Ableitungen des Potentials V gilt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}. \quad (3.65)$$

Dann folgen nämlich notwendigerweise für die Komponenten F_x , F_y und F_z die differentiellen Identitäten

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}. \quad (3.66)$$

Sie lassen sich zu einer einzigen vektoriellen Bedingung zusammenfassen:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.67)$$

Hierbei ist die Rotation eines Vektorfeldes durch die Anwendung des Vektorproduktes vom Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ auf dieses Vektorfeld \vec{F} definiert:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}. \quad (3.68)$$

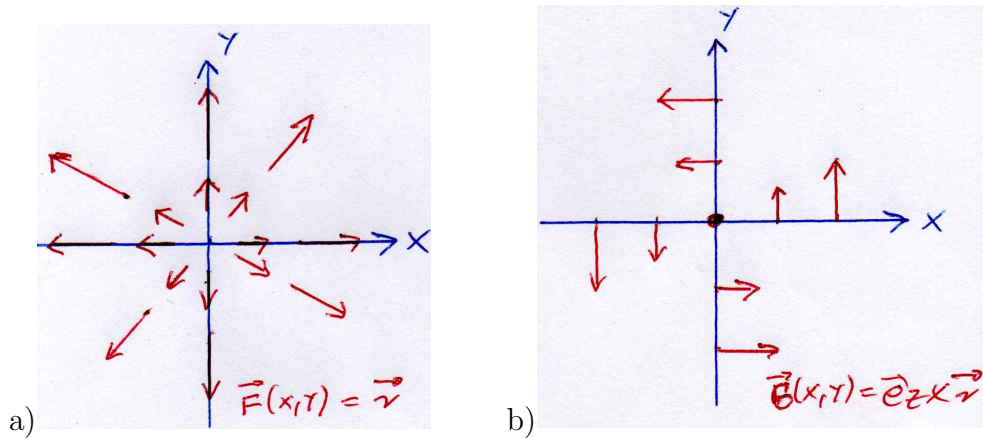


Abbildung 3.9: Graphische Darstellung der beiden Vektorfelder (3.71) und (3.72).

Aufgrund von (1.61) und (3.41) lässt sich die Rotation eines Vektorfeldes mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols darstellen:

$$\text{rot } \vec{F} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \vec{e}_k \epsilon_{ijk}. \quad (3.69)$$

Die einzelnen Komponenten der Rotation des Vektorfeldes (3.69) lauten dann gemäß (1.63) und (1.64)

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.70)$$

Man bezeichnet die Rotation auch als Wirbelstärke. Um diese Begriffsbildung anschaulich zu motivieren, betrachten wir die beiden folgenden Beispiele:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \vec{F}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}, \quad (3.71)$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = \vec{e}_z \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \vec{G}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

In Abb. 3.9 sind die beiden Vektorfelder graphisch skizziert. Das Vektorfeld \vec{F} aus (3.71) zeigt radial nach Außen und besitzt keine Wirbel, so dass dessen Rotation verschwindet. Im Unterschied dazu zeigt das Vektorfeld \vec{G} aus (3.72) eine Verwirbelung und dessen Rotation ist von Null verschieden. Interessanterweise steht die Wirbelstärke $\text{rot } \vec{G}$ senkrecht auf der Ebene, in der sich die Wirbel des Vektorfeldes \vec{G} befinden. Für die Rotation gilt die Additivität

$$\text{rot } (\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot } \vec{F} + \text{rot } \vec{G} \quad (3.73)$$

und die Produktregel im folgenden Sinne

$$\operatorname{rot} (g\vec{F}) = g \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} g \times \vec{F}. \quad (3.74)$$

Hierbei lässt sich (3.74) beispielsweise mit Hilfe von (3.69) und der Produktregel der Differentiation wie folgt direkt herleiten:

$$\operatorname{rot} (g\vec{F}) \Big|_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (gF_k) = g\epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k + \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) F_k. \quad (3.75)$$

Und ferner gilt die differentielle Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{0}, \quad (3.76)$$

die wir uns schon zu Beginn dieses Abschnitts in (3.67) zu Nutze gemacht hatten.

3.12 Zurück zu den Beispielen

Nach diesen allgemeinen Überlegungen kehren wir nun zu den in Abschnitt 3.6 behandelten Beispielen zurück. Für das erste Kraftfeld (3.24) erhalten wir eine nichtverschwindende Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{F}_1(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2 + 6y & -14yz & 20xz^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 14y \\ -20z^2 \\ -6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \quad (3.77)$$

Das bedeutet, dass die Arbeit des ersten Kraftfeldes (3.24) wegababhängig ist, wie schon exemplarisch im Abschnitt 3.6.1 gezeigt wurde. Entsprechend ergibt sich für das zweite Kraftfeld (3.29), dass dessen Rotation verschwindet:

$$\operatorname{rot} \vec{F}_2(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2x^2 + 2xy + 2xz^2 & x^2 & 2x^2z \end{vmatrix} = \vec{0}. \quad (3.78)$$

Deshalb ist die Arbeit des zweiten Kraftfeldes (3.29) wegunabhängig, wie schon in Abschnitt 3.6.2 anhand eines Beispiels gezeigt wurde. Deshalb muss es ein Potential $V_2(\vec{r})$ geben, so dass $\vec{F}_2(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V_2(\vec{r})$ gilt. Diese vektorielle Identität führt mit (3.29) komponentenweise auf drei partielle Differentialgleichungen für das Potential $V_2(\vec{r})$:

$$-\frac{\partial V_2(x, y, z)}{\partial x} = 2x^2 + 2xy + 2xz^2, \quad (3.79)$$

$$-\frac{\partial V_2(x, y, z)}{\partial y} = x^2, \quad (3.80)$$

$$-\frac{\partial V_2(x, y, z)}{\partial z} = 2x^2z. \quad (3.81)$$

Deren iterative Integration kann man in einer unterschiedlichen Reihenfolge durchführen. Als Erstes wählen wir einen umständlichen Weg und integrieren (3.81) bezüglich z

$$V_2(x, y, z) = -x^2 z^2 + A(x, y), \quad (3.82)$$

wobei $A(x, y)$ eine Integrationskonstante darstellt. Einsetzen von (3.82) in (3.80) ergibt dann

$$-\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = x^2, \quad (3.83)$$

so dass eine Integration bezüglich y auf

$$A(x, y) = -x^2 y + B(x) \quad (3.84)$$

mit der Integrationskonstanten $B(x)$ führt. Und schließlich erhalten wir aus (3.79), (3.82) und (3.84)

$$-\frac{\partial B(x)}{\partial x} = 2x^2, \quad (3.85)$$

was auf die Lösung

$$B(x) = -\frac{2}{3} x^3 + C \quad (3.86)$$

mit der Integrationskonstanten C führt. Nach (3.82), (3.84) und (3.86) ist das gesuchte Potential gegeben durch

$$V_2(\vec{r}) = -\frac{2}{3} x^3 - x^2 y - x^2 z^2 + C. \quad (3.87)$$

Man hätte dieses Ergebnis aber auch auf schnellerem Wege erhalten können. Eine Integration von (3.79) bezüglich x führt nämlich direkt auf (3.87) und es stellt sich heraus, dass dann (3.87) auch automatisch (3.80) und (3.81) erfüllt. Aus den Werten des Potentials am Anfangs- und Endpunkt, also $V(\vec{r}_1) = C$ und $V(\vec{r}_2) = C - 8/3$ folgt ferner nach (3.58) tatsächlich das Ergebnis (3.30) bzw. (3.31) für die zwischen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 verrichtete Arbeit.

3.13 Energieerhaltungssatz

Aus den Beziehungen (3.33) und (3.34) folgt für konservative Kraftfelder (3.54) mit der Eigenschaft (3.58) der Energieerhaltungssatz

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2. \quad (3.88)$$

Er besagt, daß die Summe aus kinetischer und potentieller Energie während der Bewegung erhalten bleibt:

$$E = T + V = \text{konstant}. \quad (3.89)$$

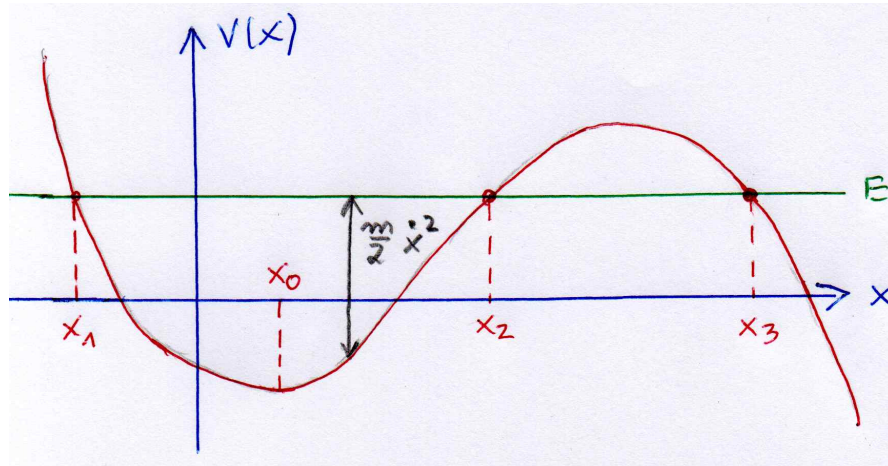


Abbildung 3.10: Der Graph von $V(x)$ erlaubt in Verbindung mit der erhaltenen Energie E eine qualitative Diskussion der Trajektorie.

Mit Hilfe von (3.34) und $V = V(\vec{r})$ nimmt der Erhaltungssatz (3.89) die folgende Form an:

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) + V(\vec{r}(t)). \quad (3.90)$$

Wir untersuchen die Bedeutung des Energieerhaltungssatzes in einer Dimension, wo (3.90) übergeht in:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + V(x(t)). \quad (3.91)$$

Hierzu lösen wir (3.91) nach $\dot{x} = dx/dt$ auf, und erhalten durch Separation der Variablen

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}. \quad (3.92)$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x')]}}. \quad (3.93)$$

Die beiden Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ legen dabei gemäß (3.91) die Energie fest:

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 + V(x_0). \quad (3.94)$$

Durch (3.93) wird die Funktion $t = t(x)$ festgelegt, deren Invertierung dann auf die gesuchte Trajektorie $x(t)$ führt. Das Integral in (3.93) kann nur in ganz wenigen Fällen, wie zum Beispiel dem harmonischen Oszillator analytisch gelöst werden.

Im allgemeinen Fall erlaubt die Energieerhaltung (3.91) zumindest, dass die Trajektorie anhand des Graphen von $V(x)$ qualitativ diskutiert wird, siehe Fig. 3.10. Der vertikale Abstand zwischen $V(x)$ und der Horizontalen E gibt die kinetische Energie $m\dot{x}^2/2$ des Teilchens an. Wählt man die Bewegungsrichtung, d.h. $\dot{x} > 0$ oder $\dot{x} < 0$ aus, so kann die Änderung von \dot{x}^2 aus der des

vertikalen Abstandes abgelesen werden. Nähert man sich einem Schnittpunkt von $V(x)$ mit der Horizontalen E , so geht $\dot{x} \rightarrow 0$. Diese Punkte werden Umkehrpunkte genannt, da sich dort die Bewegungsrichtung umkehrt. Verläuft die Bewegungsrichtung zwischen zwei Umkehrpunkten x_1 und x_2 , so ergibt sich eine Schwingungsdauer mit der Periode

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}}. \quad (3.95)$$

Der Bereich $x_2 < x < x_3$ ist dagegen unzugänglich, er ist für das Teilchen verboten. An den Stellen x_0 mit $V'(x_0) = 0$ liegt eine statische Lösung $x(t) = x_0$ vor, für die $\dot{x}(t) = 0$ gelten muß. Diese Gleichgewichtslösung ist bei einem Minimum des Potentials stabil, d.h. bei einer kleinen Auslenkung strebt das Teilchen wieder zurück in das Minimum. Bei einem Maximum dagegen ist die Gleichgewichtslösung labil, d.h. die kleinste Auslenkung führt dazu, dass sich das Teilchen vom Maximum entfernt.

3.14 Impuls- und Drehimpulserhaltung

Wirkt auf ein Teilchen keine äußere Kraft, so folgt aus der allgemeineren Form der Newtonschen Grundgleichung (3.7), dass sein Impuls (3.6) erhalten ist:

$$\vec{F} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \text{konstant}. \quad (3.96)$$

Ein weiterer Erhaltungssatz ergibt sich, wenn wir die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.3) für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes vektoriell mit $\vec{r}(t)$ von links multiplizieren:

$$m\vec{r}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t). \quad (3.97)$$

Wir definieren den Drehimpuls des Teilchens mit Hilfe von (3.6) durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (3.98)$$

und das auf das Teilchen wirkende Drehmoment durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.99)$$

Dabei ist zu beachten, dass sich beide Größen \vec{L} und \vec{M} auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems beziehen. Bei einer Verschiebung des Inertialsystems verändern sich demnach \vec{L} und \vec{M} , während aber \vec{p} und \vec{F} nicht verändert werden. Bilden wir die zeitliche Ableitung des Drehimpulses (3.98), so folgt unter Beachtung von (3.97) und (3.99)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}. \quad (3.100)$$

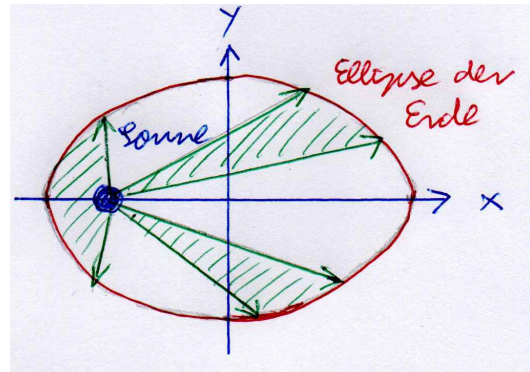


Abbildung 3.11: Bei der Gravitationskraft (3.103) zwischen Sonne und Erde bleibt der Drehimpulsvektor \vec{L} erhalten (Drehimpulserhaltungssatz), was zwei physikalische Konsequenzen hat: 1. Kepler-Gesetz: Die Bewegung der Erde um die Sonne erfolgt auf einer Ellipsenbahn in einer Ebene, die senkrecht auf \vec{L} steht. 2. Kepler-Gesetz: Pro Zeiteinheit überstreicht der Fahrstrahl die gleiche Fläche.

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist also gleich dem Drehmoment. Hieraus ergibt sich unmittelbar der Drehimpulserhaltungssatz. Wenn das Drehmoment verschwindet, dann folgt aus (3.100), dass der Drehimpuls erhalten ist:

$$\vec{M} = \vec{0} \quad \implies \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \implies \quad \vec{L} = \text{konstant} . \quad (3.101)$$

3.15 Zentralkräfte

Das Drehmoment \vec{M} verschwindet trivialerweise, wenn keine Kraft \vec{F} angreift. Für $\vec{F} \neq \vec{0}$ kann \vec{M} nur dann gleich Null sein, wenn \vec{F} parallel zu \vec{r} ist. Die Kraft muß also vom Zentrum des Bezugssystems aus radial nach Außen oder Innen zeigen, d.h. es muß sich um eine Zentralkraft handeln:

$$\vec{F} = \vec{r}f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) . \quad (3.102)$$

Nach (3.99) und (3.102) ist dann der Drehimpulserhaltungssatz (3.101) erfüllt. Da der Drehimpuls \vec{L} ein Vektor ist, hat dessen Erhaltung zwei physikalische Konsequenzen:

- Zunächst bleibt die Richtung von \vec{L} erhalten. Aufgrund der Definition des Drehimpulses in (3.98) schließen wir, daß sich \vec{r} und $\dot{\vec{r}}$ und damit die gesamte Bahnkurve in einer Ebene senkrecht zum Drehimpuls befindet. Damit ist der Drehimpulsvektor \vec{L} parallel zum Normalenvektor der Ebene, in der die Bewegung stattfindet. Beispielsweise handelt es sich bei der Newtonschen Gravitationskraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (3.103)$$

um eine solche Zentralkraft. Tatsächlich werden wir später noch sehen, dass sich die Erde in einer Ebene auf einer Ellipse bewegt, wobei sich die Sonne in einem ihrer beiden Brennpunkte befindet. Dieses sogenannte 1. Keplersche Gesetz ist in Abb. 3.11 veranschaulicht.

- Wir betrachten die Fläche dF , die der Fahrstrahl pro Zeit überstreicht:

$$dF = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|. \quad (3.104)$$

Der Vergleich von (3.98) und (3.104) führt auf

$$|\vec{L}| = 2m \left| \frac{dF}{dt} \right|. \quad (3.105)$$

Aus der Erhaltung des Drehimpulsvektors folgt, dass auch dessen Betrag $|\vec{L}|$ erhalten bleibt und damit der Fahrstrahl in gleichen Zeiten die gleiche Fläche überstreicht. Dieser Flächensatz ist auch als 2. Keplersches Gesetz bekannt, siehe Abb. 3.11.

Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Das Verständnis von harmonischen Schwingungen ist von grundlegender Bedeutung für die Physik im allgemeinen und die Mechanik im besonderen. Für deren Beschreibung ist es hilfreich, den Zahlenkörper der reellen Zahlen \mathbb{R} zu dem der komplexen Zahlen \mathbb{C} zu erweitern, da sich damit komplizierte Rechnungen häufig vereinfachen lassen. Wie in Abb. 4.1 schematisch dargestellt ist, sind Umformungen einer Aussage A in eine Aussage B mit Hilfe von reellen Zahlen, die die reale Welt beschreiben, unter Umständen aufwendig. In vielen Fällen bietet es sich an, die Aussage A von den reellen Zahlen in die komplexen Zahlen zu übersetzen, da dann eine effiziente Rechnung mit komplexen Zahlen möglich ist, dessen Ergebnis die gewünschte Aussage B in reellen Zahlen beinhaltet. Abgesehen von diesem konkreten praktischen Nutzen, dass sich harmonische Schwingungen mit komplexen Zahlen leichter beschreiben lassen, gibt es darüber hinaus noch eine grundlegende mathematische Motivation, sich mit komplexen Zahlen zu befassen. Es stellt sich nämlich heraus, dass die Erweiterung des reellen Zahlenkörpers \mathbb{R} zu dem der komplexen Zahlen \mathbb{C} erforderlich ist, um alle quadratischen Gleichungen analytisch lösen zu können.

4.1 Definition komplexer Zahlen

Die Einführung komplexer Zahlen lässt sich durch die Beobachtung motivieren, dass manche quadratischen Gleichungen keine reellen Lösungen besitzen. Wir betrachten als Beispiel die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \quad (4.1)$$

die auf folgende Lösung führt:

$$x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3\sqrt{-1}. \quad (4.2)$$

Die beiden Ausdrücke (4.2) sind offenbar keine reellen Zahlen, sie werden aber trotzdem als gewisse mathematische Objekte akzeptiert. Hierzu kürzt man $\sqrt{-1}$ durch die imaginäre Einheit

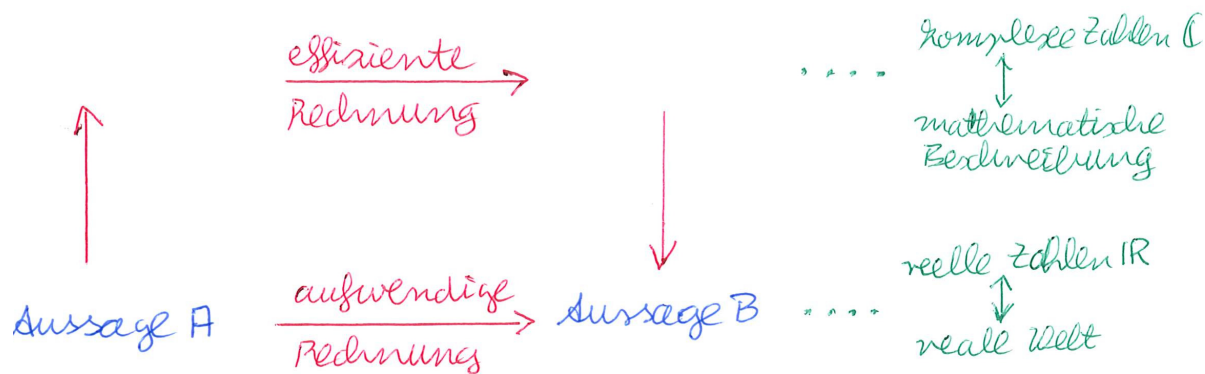


Abbildung 4.1: Motivation komplexer Zahlen.

i ab und betrachtet die Menge \mathbb{C} aller Ausdrücke der Form

$$z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Diese Ausdrücke bilden komplexen Zahlen, wobei man noch verabredet, dass

$$i^2 = -1 \quad (4.4)$$

gilt. Man bezeichnet $x = \operatorname{Re}(z)$ als Realteil von z und $y = \operatorname{Im}(z)$ als Imaginärteil von z . Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und in Imaginärteil übereinstimmen:

$$z_1 = z_2 \quad \iff \quad x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2. \quad (4.5)$$

Eine komplexe Gleichung umfasst damit zwei reelle Gleichungen. Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird als ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt, siehe Abb. 4.2. Dabei bezeichnet man die x -Achse als reelle Achse und die y -Achse als imaginäre Achse. Den Abstand von z vom Ursprung bezeichnet man als Betrag $|z|$ von z . Offenbar gilt aufgrund des Satzes von Pythagoras

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.6)$$

Beispielsweise erhalten wir für $z = 2 + i$ den Betrag $|z| = \sqrt{5}$.

4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir zeigen nun, wie man die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf komplexe Zahlen anwendet.

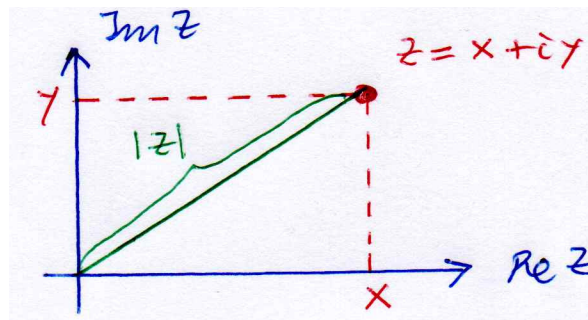


Abbildung 4.2: Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit dem Realteil x und dem Imaginärteil y in der Gaußschen Zahlenebene sowie deren Betrag (4.6).

4.2.1 Addition und Subtraktion

Es seien $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ zwei komplexe Zahlen. Aus den Gesetzen der Arithmetik folgt dann

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (4.7)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (4.8)$$

Hierbei haben wir das Assoziativgesetz der Addition verwendet, wonach man die Klammern beliebig setzen darf. Beispielsweise erhalten wir für $z_1 = 2 + i$ und $z_2 = 1 + 3i$:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i, \quad z_1 - z_2 = (2 + i) - (1 + 3i) = 1 - 2i. \quad (4.9)$$

Die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene dadurch veranschaulichen, dass sie sich wie zweikomponentige Vektoren komponentenweise addieren bzw. subtrahieren, siehe Abb. 4.3.

4.2.2 Multiplikation

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ lassen sich auch multiplizieren, wenn man das Distributivgesetz und die Verabredung (4.4) beachtet:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (1 + 3i) = 2 + i + 6i + 3i^2 = -1 + 7i. \quad (4.11)$$

Wir berechnen noch das Betragsquadrat von (4.10)

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2, \quad (4.12)$$

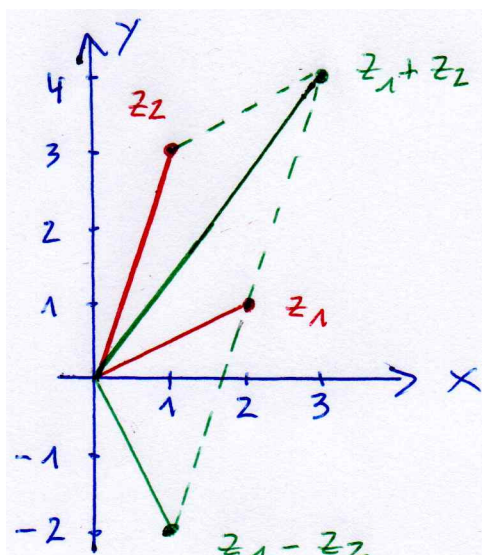


Abbildung 4.3: Graphische Darstellung der Addition und der Subtraktion zweier komplexer Zahlen am Beispiel (4.9).

was sich schließlich reduziert auf

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2). \quad (4.13)$$

Dieses Ergebnis lässt sich gemäß (4.11) folgendermaßen zusammenfassen:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (4.14)$$

Für unser Zahlenbeispiel heißt dies:

$$|(2 + i) \cdot (1 + 3i)| = |2 + i| |1 + 3i| = 5\sqrt{2}. \quad (4.15)$$

4.2.3 Konjugiert komplexe Zahl

Zu jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ lässt sich eine konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = x - iy \quad (4.16)$$

eingeführen. In der Gaußschen xy -Zahlebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abb. 4.4. Wir folgern hieraus:

a) Addition und Subtraktion von z und z^* führen auf den Real- und Imaginärteil:

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad (4.17)$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - z^*). \quad (4.18)$$

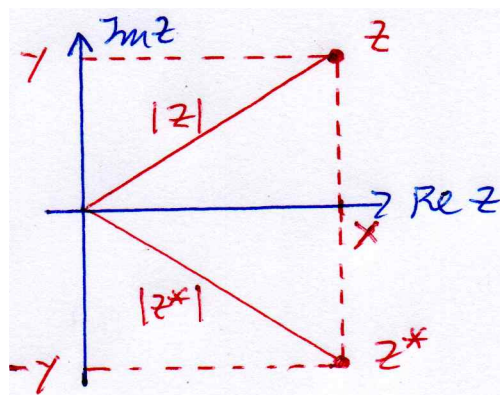


Abbildung 4.4: Graphische Darstellung einer zu $z = x+iy$ konjugiert komplexen Zahl $z^* = x-iy$ durch Spiegelung an der reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene.

Hierbei ist die Verabredung (4.4) zu beachten:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i. \quad (4.19)$$

b) Durch Multiplikation von z und z^* folgt der Betrag von z bzw. z^* :

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^*|^2. \quad (4.20)$$

c) Eine doppelte Konjugation ändert nichts:

$$(z^*)^* = [(x + iy)^*]^* = (x - iy)^* = x + iy = z. \quad (4.21)$$

4.2.4 Division

Wir berechnen den Quotienten z_1/z_2 zweier komplexer Zahlen z_1 und $z_2 \neq 0$, indem wir unter Verwendung von (4.20) mit z_2^* erweitern:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot z_2^*. \quad (4.22)$$

Nun ist der Nenner reell, so dass die komplexe Division auf eine komplexe Multiplikation zurückgeführt ist. Das Zahlenbeispiel lautet hier:

$$\frac{2+i}{1+3i} = \frac{(2+i) \cdot (1-3i)}{(1+3i) \cdot (1-3i)} = \frac{1}{10} (2+i-6i+3) = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} (1-i). \quad (4.23)$$

Für den Betrag von Gleichung (4.22) folgt mit Hilfe von (4.14):

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \cdot z_2^*| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad (4.24)$$

4.2.5 Folgerungen

Bei der komplexen Konjugation von zusammengesetzten Ausdrücken braucht man nur jede einzelne komplexe Zahl durch ihre konjugiert komplexe Zahl zu ersetzen:

- a) Mit Hilfe von (4.7) und (4.16) erhalten wir für die komplexe Konjugation bei der Addition zweier komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= [(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)]^* = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + iy_1)^* + (x_2 + iy_2)^* = z_1^* + z_2^*. \end{aligned} \quad (4.25)$$

- b) Ein entsprechendes Resultat erhalten wir mit Hilfe von (4.25) dann auch für die Subtraktion zweier komplexer Zahlen:

$$z_1^* = [(z_1 - z_2) + z_2]^* = (z_1 - z_2)^* + z_2^* \quad \implies \quad (z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*. \quad (4.26)$$

- c) Für die komplexe Konjugation eines Produktes zweier komplexer Zahlen gilt dann aufgrund von (4.10) und (4.16):

$$(z_1 \cdot z_2)^* = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_2y_1 + x_1y_2) = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = z_1^* \cdot z_2^*. \quad (4.27)$$

- d) Und für die komplexe Konjugation eines Quotienten zweier komplexer Zahlen folgt dann mit (4.16), (4.20)–(4.22) und (4.27):

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{1}{|z_2|^2} (z_1 \cdot z_2^*)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}. \quad (4.28)$$

Mit (4.20) und (4.27) lässt sich (4.10) auch direkt beweisen:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^* = (z_1 \cdot z_1^*) (z_2 \cdot z_2^*) = |z_1|^2 |z_2|^2. \quad (4.29)$$

Bevor wir mit der Diskussion weiterer Eigenschaften der komplexen Zahlen fortfahren können, müssen wir ein gängiges Approximationsverfahren für Funktionen einführen.

4.3 Taylor-Reihe

Sehr oft möchte man den Wert einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ in der Umgebung um x_0 gar nicht ganz genau wissen, sondern ist schon mit einer ungefähren Angaben zufrieden. Wenn die Funktion $y = f(x)$ am Punkt x_0 mehrfach stetig differenzierbar ist, dann kann man sie mit wenig Aufwand in der Umgebung um x_0 systematisch immer besser nähern. Hierzu bedient man sich der sogenannten Taylor-Reihe.

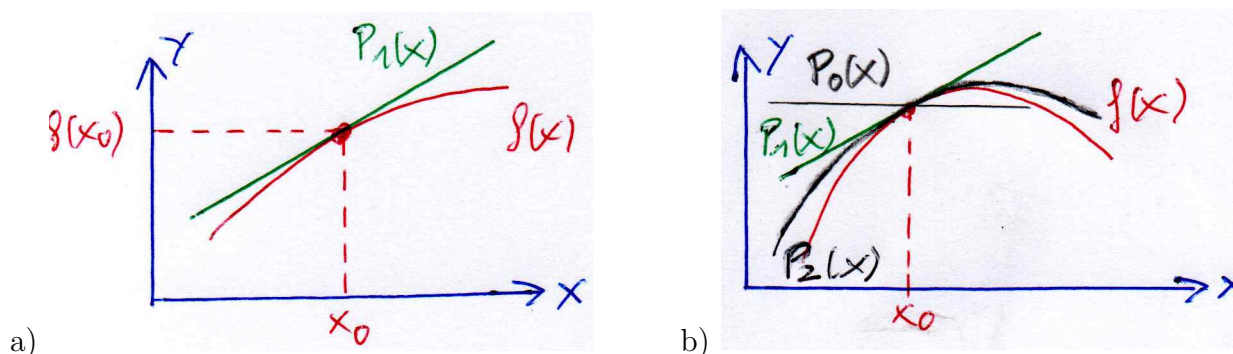


Abbildung 4.5: Approximation einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 durch a) eine Tangente (4.30) und b) verschiedene Polynome (4.31).

4.3.1 Tangente

Ist $f(x)$ stetig differenzierbar, so ist die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkte $(x_0, f(x_0))$ durch das folgende Polynom erster Ordnung gegeben:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.30)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Approximation der Funktion f in der unmittelbaren Umgebung um x_0 , siehe Abb. 4.5a). Im folgenden zeigen wir, wie man durch Hinzunahme weiterer Ableitungen von f an der Stelle x_0 die Funktion f noch besser in der Umgebung um x_0 annähern kann.

4.3.2 Herleitung

Es sei $f(x)$ nun n -fach stetig differenzierbar, d.h. dass auch noch die n -te Ableitung stetig ist. Wir nähern dann f durch ein Polynom n -ter Ordnung an:

$$f(x) \approx P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (4.31)$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Wir berechnen die jeweiligen Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ f''(x) &\approx P''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &\approx P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2a_n. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dabei fordern wir, dass das Polynom $P_n(x)$ die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ bestmöglich annähert. Daher werten wir nun (4.31) und (4.32) an der Stelle $x = x_0$ aus:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &\approx P_n(x_0) = a_0, \\
f'(x_0) &\approx P'_n(x_0) = a_1, \\
f''(x_0) &\approx P''_n(x_0) = 2a_2, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x_0) &\approx P_n^{(n)}(x_0) = n! a_n.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Hierbei haben wir die Fakultät einer natürlichen Zahl als Produkt aller natürlichen Zahlen kleiner und gleich dieser Zahl eingeführt:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^n k. \tag{4.34}$$

Da in der Mathematik dem leeren Produkt, also dem Sonderfall eines Produktes mit null Faktoren, der Wert Eins zugewiesen wird, gilt insbesondere

$$0! = \prod_{k=1}^0 k = 1. \tag{4.35}$$

Aus (4.31)–(4.33) folgt dann das gesuchte Polynom

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{4.36}$$

Je größer n wird, um so genauer approximiert das Polynom $P_n(x)$ die Funktion $f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$, siehe Abb. 4.5b). Bildet man den Limes $n \rightarrow \infty$, so folgt hieraus die Taylor-Reihe von f mit dem Entwicklungspunkt x_0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{4.37}$$

Beim Umgang mit Taylor-Reihen sind die beiden folgenden Punkte zu beachten:

- Die Taylor-Reihe konvergiert nicht immer. So besitzt die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \neq 1 \tag{4.38}$$

die geometrische Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \tag{4.39}$$

als Taylor-Reihe, falls $|x| < 1$ ist. Man spricht daher davon, dass die Taylor-Reihe (4.39) den Konvergenzradius 1 besitzt.

- Und falls die Taylor-Reihe von f konvergiert, dann konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f . Betrachten wir hierzu die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}; & x > 0 \end{cases}. \tag{4.40}$$

Als reelle Funktion ist (4.40) beliebig oft stetig differenzierbar, wobei die Funktion und alle Ableitungen im Punkt $x_0 = 0$ verschwinden. Die Taylor-Reihe um den Punkt $x_0 = 0$ ist also die Nullfunktion, die in keiner Umgebung um diesen Entwicklungspunkt mit der Funktion (4.40) übereinstimmt.

4.3.3 Beispiele

Für die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhalten wir die folgenden Werte für die einzelnen Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= e^x & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= e^x & f''(0) &= 1, \\ &\vdots & \vdots & \\ f^{(n)}(x) &= e^x & f^{(n)}(0) &= 1, \\ &\vdots & \vdots & \end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion lautet daher:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \tag{4.42}$$

Entsprechend lassen sich auch die Taylor-Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ herleiten:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots, \tag{4.43}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \dots \tag{4.44}$$

4.4 Euler-Formel

Die Euler-Formel ermöglicht es, mit Hilfe der Taylor-Reihe eine Verbindung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen im Rahmen der komplexen Zahlen herzustellen.

4.4.1 Herleitung über Taylor-Reihen

Wir untersuchen nun die analytische Fortsetzung der Taylor-Reihe der Exponentialfunktion (4.42):

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.45}$$

Aufgrund der Verabredung (4.4) betrachten wir die geraden und die ungeraden Reihenglieder separat:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.46)$$

Mit $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n i$ folgt:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (4.47)$$

Der Vergleich mit (4.43) und (4.44) zeigt, dass die geraden (ungerade) Reihenglieder auf die Taylor-Reihe des Kosinus (Sinus) und damit auf die Euler-Formel führen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (4.48)$$

4.4.2 Trigonometrische Additionstheoreme

Wir behandeln nun eine wichtige Anwendung der Euler-Formel. Aus (4.48) und dem Potenzgesetz

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \quad (4.49)$$

folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteile separat, so erhält man daraus die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (4.51)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (4.52)$$

Ohne Zuhilfenahme komplexer Zahlen erfordert der Beweis dieser trigonometrischen Additionstheoreme eine längere Rechnung anhand verschiedener rechtwinkliger Dreiecke am Einheitskreis [16]. Daher ist dieses Ergebnis ein eindrucksvolles Beispiel dafür, wie das Rechnen mit komplexen Zahlen eine aufwendige Rechnung mit reellen Zahlen vereinfacht, siehe Abb. 4.1.

4.5 Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen

Bisher haben wir komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene durch deren kartesische Koordinaten, also deren Real- und Imaginärteil, charakterisiert. Nun wollen wir die dazu äquivalente Polarkoordinaten-Darstellung einführen. Hierbei wird die Euler-Formel von grundlegender Bedeutung sein.

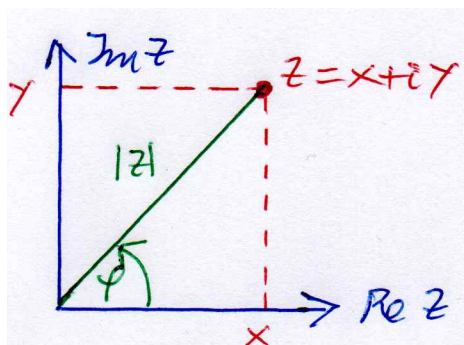


Abbildung 4.6: Polarkoordinaten-Darstellung einer komplexen Zahl $z = |z|e^{i\varphi}$ mit dem Betrag $|z|$ und dem Winkel φ zur x -Achse.

4.5.1 Argument und Phasenfaktor

In der Gaußschen Zahlenebene lassen sich wie folgt Polarkoordinaten einführen, siehe Abb. 4.6. Der Abstand ρ zum Ursprung ist gerade der Betrag der komplexen Zahl:

$$\rho = |z|. \quad (4.53)$$

Und der Winkel φ wird als Argument der komplexen Zahl bezeichnet:

$$\varphi = \arg(z). \quad (4.54)$$

Sind Real- und Imaginärteil x und y bekannt, so folgt analog zu (2.22), (2.23)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.55)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}. \quad (4.56)$$

Umgekehrt lässt sich die komplexe Zahl auch durch Polarkoordinaten ausdrücken. Aufgrund von Abb. 4.6 gilt analog zu (2.24), (2.25) der Zusammenhang

$$x = \rho \cos \varphi, \quad (4.57)$$

$$y = \rho \sin \varphi, \quad (4.58)$$

so dass sich aus (4.3) ergibt

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.59)$$

Mit Hilfe der Euler-Formel (4.48) vereinfacht sich (4.59) dann zu

$$z = \rho e^{i\varphi}. \quad (4.60)$$

Man bezeichnet $e^{i\varphi}$ als Phasenfaktor von z . Aufgrund des trigonometrischen Pythagoras (1.41) gilt

$$|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \quad (4.61)$$

d.h. der Phasefaktor liegt auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Wir bemerken ferner, dass die konjugiert komplexe Zahl (4.16) aufgrund von (4.60) die folgende Polarkoordinaten-Darstellung besitzt:

$$z^* = \rho e^{-i\varphi}. \quad (4.62)$$

4.5.2 Multiplikation und Division

Es seien $\varphi_1 = \arg(z_1)$ und $\varphi_2 = \arg(z_2)$ die Argumente zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 sowie ρ_1 und ρ_2 deren entsprechende Beträge. Dann gilt aufgrund von (4.49) und (4.60) und für die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (4.63)$$

Es multiplizieren sich demnach die Beträge gemäß (4.14) und es addieren sich die Argumente:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (4.64)$$

Entsprechend folgt mit (4.22) für die Division zweier komplexer Zahlen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot z_2^* = \frac{1}{\rho_2^2} \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{-i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (4.65)$$

Also werden die Beträge gemäß (4.24) dividiert und die Argumente werden subtrahiert:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \quad (4.66)$$

4.5.3 Folgerungen

Mit den genannten Rechenregeln für die Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen lassen sich nun einige nützliche Folgerungen ableiten.

a) Spezialisiert man (4.63) auf $z_1 = z_2 = e^{i\varphi}$, so folgt

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi} = e^{2i\varphi}. \quad (4.67)$$

Einsetzen der Euler-Formel (4.48) führt auf

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi). \quad (4.68)$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile führt dann auf

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad (4.69)$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.70)$$

Es handelt sich hierbei um Spezialfälle der trigonometrischen Additionstheoreme (4.51) und (4.52).

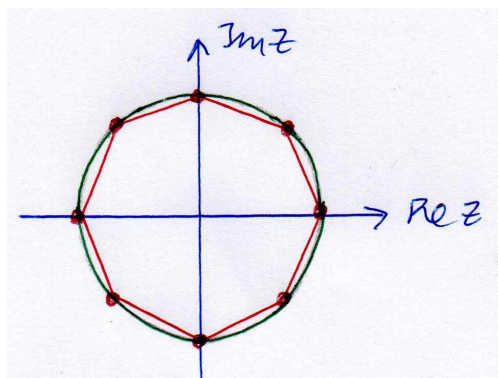


Abbildung 4.7: Die acht Einheitswurzeln $e^{i\varphi_k}$ mit $\varphi_k = 2\pi k/8$ für $k = 0, 1, \dots, 7$ bilden ein dem Einheitskreis eingeschriebenes Achteck.

b) Durch Iteration folgt dann

$$e^{i\varphi} \cdot e^{2i\varphi} = e^{3i\varphi}. \quad (4.71)$$

Einsetzen der Euler-Formel (4.48), Zerlegung in Real- und Imaginärteil und Beachtung von (4.69), (4.70) führt auf die Moivre-Formeln:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi, \quad (4.72)$$

$$\sin(3\varphi) = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi. \quad (4.73)$$

c) Durch weitere Iteration erhalten wir

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.74)$$

was mit der Euler-Formel (4.48) auf

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = e^{in\varphi}. \quad (4.75)$$

führt. Setzen wir nun $\varphi_k = k \cdot 2\pi/n$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$, so folgt

$$(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)^n = e^{in\varphi_k} = e^{2\pi i k} = 1. \quad (4.76)$$

Demnach stellen $e^{i\varphi_k}$ die n -ten Einheitswurzeln dar. Sie bilden ein dem Einheitskreis eingeschriebenes n -Eck, siehe das Beispiel $n = 8$ in Abb. 4.7.

4.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n -ten Grades

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad (4.77)$$

mit komplexen Koeffizienten, d.h. $a_k \in \mathbb{C}$, besitzt nach Gauß genau n komplexe Nullstellen z_1, z_2, \dots, z_n mit der Eigenschaft

$$P_n(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n). \quad (4.78)$$

Hierbei dürfen Nullstellen mehrfach vorkommen und werden dann entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Als Beispiel betrachten wir nochmals das Polynom zweiter Ordnung (4.1) mit der Lösung (4.2). Mit Hilfe der komplexen Zahlen lauten die beiden Lösungen

$$x_{\pm} = 2 \pm 3i. \quad (4.79)$$

Zur Probe überprüfen wir

$$(x - x_+)(x - x_-) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 13. \quad (4.80)$$

Kapitel 5

Harmonischer Oszillator

Viele physikalische Systeme können Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen. Wenn die Auslenkungen aus der Ruhelage hinreichend klein sind, dann sind die Schwingungen harmonisch und werden durch einen harmonischen Oszillator beschrieben. Im folgenden behandeln wir im einzelnen die harmonische, die gedämpfte und die erzwungene Schwingung. Dabei lösen wir die Newtonsche Bewegungsgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators für eine beliebige zeitabhängige Kraft mit Hilfe der Methode der Greenschen Funktion. Es handelt sich dabei um ein allgemeines Konzept zum Lösen inhomogener linearer Differentialgleichung [13], das vom britischen Mathematiker und Physiker George Green 1828 erstmalig eingeführt wurde.

5.1 Harmonische Schwingung

Wenn man einen an einer Schraubenfeder aufgehängten Massenpunkt der Masse m aus der Ruhelage um ein Stück x verschiebt, siehe Abb. 5.1, so wirkt auf den Massenpunkt eine Kraft in Richtung der Ruhelage, die nach dem Hookschen Gesetz proportional zur Auslenkung x ist:

$$F_{\text{H}}(x) = -Dx, \quad (5.1)$$

wobei D die Federkonstante bezeichnet. Es handelt sich hierbei um eine konservative Kraft, da der negative Gradient des Potentials

$$V_{\text{H}}(x) = -\int_0^x F_{\text{H}}(x') dx' = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (5.2)$$

auf das Hooksche Gesetz (5.1) führt. Generell lassen sich Potentiale mit einem Minimum in der direkten Umgebung des Minimums durch ein solches harmonisches Potential (5.2) nähern, siehe Abb. 5.2. Entwickelt man nämlich das Potential $V(x)$ in eine Taylor-Reihe (4.37) um das Minimum bei $x_0 = 0$

$$V(x) = V(0) + V'(0)x + \frac{1}{2}V''(0)x^2 + \dots, \quad (5.3)$$

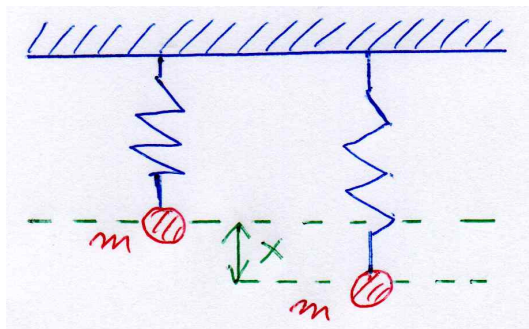


Abbildung 5.1: Massenpunkt m an einer Feder mit Federkonstanten D und seine Auslenkung x aus der Gleichgewichtslage.

so muß $V'(0) = 0$ am Minimum gelten und (5.3) reduziert sich für kleine Auslenkungen bis auf eine irrelevante Konstante auf die Form (5.2). Dabei entspricht die Federkonstante D der Krümmung $V''(0)$ des Potentials $V(x)$ am Minimum $x_0 = 0$. Setzt man das Kraftgesetz (5.1) in die Newtonsche Grundgleichung (3.3) ein, so entsteht für die Auslenkung x eine homogene, lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5.4)$$

wobei die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators gegeben ist durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (5.5)$$

Die Eigenfrequenz ω_0 ist also um so größer, je größer die Federkonstante D und je kleiner die Masse m ist. Das übliche Lösungsverfahren für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besteht im Exponentialansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}. \quad (5.6)$$

Einsetzen von (5.6) in (5.4) führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (5.7)$$

Nach dem Gaußschen Fundamentalsatz der Algebra von Abschnitt 4.6 besitzt diese quadratische Gleichung genau zwei komplexe Lösungen

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0. \quad (5.8)$$

Demnach besitzt die Differentialgleichung (5.4) die beiden Fundamentallösungen

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t}, \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}. \quad (5.9)$$

Eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen führt auf die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.4):

$$x(t) = a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (5.10)$$

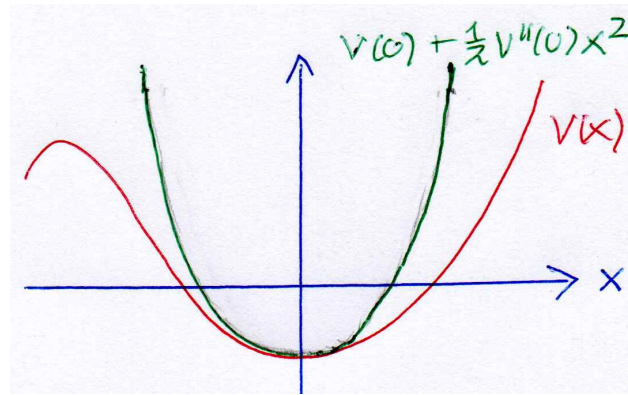


Abbildung 5.2: Approximation des Potentials $V(x)$ in der Nähe eines Minimums durch ein harmonisches Potential.

Statt der zwei komplexen Fundamentallösungen (5.9) kann man auch zwei reelle Fundamentallösungen angeben. Hierzu verwendet man die Eulersche Formel (4.48) in (5.10) und erhält

$$x(t) = b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t \quad (5.11)$$

mit den Koeffizienten

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = i(a_1 - a_2). \quad (5.12)$$

Die beiden reellen Fundamentallösungen lauten demnach

$$x_1(t) = \cos \omega_0 t, \quad x_2(t) = \sin \omega_0 t. \quad (5.13)$$

Die noch unbekanntenen Koeffizienten b_1, b_2 in (5.11) lassen sich durch die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (5.14)$$

festlegen. Wir erhalten dabei

$$b_1 = x_0, \quad b_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}, \quad (5.15)$$

so dass die allgemeine Lösung (5.11) übergeht in

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (5.16)$$

Man kann (5.16) auch auf die Form

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t - \theta) = A \cos \theta \cos \omega_0 t + A \sin \theta \sin \omega_0 t \quad (5.17)$$

bringen. Der Vergleich von (5.16) und (5.17) führt auf

$$A \cos \theta = x_0, \quad A \sin \theta = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}, \quad (5.18)$$

so dass sich die Amplitude A ergibt zu

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad (5.19)$$

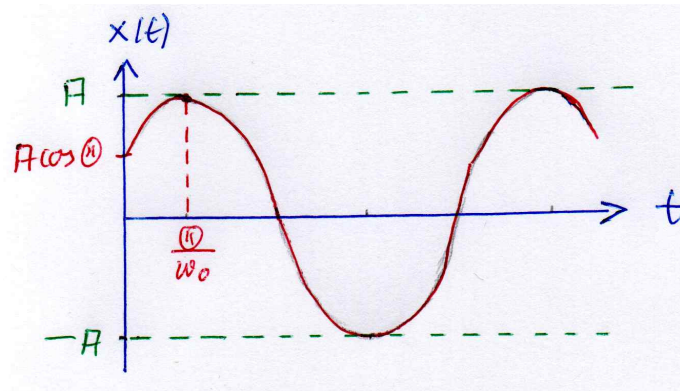


Abbildung 5.3: Harmonische Schwingung $x(t) = A \cos(\omega_0 t - \theta)$ mit Amplitude (5.19) und Phase (5.20).

während die Phase lautet

$$\theta = \arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}. \quad (5.20)$$

Setzen wir (5.19) und (5.20) in (5.17) ein, so führt dies auf

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} \right), \quad (5.21)$$

was sich durch Abb. 5.3 illustrieren läßt.

5.2 Gedämpfte harmonische Schwingung

Wir berücksichtigen nun zusätzlich noch die Reibung am umgebenden Medium, wie z.B. den Luftwiderstand. Bewegt sich der Körper nicht zu schnell durch das umgebende Medium, so erfährt er nach Stokes eine Reibungskraft, die proportional zu seiner Geschwindigkeit ist:

$$F_R = -\gamma \dot{x}. \quad (5.22)$$

Dabei besagt das Minuszeichen, dass diese Reibungskraft entgegengesetzt zur Geschwindigkeit des Körpers gerichtet ist. Ferner ist die Reibungskonstanten γ im Falle eines sphärischen Körpers gegeben durch [17, 18]

$$\gamma = 6\pi r \eta, \quad (5.23)$$

wobei r dessen Radius bezeichnet und η die Viskosität des Mediums beschreibt, in dem sich der Körper befindet. Die auftretenden Werte für die Viskosität variieren von $1,7 \cdot 10^{-5}$ Ns/m² bei Luft über $1,0 \cdot 10^{-3}$ Ns/m² bei Wasser mit 20°C bis hin zu 10 Ns/m² bei Honig.

Setzt man die beiden Kräfte (5.1) und (5.22) in die Newtonschen Bewegungsgleichung (3.3) ein, so folgt unter Beachtung der Eigenfrequenz des ungedämpften harmonischen Oszillators (5.5)

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = 0. \quad (5.24)$$

Es handelt sich wieder um eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5.25)$$

wobei zur Abkürzung die Abklingkonstante

$$\kappa = \frac{\gamma}{2m} \quad (5.26)$$

eingeführt wurde. Der Exponentialansatz (5.6) führt dann in (5.25) zur charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (5.27)$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}. \quad (5.28)$$

Demnach lauten die beiden Fundamentallösungen der Differentialgleichung in (5.25)

$$x_1(t) = e^{-\kappa t} e^{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t}, \quad x_2(t) = e^{-\kappa t} e^{-\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t} \quad (5.29)$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich durch Linearkombination

$$x(t) = a_1 e^{-\kappa t} e^{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t} + a_2 e^{-\kappa t} e^{-\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t}. \quad (5.30)$$

Abhängig vom Wert des Radikanten $\kappa^2 - \omega_0^2$ ergeben sich drei verschiedene Fälle für die gedämpfte harmonische Schwingung.

5.2.1 Schwache Dämpfung

Im Falle der schwachen Dämpfung gilt

$$\kappa < \omega_0, \quad (5.31)$$

so dass (5.30) übergeht in

$$x(t) = a_1 e^{-\kappa t} e^{i\omega t} + a_2 e^{-\kappa t} e^{-i\omega t}, \quad (5.32)$$

wobei die Frequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (5.33)$$

wegen der Reibung kleiner ist als die Eigenfrequenz (5.5) des harmonischen Oszillators. Dabei geht die gedämpfte Schwingung (5.32), (5.33) bei einer verschwindenden Dämpfung $\kappa = 0$ in die ungedämpfte Schwingung (5.10) über. Mit der Eulerschen Formel (4.48) und den neuen Koeffizienten (5.12) erhalten wir aus (5.32)

$$x(t) = (b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t) e^{-\kappa t}, \quad (5.34)$$

so dass die reellen Fundamentallösungen gegeben sind durch

$$x_1(t) = e^{-\kappa t} \cos \omega t, \quad x_2(t) = e^{-\kappa t} \sin \omega t. \quad (5.35)$$

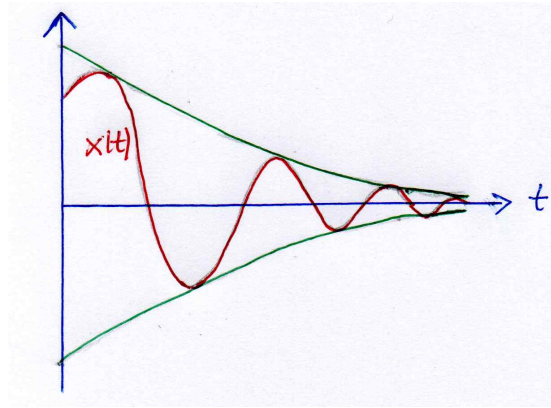


Abbildung 5.4: Gedämpfte harmonische Schwingung (5.37) zwischen exponentiellen Einhüllenden.

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen (5.14) lassen sich wieder b_1 und b_2 in (5.34) festlegen:

$$b_1 = x_0, \quad b_2 = \frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega}. \quad (5.36)$$

Außerdem lässt sich (5.34) auf die Form

$$x(t) = A \cos(\omega t - \theta) e^{-\kappa t} \quad (5.37)$$

bringen, wobei diesmal Amplitude A und Phase θ gegeben sind durch

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega}\right)^2} \quad (5.38)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \kappa x_0}{\omega x_0}\right). \quad (5.39)$$

Die Kurve der gedämpften harmonischen Schwingung befindet sich demnach innerhalb einer exponentiellen Einhüllenden, siehe Abb. 5.4. Wir betrachten nun zwei aufeinanderfolgende Maximalausschläge $x(t_n)$ und $x(t_{n+1})$ zu den Zeiten t_n und $t_{n+1} = t_n + T$ mit der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (5.40)$$

Für das Verhältnis der Maximalausschläge erhalten wir

$$\frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = \frac{A \cos(\omega t_n - \theta) e^{-\kappa t_n}}{A \cos(\omega t_{n+1} - \theta) e^{-\kappa t_{n+1}}} = \exp\left(\frac{2\pi\kappa}{\omega}\right), \quad (5.41)$$

so dass das logarithmische Dekrement

$$\ln \frac{x(t_n)}{x(t_{n+1})} = \frac{2\pi\kappa}{\omega} \quad (5.42)$$

unter Beachtung von (5.33) zur experimentellen Bestimmung der Abklingkonstanten κ bzw. der Dämpfungskonstanten γ nach (5.26) benutzt werden kann.

5.2.2 Aperiodischer Grenzfall

Beim aperiodischen Grenzfall

$$\kappa = \omega_0 \quad (5.43)$$

fallen die beiden Fundamentallösungen (5.29) zusammen:

$$x_1(t) = e^{-\kappa t}. \quad (5.44)$$

Da die Differentialgleichung (5.25) auch im aperiodischen Grenzfall (5.43) von zweiter Ordnung ist, d.h.

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa\dot{x}(t) + \kappa^2x(t) = 0, \quad (5.45)$$

muss es neben (5.44) noch eine zweite Fundamentallösung geben. Wir finden diese nach dem d'Alembertschen Reduktionsverfahren durch den Ansatz

$$x_2(t) = c(t)e^{-\kappa t}. \quad (5.46)$$

Die noch unbekannte Funktion $c(t)$ legen wir durch die Bedingung fest, dass (5.46) die Differentialgleichung (5.45) lösen soll. Einsetzen von (5.46) in (5.45) führt zu

$$\ddot{c}(t)e^{-\kappa t} - 2\kappa\dot{c}(t)e^{-\kappa t} + \kappa^2c(t)e^{-\kappa t} + 2\kappa[\dot{c}(t)e^{-\kappa t} - \kappa c(t)e^{-\kappa t}] + \kappa^2c(t)e^{-\kappa t} = 0, \quad (5.47)$$

so dass $c(t)$ der Differentialgleichung

$$\ddot{c}(t) = 0 \quad (5.48)$$

genügt mit der allgemeinen Lösung

$$c(t) = b_1 + b_2t. \quad (5.49)$$

Demnach lautet die zweite Fundamentallösung

$$x_2(t) = te^{-\kappa t}, \quad (5.50)$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.45) ergibt sich zu

$$x(t) = (b_1 + b_2t)e^{-\kappa t}. \quad (5.51)$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingungen (5.14) lassen sich b_1 und b_2 festlegen:

$$b_1 = x_0, \quad b_2 = \dot{x}_0 + \kappa x_0. \quad (5.52)$$

5.2.3 Starke Dämpfung

Im Falle der starken Dämpfung gilt

$$\kappa > \omega_0, \quad (5.53)$$

so dass beide Lösungen (5.28) der charakteristischen Gleichung (5.27) reell sind. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.25) ist dann durch (5.30) gegeben. Das Einarbeiten der Anfangsbedingungen (5.14) führt auf die beiden Bedingungen

$$x(0) = a_1 + a_2 = x_0, \quad (5.54)$$

$$\dot{x}(0) = \left(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\right) a_1 + \left(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}\right) a_2 = \dot{x}_0. \quad (5.55)$$

In Matrixschreibweise lautet dieses inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}. \quad (5.56)$$

Eine allgemeine 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

besitzt die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

Damit lässt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem (5.56) unmittelbar lösen

$$\frac{1}{-2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} \begin{pmatrix} -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & -1 \\ \kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (5.59)$$

so dass wir das Ergebnis

$$a_1 = \frac{(\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}) x_0 + \dot{x}_0}{2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}}, \quad a_2 = \frac{(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}) x_0 - \dot{x}_0}{2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}}. \quad (5.60)$$

erhalten. Vergleicht man die Auslenkung $x(t)$ im Falle starken Dämpfung (5.30) mit der der schwachen Dämpfung (5.34) und der des aperiodischen Grenzfalls (5.51), so fällt ein wesentlicher Unterschied in der Langzeitdynamik auf. Während bei schwacher Dämpfung (5.34) und beim aperiodischen Grenzfall (5.51) die Auslenkung exponentiell mit der Konstanten κ abklingt, gibt es bei der starken Dämpfung (5.30) sogar zwei exponentielle Terme. Beim zweiten Term in (5.30) bewirkt die größere Konstante $\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ ein noch rascheres exponentielles Abklingen. Demgegenüber tritt aber im ersten Term die kleinere Konstante $\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}$ auf, so dass die Masse exponentiell letztendlich sehr langsam zur Ruhelage zurückkehrt. Man spricht deshalb bei (5.30) vom Kriechfall, bei dem der Oszillator eine Kriechbewegung vollführt. Im direkten Vergleich zwischen Kriechfall (5.30) und aperiodischem Grenzfall (5.51) zeigt sich daher, dass die Ruhelage bei letzterem viel schneller erreicht wird, siehe Abb. 5.5. Dieser Umstand wird beim Bau von Meßgeräten ausgenutzt. Man strebt nämlich bei Meßgeräten an, den aperiodischen Grenzfall zu realisieren, damit sich ein Meßwert möglichst schnell einstellt.

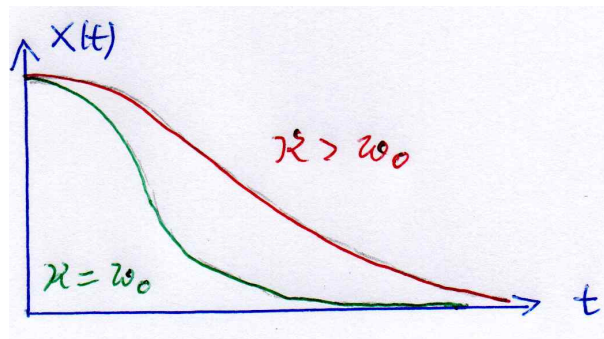


Abbildung 5.5: Graphische Darstellung von aperiodischem Grenzfall ($\kappa = \omega_0$) und Kriechfall ($\kappa > \omega_0$) für dieselbe Anfangsbedingung $\dot{x}_0 = 0$.

5.2.4 Energie

Schließlich untersuchen wir noch den Energieinhalt eines schwingenden Systems bei Anwesenheit von schwacher Dämpfung (5.31). Dazu gehen wir von der zugrunde liegenden Newtonschen Bewegungsgleichung (5.24) aus, beachten die Eigenfrequenz der ungedämpften harmonischen Oszillators (5.5) und multiplizieren die ganze Gleichung mit der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$:

$$m\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t)x(t) = -\gamma\dot{x}^2(t). \quad (5.61)$$

Auf der linken Seite steht nun das totale Differential der Energie

$$E(t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{D}{2} x^2(t), \quad (5.62)$$

die sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammensetzt:

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma\dot{x}^2(t). \quad (5.63)$$

Demnach ist die zeitliche Ableitung der Energie negativ. Während also die Energie des gedämpften harmonischen Oszillators zwischen kinetischer und potentieller Energie hin- und herpendelt, nimmt sie ständig ab. Dies liegt daran, dass die Reibung ständig Energie in Wärme umwandelt und nach Außen abführt. Es sei $E(0)$ die Energie zu Beginn einer Schwingungsperiode und

$$E(0) - E(T) = \gamma \int_0^T dt \dot{x}^2(t) \quad (5.64)$$

die Energie, die innerhalb einer Schwingungsperiode in thermische Energie übergeht. Dann charakterisiert das Verhältnis

$$Q = 2\pi \frac{E(0)}{E(0) - E(T)} \quad (5.65)$$

viele Eigenschaften des gedämpften harmonischen Oszillators. Man bezeichnet (5.65) als Gütefaktor nach der englischen Bezeichnung *quality factor*. In den Übungen wird gezeigt, dass der Gütefaktor (5.65) im Falle einer schwacher Dämpfung (5.31) gegeben ist durch

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-4\pi\kappa/\omega}}. \quad (5.66)$$

Schwingendes System	Gütefaktor Q
elektrischer Schwingkreis	10^2
Pendeluhr	10^4
Schwingquarz	$(3 \dots 10) \cdot 10^5$
angeregtes Atom	10^7
frequenzstabilisierter Laser	10^9
Cäsium-Atomuhr	10^{13}

Abbildung 5.6: Größenordnungen von Gütefaktoren bei verschiedenen schwingenden Systemen der Physik.

Aufgrund von (5.33) hängt er von der Eigenfrequenz ω_0 und der Abklingkonstanten κ des gedämpften harmonischen Oszillators ab. Im Limes extrem schwacher Dämpfung $\kappa \ll \omega_0$ reduziert sich (5.66) auf ein Resultat, das in vielen Bereichen der Physik verwendet wird:

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\kappa}. \quad (5.67)$$

Es besagt, dass ein hoher Gütefaktor einer schwachen Dämpfung entspricht, so dass die Lebensdauer der gedämpften Schwingung groß ist. In der Tabelle von Abb. 5.6 werden die Größenordnungen von Gütefaktoren bei verschiedenen schwingenden Systemen der Physik miteinander verglichen.

5.3 Beliebige zeitabhängige Kraft

Wir wollen nun annehmen, dass auf den Massenpunkt außer der Hookeschen Rückstellkraft (5.1) und der Stokeschen Reibungskraft (5.22) noch zusätzlich eine beliebige zeitabhängige Kraft $F(t)$ einwirkt. Die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.3) führt dann mit der Eigenfrequenz des ungedämpften harmonische Oszillators (5.5) und der Abklingkonstanten (5.26) zu einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (5.68)$$

Die allgemeine Lösung von (5.68) setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung $x_h(t)$ der homogenen Gleichung (5.25) und irgendeiner partikulären Lösung $x_p(t)$ von (5.68)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (5.69)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (5.25) wurde im vorhergehenden Abschnitt ausführlich hergeleitet und diskutiert. Dabei stellte sich heraus, dass sie sich als Linearkombi-

nation von zwei Fundamentallösungen ergibt:

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t). \quad (5.70)$$

Ferner zeigte sich, dass diese homogene Lösung bei allen drei behandelten Fälle $\kappa < \omega_0$, $\kappa = \omega_0$ und $\kappa > \omega_0$ im Langzeitlimes verschwindet. Wenn man sich also für das Langzeitverhalten der Lösung (5.69) interessiert, dann muss man die partikuläre Lösung bestimmen. Eine solche partikuläre Lösung von (5.68) läßt sich mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten ableiten. Hierzu nimmt man an, dass die beiden Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Gleichung (5.25) bekannt sind und setzt die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (5.68) in Verallgemeinerung von (5.70) an als

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t). \quad (5.71)$$

Man versucht dann, die noch unbekannt Funktionen $c_1(t)$ und $c_2(t)$ so zu bestimmen, dass (5.71) die inhomogene Gleichung (5.68) löst. Wir betrachten zunächst die erste Ableitung von (5.71):

$$\dot{x}_p(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)x_1(t) + \dot{c}_2(t)x_2(t). \quad (5.72)$$

Da wir nicht an der allgemeinsten partikulären Lösung sondern nur an einer einzigen partikulären Lösung interessiert sind, vereinfachen wir (5.72), indem wir die Bedingung

$$x_1(t)\dot{c}_1(t) + x_2(t)\dot{c}_2(t) = 0 \quad (5.73)$$

fordern. Da sich (5.72) durch (5.73) reduziert auf

$$\dot{x}_p(t) = c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t), \quad (5.74)$$

lautet die zweite Ableitung

$$\ddot{x}_p(t) = c_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t). \quad (5.75)$$

Einsetzen von (5.71), (5.74) und (5.75) in die inhomogene Gleichung (5.68) führt auf

$$\begin{aligned} & c_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{c}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\dot{x}_2(t) \\ & + 2\kappa[c_1(t)\dot{x}_1(t) + c_2(t)\dot{x}_2(t)] + \omega_0^2[x_1(t)c_1(t) + x_2(t)c_2(t)] = \frac{F(t)}{m}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Da $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Fundamentallösungen der homogenen Differentialgleichung (5.25) darstellen, d.h. es gilt

$$\ddot{x}_1(t) + 2\kappa\dot{x}_1(t) + \omega_0^2 x_1(t) = 0, \quad (5.77)$$

$$\ddot{x}_2(t) + 2\kappa\dot{x}_2(t) + \omega_0^2 x_2(t) = 0, \quad (5.78)$$

reduziert sich (5.76) auf

$$\dot{x}_1(t)\dot{c}_1(t) + \dot{x}_2(t)\dot{c}_2(t) = \frac{F(t)}{m}. \quad (5.79)$$

Damit stellen (5.73) und (5.79) zwei algebraische Gleichungen für $\dot{c}_1(t)$ und $\dot{c}_2(t)$ dar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(t)/m \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Verwendet man (5.57), (5.58), so lässt sich dieses inhomogene lineare Gleichungssystem nach $\dot{c}_1(t)$ und $\dot{c}_2(t)$ auflösen:

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) & -x_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) & x_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ F(t)/m \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

Hierbei bezeichnet $W(t)$ die Wronski-Determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)\dot{x}_2(t) - x_2(t)\dot{x}_1(t). \quad (5.82)$$

Die zeitliche Ableitung von (5.82) führt auf

$$\dot{W}(t) = x_1(t)\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)x_2(t), \quad (5.83)$$

so dass man mit Hilfe von (5.77) und (5.82) erhält:

$$\dot{W}(t) = -2\kappa W(t). \quad (5.84)$$

Die Integration der Differentialgleichung (5.84) ergibt

$$W(t) = W(0)e^{-2\kappa t}, \quad (5.85)$$

wobei die Anfangsbedingung gegeben ist durch die Auswertung von (5.82) zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben ist:

$$W(0) = x_1(0)\dot{x}_2(0) - x_2(0)\dot{x}_1(0). \quad (5.86)$$

Aus (5.81) lassen sich $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$ und nach einer einfachen Integration ebenso $c_1(t)$, $c_2(t)$ ablesen:

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{x_2(t)F(t)}{mW(t)} \implies c_1(t) = -\int_{-\infty}^t dt' \frac{x_2(t')F(t')}{mW(t')}, \quad (5.87)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{x_1(t)F(t)}{mW(t)} \implies c_2(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{x_1(t')F(t')}{mW(t')}. \quad (5.88)$$

Setzt man (5.87) und (5.88) in (5.71) ein, so ist die partikuläre Lösung von der Form

$$x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t, t')F(t')dt', \quad (5.89)$$

wobei der als Greensche Funktion benannte Integralkern $G_c(t, t')$ gegeben ist durch

$$G_c(t, t') = \begin{cases} \frac{x_2(t)x_1(t') - x_1(t)x_2(t')}{mW(t')} & ; t \geq t' \\ 0 & ; t \leq t' \end{cases}. \quad (5.90)$$

Da der Integralkern $G_c(t, t')$ für $t \leq t'$ verschwindet, ist die Kausalität gewährleistet, dass eine Kraft $F(t')$ in der Zukunft keine Auswirkung auf die momentane Auslenkung $x_p(t)$ haben kann. Diese Kausalitätseigenschaft des Integralkerns wird durch den Index c in der Notation von $G_c(t, t')$ zum Ausdruck gebracht.

5.3.1 Schwache Dämpfung

Wir geben nun die Greensche Funktion im Falle der schwachen Dämpfung (5.31) explizit an und verwenden hierzu die beiden Fundamentallösungen (5.35)

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\kappa t} \cos \omega t, & \dot{x}_1(t) &= e^{-\kappa t} (-\kappa \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \\ x_2(t) &= e^{-\kappa t} \sin \omega t, & \dot{x}_2(t) &= e^{-\kappa t} (-\kappa \sin \omega t + \omega \cos \omega t). \end{aligned} \quad (5.91)$$

Da diese Fundamentallösungen die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = -\kappa, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = \omega \quad (5.92)$$

besitzen, lautet die Wronski-Determinante nach (5.85) und (5.86)

$$W(t) = \omega e^{-2\kappa t}. \quad (5.93)$$

Tatsächlich erhalten wir nach (5.82) und (5.91)

$$W(t) = e^{-2\kappa t} [\cos \omega t (-\kappa \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - \sin \omega t (-\kappa \cos \omega t - \omega \sin \omega t)] = \omega e^{-2\kappa t}. \quad (5.94)$$

Einsetzen von (5.91) und (5.93) in (5.90) führt schließlich auf die explizite Gestalt der kausalen Greenschen Funktion bei schwacher Dämpfung:

$$G_c(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\omega} e^{-\kappa(t-t')} \sin \omega(t-t') & ; t \geq t' \\ 0 & ; t \leq t' \end{cases}. \quad (5.95)$$

Demnach ist die Greensche Funktion $G_c(t, t')$ nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ abhängig:

$$G_c(t, t') = G_c(t - t'). \quad (5.96)$$

Dies liegt daran, dass die homogene Differentialgleichung (5.25) nicht explizit von der Zeit abhängt und daher unter Zeittranslationen invariant ist.

5.3.2 Aperiodischer Grenzfall

Die Greensche Funktion im aperiodischen Grenzfall (5.43) lässt sich auf verschiedenen Wegen bestimmen. Setzen wir (5.95) im Limes $\kappa \uparrow \omega_0$ analytisch fort, so folgt mit Hilfe von (5.33) und der Regel von de l' Hôpital [1, Abschnitt 6.5]

$$\lim_{\kappa \uparrow \omega_0} \frac{\sin \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}(t-t')}{\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} = t - t' \quad (5.97)$$

die Greensche Funktion im aperiodischen Grenzfall:

$$G_c(t, t') = \begin{cases} \frac{t-t'}{m} e^{-\kappa(t-t')} & ; t \geq t' \\ 0 & ; t \leq t' \end{cases}. \quad (5.98)$$

Das selbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die beiden Fundamentallösungen (5.44) und (5.50) in (5.90) einsetzen. Dabei lautet die Wroski-Determinante (5.82) der beiden Fundamentallösungen (5.44) und (5.50):

$$W(t) = e^{-2\kappa t}. \quad (5.99)$$

In der Tat besitzen die Fundamentallösungen (5.44) und (5.50) die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = -\kappa, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 1, \quad (5.100)$$

so dass sich die Wronski-Determinante (5.99) auch nach (5.85) und (5.86) ergibt.

5.3.3 Starke Dämpfung

Ganz entsprechend gehen wir im Falle der starken Dämpfung (5.53) vor. Eine analytische Fortsetzung der Greenschen Funktion (5.95) der schwachen Dämpfung (5.31) für die starke Dämpfung (5.53) ergibt unter Beachtung von (5.33):

$$G_c(t, t') = \begin{cases} \frac{1}{m\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} e^{-\kappa(t-t')} \sinh \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}(t - t') & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}. \quad (5.101)$$

Hierbei haben wir die analytische Fortsetzung der sin-Funktion verwendet

$$\sin ix = i \sinh x, \quad (5.102)$$

die auf die Hyperbelfunktion

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad (5.103)$$

führt und sich mit Hilfe der Eulerschen Formel (4.48) beweisen lässt. Das selbe Ergebnis erhalten wir auch, wenn wir die beiden Fundamentallösungen (5.29) in (5.90) einsetzen. Dabei lautet die Wronski-Determinante der Fundamentallösungen (5.29):

$$W(t) = -2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} e^{-2\kappa t}. \quad (5.104)$$

Dabei folgt (5.104) auch aus den Anfangsbedingungen der Fundamentallösungen (5.29)

$$x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}, \quad x_2(0) = 1, \quad \dot{x}_2(0) = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \quad (5.105)$$

mit Hilfe von (5.85) und (5.86).

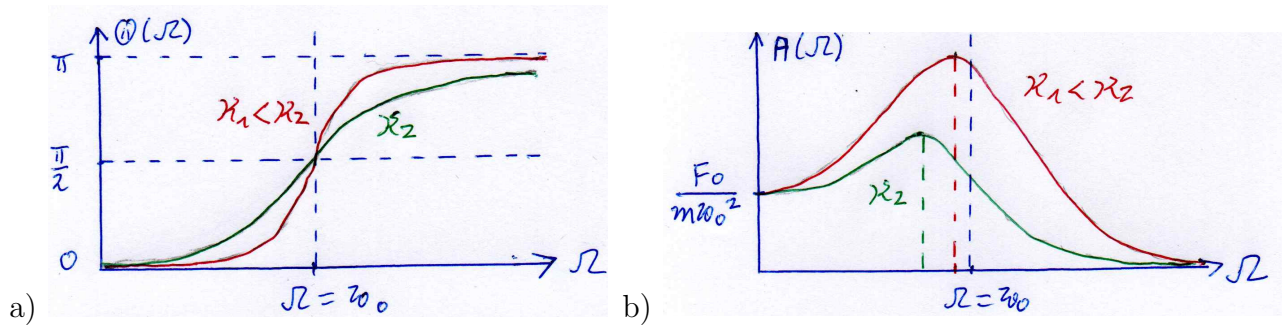


Abbildung 5.7: Erzwungene Schwingung: a) Phasenverschiebung (5.112) und b) Amplitude (5.113) als Funktion der äußeren Frequenz Ω .

5.4 Erzwungene Schwingungen

Wir berechnen nun die partikuläre Lösung für eine erzwungene Schwingung, bei der die äußere Kraft harmonisch ist:

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t. \quad (5.106)$$

Hierbei werden sowohl die Treibamplitude F_0 als auch die Treibfrequenz Ω als von Außen frei einstellbare Parameter angesehen. Einsetzen von (5.95) und (5.106) in (5.89) zeigt, dass hierzu zwei einzelne Integrale auszuwerten sind:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega} e^{-\kappa t} \left[\sin \omega t \int_{-\infty}^t dt' e^{\kappa t'} \cos \omega t' \cos \Omega t' - \cos \omega t \int_{-\infty}^t dt' e^{\kappa t'} \sin \omega t' \cos \Omega t' \right]. \quad (5.107)$$

In den Übungen wird gezeigt, dass die Auswertung von (5.107) unter Berücksichtigung der Frequenz (5.33) bei schwacher Dämpfung auf das folgende Ergebnis führt:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m} \frac{2\Omega\kappa \sin \Omega t + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}. \quad (5.108)$$

Demnach schwingt die partikuläre Lösung $x_p(t)$ mit derselben Frequenz Ω wie die äußere Kraft (5.106). Die partikuläre Lösung (5.108) ist von der Form

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t - \theta) = A \cos \theta \cos \Omega t + A \sin \theta \sin \Omega t, \quad (5.109)$$

wobei der Koeffizientenvergleich auf

$$A \cos \theta = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}, \quad (5.110)$$

$$A \sin \theta = \frac{F_0}{m} \frac{2\Omega\kappa}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2} \quad (5.111)$$

führt. Die Phasenverschiebung θ zwischen der äußeren Kraft $F(t)$ und der partikulären Lösung $x_p(t)$ ist gegeben durch

$$\theta = \arctan \frac{2\Omega\kappa}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (5.112)$$

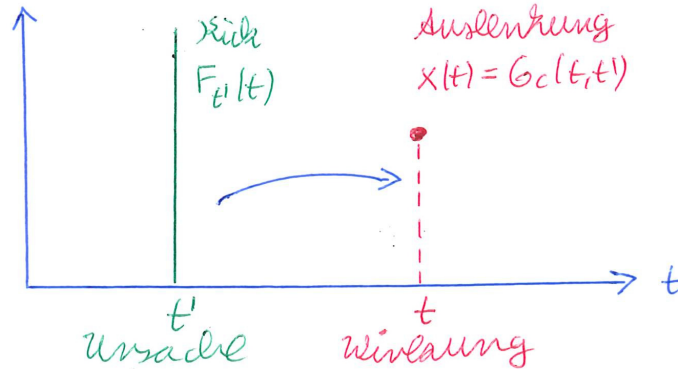


Abbildung 5.8: Greensche Funktion $G_c(t, t')$ stellt Lösung $x(t)$ von (5.68) dar, falls zur Zeit t' ein kurzzeitiger Kraftstoß $F_{t'}(t)$ wirkt.

Die graphische Darstellung der Phasenverschiebung θ als Funktion der äußeren Frequenz Ω ist in Abb. 5.7 a) zu sehen. Wir bemerken, dass die partikuläre Lösung $x_p(t)$ der äußere Kraft $F(t)$ immer hinterhinkt. Dabei ist die Phasenverschiebung $\theta(\Omega)$ für $\Omega = \omega_0$ gleich $\pi/2$ und damit unabhängig von der Abklingkonstanten κ . Ferner ergibt sich die Amplitude A zu

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}}, \quad (5.113)$$

was auf die Resonanzkurve von Abb. 5.7b) führt. Wir untersuchen nun, bei welcher Frequenz Ω_0 die Amplitude $A(\Omega)$ extremal ist:

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = \frac{2F_0\Omega}{m} \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\kappa^2}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2]^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad (5.114)$$

Als Lösung erhalten wir unter Beachtung von (5.33)

$$\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2} < \omega < \omega_0. \quad (5.115)$$

Bei dieser Frequenz Ω_0 nimmt die Amplitude $A(\Omega)$ den Wert

$$A(\Omega_0) = \frac{F_0}{2m\kappa\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} \quad (5.116)$$

an, der im Limes $\kappa \rightarrow 0$ divergiert.

5.5 Diracsche Delta-Funktion

Im Folgenden werden wir eine anschauliche physikalische Interpretation der Greenschen Funktion $G_c(t, t')$ ableiten können. Hierzu kehren wir wieder zur inhomogenen Differentialgleichung (5.68) und deren Lösung $x(t)$ zurück. In einigen Abschnitten werden wir nämlich zeigen können,

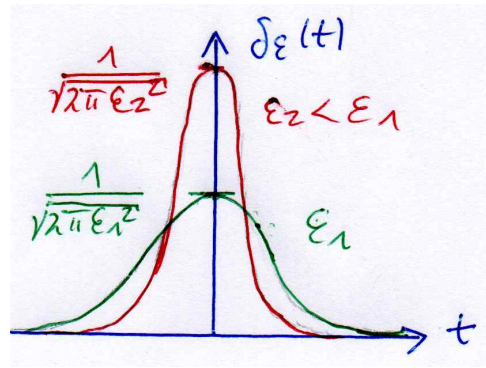


Abbildung 5.9: Die Folge der Gauß-Funktionen (5.118) strebt im Limes $\epsilon \downarrow 0$ zur Diracschen Delta-Funktion $\delta(t)$.

dass die Greensche Funktion $G_c(t, t')$ genau diejenige Lösung $x(t)$ zur Zeit t von (5.68) darstellt, bei der die Kraft $F_\nu(t)$ einen kurzzeitigen Kraftstoß (“Kick”) zur Zeit t' darstellt, siehe Abb. 5.8. Um dieses zentrale Ergebnis erhalten zu können, müssen wir uns allerdings zunächst damit beschäftigen, wie man einen solchen kurzzeitigen Kraftstoß mathematisch beschreibt. Er wurde erstmalig 1930 von Paul Dirac in Form der sogenannten Delta-Funktion $\delta(t)$ eingeführt, die durch die beiden folgenden Eigenschaften definiert werden kann:

$$(D1) \quad \delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad ,$$

$$(D2) \quad \int_{-\mu}^{\mu} \delta(t) dt = 1, \quad \mu > 0.$$

Man erhält die Diracsche Delta-Funktion $\delta(t)$ im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$ aus einer Funktionenfolge $\delta_\epsilon(t)$, die noch von einem Parameter ϵ abhängt:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (5.117)$$

Betrachten wir beispielsweise die Folge der Gauß-Funktionen

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right) \quad (5.118)$$

im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$, siehe Abb. 5.9. Die erste Eigenschaft (D1) ergibt sich daraus, dass $\delta_\epsilon(t)$ für ein festes t im Limes $\epsilon \downarrow 0$ exponentiell gegen 0 konvergiert und die zweite Eigenschaft (D2) ist garantiert, da die Gauß-Funktionen (5.118) schon für jedes ϵ normiert sind:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1. \quad (5.119)$$

Hierbei folgt (5.119) aus dem Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad (5.120)$$

das im folgenden Abschnitt berechnet wird, mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{2}\epsilon x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\epsilon^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = 1. \quad (5.121)$$

Zum Schluß dieses einführenden Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, dass die Delta-Funktion im mathematisch strengen Sinne keine Funktion darstellt, sondern aufgrund ihres singulären Charakters als *Distribution* betrachtet werden muß. Da man beispielsweise die Delta-Distribution $\delta(t)$ gemäß (5.117) als Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$ einer Funktionenfolge $\delta_\epsilon(t)$ erhält, kann man eine Distribution auch als eine Verallgemeinerung des Begriffs der Funktion ansehen. Die vom Physiker Paul Dirac 1930 heuristisch eingeführte Delta-Funktion wurde dann vom Mathematiker Laurent Schwartz 1950 zum Anlaß genommen, eine systematische mathematische Theorie der Distributionen zu entwickeln.

5.6 Zweidimensionales Integral

Zunächst identifiziert man das Quadrat des Integrals als ein zweidimensionales Integral in kartesischen Koordinaten:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}. \quad (5.122)$$

Anschließend geht man von kartesischen Koordinaten x, y zu ebenen Polarkoordinaten ρ, φ gemäß (2.24), (2.25) über. Dabei ist insbesondere darauf zu achten, wie sich das Integrationsmaß $dx dy$ in kartesischen Koordinaten in das entsprechende Integrationsmaß $d\rho d\varphi$ in ebenen Polarkoordinaten transformiert. Hierzu bemerken wird zunächst dass der Ortsvektor \vec{r} ursprünglich in kartesischen Koordinaten x, y gegeben ist:

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y. \quad (5.123)$$

Demnach besteht das totale Differential, also das Linienelement

$$d\vec{r} = d\vec{r}_x + d\vec{r}_y, \quad (5.124)$$

aus den beiden Vektoren

$$d\vec{r}_x = dx\vec{e}_x, \quad d\vec{r}_y = dy\vec{e}_y, \quad (5.125)$$

die in Richtung der Basisvektoren \vec{e}_x und \vec{e}_y zeigen und daher senkrecht aufeinander stehen, siehe Abb. 5.10a). Das von ihnen aufgespannte infinitesimale Flächenelement ist demnach gegeben durch

$$dF = |d\vec{r}_x| |d\vec{r}_y| = dx dy. \quad (5.126)$$

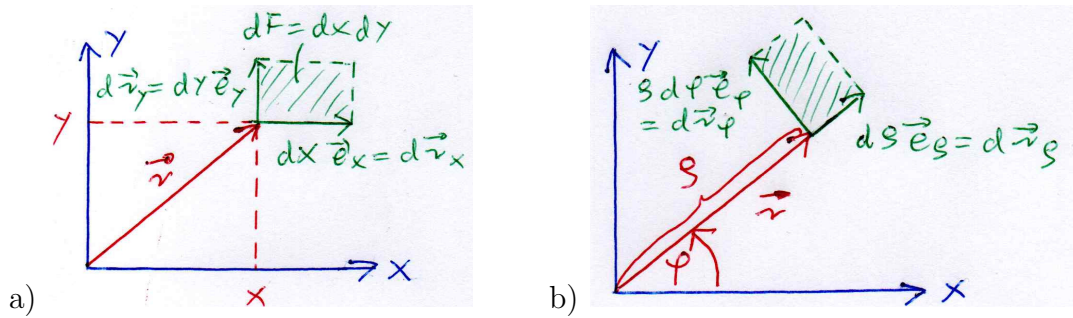


Abbildung 5.10: Linienelement in a) kartesischen Koordinaten und b) ebenen Polarkoordinaten.

Nun betrachten wir entsprechend die ebenen Polarkoordinaten ρ , φ , die gemäß (2.24), (2.25) definiert sind. Hier lesen wir z.B. aus (2.28) ab, dass sich das entsprechende totale Differential, also das Linienelement, zerlegen läßt als

$$d\vec{r} = d\vec{r}_\rho + d\vec{r}_\varphi, \quad (5.127)$$

wobei die beiden Vektoren

$$d\vec{r}_\rho = d\rho \vec{e}_\rho, \quad d\vec{r}_\varphi = \rho d\varphi \vec{e}_\varphi \quad (5.128)$$

auftreten. Da $d\vec{r}_\rho$ bzw. $d\vec{r}_\varphi$ in Richtung von \vec{e}_ρ bzw. \vec{e}_φ zeigen, stehen auch sie beide aufeinander senkrecht, siehe Abb. 5.10b) und das von ihnen aufgespannte Flächenelement ergibt sich zu

$$dF = |d\vec{r}_\rho| |d\vec{r}_\varphi| = \rho d\rho d\varphi. \quad (5.129)$$

Aus der Gleichheit von (5.126) und (5.129) folgt, wie die beiden Integrationsmaße $dx dy$ und $d\rho d\varphi$ zusammenhängen:

$$dx dy = \rho d\rho d\varphi. \quad (5.130)$$

Einsetzen von (5.130) in (5.123) führt unter Berücksichtigung von (2.24), (2.25) auf

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\rho \rho e^{-\rho^2}. \quad (5.131)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass in kartesischen Koordinaten x , y über die gesamte zweidimensionale Ebene integriert wird, so dass in ebenen Polarkoordinaten über alle möglichen Radien ρ und Winkel φ zu integrieren ist. Die verbleibenden Integrale in (5.131) sind sowohl in ρ als auch in φ elementar und wir erhalten

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \pi, \quad (5.132)$$

so dass sich schließlich (5.120) ergibt. In den Übungen werden andere Funktionenfolgen $\delta_\epsilon(t)$ untersucht, die im Grenzprozeß $\epsilon \downarrow 0$ die Diracsche Delta-Funktion $\delta(t)$ darstellen.

5.7 Eigenschaften der Diracschen Delta-Funktion

Aus den beiden definierenden Eigenschaften (D1) und (D2) der Diracschen Delta-Funktion lassen sich nun weitere Eigenschaften ableiten, die für konkrete Rechnungen relevant sind. Hierzu erinnern wir zunächst an den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung. Es sei im Intervall $a \leq t \leq b$ sowohl eine stetige Funktion $f(t)$ als auch eine integrierbare Funktion $g(t)$ mit entweder $g(t) \geq 0$ oder $g(t) \leq 0$, d.h. ohne Vorzeichenwechsel, gegeben. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ so, dass gilt

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(\xi) \int_a^b g(t)dt. \quad (5.133)$$

Wir bemerken, dass der Mittelwertsatz (3.62) ein Spezialfall von (5.133) für $g(t) = 1$ ist. Wir betrachten nun den erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (5.133) und identifizieren $g(t)$ mit der Delta-Funktion $\delta(t)$. Dann gilt aufgrund von (D1) und (D2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\mu}^{\mu} f(t)\delta(t)dt = f(\xi) \int_{-\mu}^{\mu} \delta(t)dt = f(\xi), \quad \xi \in [-\mu, \mu]. \quad (5.134)$$

Aufgrund von (D1) können wir nun aber das μ beliebig klein machen und aus (5.134) folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0). \quad (5.135)$$

Mit Hilfe einer Translation $t' = t - t_0$ ergibt sich dann schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dx = f(t_0). \quad (5.136)$$

Es ist zu beachten, dass man auch (5.136) anstelle von (D1) und (D2) als definierende Eigenschaft der Diracschen Delta-Funktion ansehen kann [3, Kapitel 10]. Eine erste Anwendung von (5.136) besteht darin, dass man das in Abb. 5.8 skizzierte Resultat erhält, indem man den kurzzeitigen Kraftstoß durch $F_{t'}(t) = \delta(t - t')$ realisiert und in (5.89) einsetzt. Ferner ergeben sich aus (5.136) viele weitere Eigenschaften:

- Spezialisiert man (5.136) auf $f(t) = 1$, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1. \quad (5.137)$$

Dies ergibt sich aber auch schon aus (5.119) im Limes $\epsilon \downarrow 0$.

- Es gilt ferner

$$\int_a^b f(t)\delta(t - t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & ; a < t_0 < b \\ f(t_0)/2 & ; a = t_0 \text{ oder } b = t_0 \\ 0 & ; t_0 < a < b \text{ oder } a < b < t_0 \end{cases}. \quad (5.138)$$

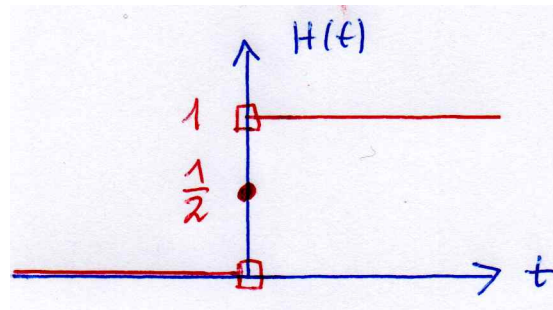


Abbildung 5.11: Graphische Darstellung der Heaviside-Funktion (5.140).

Den ersten und letzten Fall von (5.138) kann man mit Hilfe von (5.136) dadurch beweisen, dass man eine Funktion $F(t)$ einführt, die im Intervall $a \leq t \leq b$ mit $f(t)$ übereinstimmt und außerhalb verschwindet. Demgegenüber läßt sich der zweiten Fall von (5.138) begründen, indem man das Intervall verdoppelt, so dass t_0 im Innern liegt. Dann liefert die Integration über das Gesamtintervall $f(t_0)$, so dass die Integration über jedes Teilintervall die Hälfte dieses Wertes liefert.

- Die Delta-Funktion $\delta(t)$ kann man trotz ihrer extremen Singularität differenzieren und für $\delta'(t)$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)dt = -f'(t_0). \quad (5.139)$$

Auf der linken Seite kann nämlich eine partielle Integration durchgeführt werden, bei der die Randterme wegen (D1) verschwinden, und (5.136) führt dann unmittelbar auf (5.139).

- Die Stammfunktion der Delta-Funktion $\delta(t)$ ist die Heaviside-Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ 1/2 & ; t = 0 \\ 1 & ; t > 0 \end{cases} \quad (5.140)$$

die auch als Stufen- oder Sprungfunktion bezeichnet wird, siehe Abb. 5.11, so dass gilt:

$$H'(t) = \delta(t). \quad (5.141)$$

In der Tat ergibt sich die Heaviside-Funktion (5.140) aufgrund von (5.141) gemäß

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t')dt', \quad (5.142)$$

indem (5.138) angewandt wird.

Weitere Eigenschaften der Delta-Funktion, die hier nicht behandelt werden konnten, werden dann in den Übungen betrachtet. Hier werden wir aber noch die Fourier-Transformierte der Delta-Funktion diskutieren, wobei wir zunächst in die Methode der Fourier-Transformation einführen wollen.

5.8 Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist eine mathematische Methode, bei der man für eine Funktion $f(t)$ der Zeit t eine Spektralanalyse durchführt. Hierzu zerlegen wir diese Funktion $f(t)$ in ein kontinuierliches Spektrum, in dem wir deren Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (5.143)$$

mit der Frequenz ω einführen. Hierbei stellt \mathcal{F} eine Integraltransformation dar, die vom Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier im Jahr 1822 erstmalig betrachtet wurde. In (5.143) deuten die runden bzw. eckigen Klammern an, dass die Fourier-Transformierte sowohl eine Funktion von ω als auch ein Funktional von $f(t)$ ist. Hierbei bezeichnet ein Funktional die Abbildung der Abbildung einer Funktion auf die Menge der reellen oder komplexen Zahlen. In der Mathematik wird gezeigt, dass (5.143) existiert, sofern die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (5.144)$$

gilt. Offenbar erfordert die absolute Integrierbarkeit (5.144), dass die Funktion $f(t)$ verschwindet, falls $t \rightarrow \pm\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0. \quad (5.145)$$

Wir setzen wir von jetzt an eine solche absolute Integrierbarkeit von $f(t)$ stets voraus. Für die Fourier-Transformation gelten dann die folgenden Eigenschaften:

- Die Linearität der Integration überträgt sich auf die Fourier-Transformation. Für zwei konstante Koeffizienten a_1, a_2 und zwei Funktionen $f_1(t), f_2(t)$ gilt dann

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)](\omega) = a_1 \mathcal{F}[f_1(t)](\omega) + a_2 \mathcal{F}[f_2(t)](\omega). \quad (5.146)$$

- Es gilt das Skalengesetz

$$\mathcal{F}[f(\alpha t)](\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0. \quad (5.147)$$

Zum Beweis von (5.147) führt man im Integral (5.143) die Substitution $t' = \alpha t$ durch.

- Entsprechend folgt die Verschiebungsrelation

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)](\omega) \quad (5.148)$$

aus der Translation $t' = t - t_0$.

- Eine weitere nützliche Beziehung gibt die Fourier-Transformierte einer Ableitung an:

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = i\omega \mathcal{F}[f(t)](\omega). \quad (5.149)$$

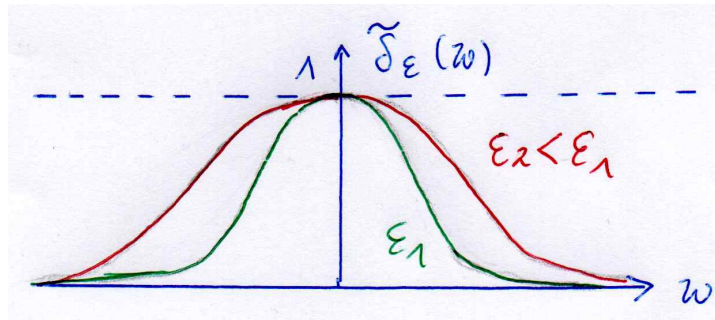


Abbildung 5.12: Folge der Gauß-Funktionen (5.153).

Zum Beweis verwenden wir (5.143) und führen eine partielle Integration durch

$$\mathcal{F}[f'(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f'(t) dt = \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (5.150)$$

Die Randterme verschwinden, da aufgrund der absoluten Integrierbarkeit (5.144) die Funktion $f(t)$ die Eigenschaft (5.145) besitzt, und mit Hilfe von (5.143) geht dann (5.150) unmittelbar in (5.149) über.

Und schließlich erwähnen wir noch, dass für die Fourier-Transformierte (5.143) die vereinfachende Notation

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \tilde{f}(\omega) \quad (5.151)$$

gebräuchlich ist, die wir von jetzt ab verwenden werden.

5.9 Fourier-Transformation der Delta-Funktion

Wir berechnen nun die Fourier-Transformierte (5.143), (5.151) der Gauß-Funktionen (5.118)

$$\tilde{\delta}_\epsilon(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta_\epsilon(t) dt. \quad (5.152)$$

Einsetzen von (5.118) in (5.152), eine quadratische Ergänzung und das Gauß-Integral (5.120) führen dann auf

$$\tilde{\delta}_\epsilon(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2\epsilon^2} \left[(t + i\epsilon^2\omega)^2 + \omega^2\epsilon^4 \right] \right\} dt = \exp \left(-\frac{\epsilon^2}{2} \omega^2 \right). \quad (5.153)$$

Die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktionen (5.118) sind demnach wieder Gauß-Funktionen (5.153), siehe Abb. 5.12. Wir vergleichen nun die Breiten der Gauß-Funktionen (5.118) im Zeitbereich

$$\Delta_t = \epsilon \quad (5.154)$$

mit den entsprechenden Breiten der Gauß-Funktionen (5.153) im Frequenzbereich

$$\Delta_\omega = \frac{1}{\epsilon} \quad (5.155)$$

und stellen fest, dass sie durch eine Unschärferelation miteinander verbunden sind:

$$\Delta_t \Delta_\omega = 1. \quad (5.156)$$

Im Limes $\epsilon \downarrow 0$ geht die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion (5.152) wegen (5.117) in die Fourier-Transformierte der Diracschen Delta-Funktion

$$\tilde{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt \quad (5.157)$$

über gemäß

$$\tilde{\delta}(\omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \tilde{\delta}_\epsilon(\omega). \quad (5.158)$$

Und aus (5.153) und (5.158) lesen wir ab:

$$\tilde{\delta}(\omega) = 1. \quad (5.159)$$

Dieses Ergebnis erhalten wir aber natürlich auch direkt, indem wir das Fourier-Integral (5.157) mit Hilfe der Eigenschaft (5.135) der Dirac-Funktion auswerten.

5.10 Inverse Fourier-Transformation

Wir zeigen nun, dass die Invertierung der Fourier-Transformation (5.152) gegeben ist durch

$$\delta_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{\delta}_\epsilon(\omega). \quad (5.160)$$

Einsetzen von (5.153) in die rechte Seite von (5.160) sowie eine quadratische Ergänzung und das Gauß-Integral (5.120) führen tatsächlich auf (5.118):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\omega^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\epsilon^2}{2}\left[\left(\omega - \frac{it}{\epsilon^2}\right)^2 + \frac{t^2}{\epsilon^4}\right]\right\} = \delta_\epsilon(t). \quad (5.161)$$

Im Limes $\epsilon \downarrow 0$ folgt aus (5.117) und (5.158)–(5.160) die Fourier-Darstellung der Delta-Funktion:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t}. \quad (5.162)$$

Motiviert durch das Resultat (5.160) versuchen wir nun, die Invertierung der Fourier-Transformation (5.143) für eine beliebige Funktion zu finden und werten daher den Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) \quad (5.163)$$

aus. Einsetzen der Fourier-Transformierten (5.143) und eine Vertauschung der Reihenfolge der Integration führt dann auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t'-t)}. \quad (5.164)$$

Das ω -Integral ist gerade die Fourier-Darstellung der Delta-Funktion (5.162), so dass sich (5.164) reduziert auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t' - t). \quad (5.165)$$

Aufgrund von (5.136) erhalten wir demnach das Resultat, dass das Inverse der Fourier-Transformation (5.143) gegeben ist durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega). \quad (5.166)$$

5.11 Greensche Funktion

Zum Abschluß dieses Kapitels bestimmen wir noch die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5.68) auf einem anderen Weg als in Abschnitt 5.3, indem wir (5.89) als Lösungsansatz verwenden. Er besagt, dass zwischen der Kraft $F(t)$ als Ursache und der Auslenkung $x_p(t)$ als Wirkung ein linearer Zusammenhang besteht, der durch die kausale Greensche Funktion

$$G_c(t, t') \begin{cases} \neq 0 & ; \quad t \geq t' \\ = 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases} \quad (5.167)$$

festgelegt wird. Setzen wir (5.89) in die inhomogene Differentialgleichung (5.68) ein und beachten wir die Identität (5.137), so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{\partial^2 G_c(t, t')}{\partial t'^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t'} + \omega_0^2 G_c(t, t') \right] F(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{F(t')}{m} \delta(t - t'). \quad (5.168)$$

Da (5.168) für jede Kraft $F(t)$ gelten soll, genügt die Greensche Funktion $G_c(t, t')$ der Differentialgleichung (5.68) mit der Delta-Funktion als Inhomogenität, siehe Abb. 5.8:

$$\frac{\partial^2 G_c(t, t')}{\partial t'^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t'} + \omega_0^2 G_c(t, t') = \frac{1}{m} \delta(t - t'). \quad (5.169)$$

Zur Lösung von (5.169) stellen wir zunächst fest, dass $G_c(t, t')$ für $t \neq t'$ aufgrund von (D1) die homogene Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial^2 G_c(t, t')}{\partial t'^2} + 2\kappa \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t'} + \omega_0^2 G_c(t, t') = 0, \quad t \neq t'. \quad (5.170)$$

Unter Berücksichtigung der Kausalität (5.167) stellt $G_c(t, t')$ für $t \geq t'$ eine Linearkombination der beiden Fundamentallösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der homogenen Differentialgleichung dar:

$$G_c(t, t') = \begin{cases} c_1(t')x_1(t) + c_2(t')x_2(t) & ; \quad t \geq t' \\ 0 & ; \quad t \leq t' \end{cases}. \quad (5.171)$$

Die beiden Entwicklungskoeffizienten $c_1(t')$ und $c_2(t')$ werden durch das Verhalten der Greenschen Funktion $G_c(t, t')$ an der Stelle $t = t'$ bestimmt. Hierzu fordert man einerseits, dass $G_c(t, t')$ bei $t = t'$ stetig ist:

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[G_c(t, t') \Big|_{t=t'+\epsilon} - G_c(t, t') \Big|_{t=t'-\epsilon} \right] = 0. \quad (5.172)$$

Einsetzen von (5.171) in (5.172) führt auf die erste Bedingung

$$c_1(t')x_1(t') + c_2(t')x_2(t') = 0. \quad (5.173)$$

Andererseits läßt man zu, dass die zeitliche Ableitung $\partial G_c(t, t')/\partial t$ an der Stelle $t = t'$ einen Sprung aufweist. Die Größe dieses Sprungs berechnet man, indem man (5.169) bezüglich t von $t = t' - \epsilon$ bis $t = t' + \epsilon$ integriert und den Grenzübergang $\epsilon \downarrow 0$ betrachtet:

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \frac{\partial^2 G_c(t, t')}{\partial t^2} + 2\kappa \underbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t}}_{\rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \downarrow 0} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt G_c(t, t')}_{\rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \downarrow 0} = \frac{1}{m} \underbrace{\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} dt \delta(t - t')}_{=1 \text{ nach (D2)}}. \quad (5.174)$$

Dabei verschwinden der zweite und der dritte Term von (5.174) im Limes $\epsilon \downarrow 0$ aufgrund der Stetigkeit der Greenschen Funktion gemäß (5.172). Somit erhalten wir aus dem ersten Term von (5.174) schließlich die Sprungbedingung

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\left. \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'+\epsilon} - \left. \frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t} \right|_{t=t'-\epsilon} \right] = \frac{1}{m}. \quad (5.175)$$

Die Ableitung von (5.171) bezüglich t führt auf

$$\frac{\partial G_c(t, t')}{\partial t} = \begin{cases} c_1(t')\dot{x}_1(t) + c_2(t')\dot{x}_2(t) & ; t \geq t' \\ 0 & ; t \leq t' \end{cases}, \quad (5.176)$$

so dass man aus (5.175) die zweite Bedingung

$$c_1(t')\dot{x}_1(t') + c_2(t')\dot{x}_2(t') = \frac{1}{m} \quad (5.177)$$

erhält. Die beiden algebraischen Gleichungen (5.173) und (5.177) stellen ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $c_1(t')$ und $c_2(t')$ dar:

$$\begin{pmatrix} x_1(t') & x_2(t') \\ \dot{x}_1(t') & \dot{x}_2(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t') \\ c_2(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \quad (5.178)$$

Mit Hilfe von (5.57), (5.58) und der Wronski-Determinante (5.82) lässt sich das inhomogene lineare Gleichungssystem unmittelbar lösen

$$\begin{pmatrix} c_1(t') \\ c_2(t') \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t')} \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t') & -x_2(t') \\ -\dot{x}_1(t') & x_1(t') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix}, \quad (5.179)$$

so dass wir das Ergebnis

$$c_1(t') = -\frac{x_2(t')}{mW(t')}, \quad c_2(t') = \frac{x_1(t')}{mW(t')} \quad (5.180)$$

erhalten. Einsetzen von (5.180) in (5.171) führt schließlich auf das schon in (5.90) abgeleitete Ergebnis für die Greensche Funktion.

5.12 Fourier-Transformation der Greenschen Funktion

Und schließlich zeigen wir, wie man die inhomogene Differentialgleichung (5.169) für die Greensche Funktion $G_c(t, t')$ mit der Methode der Fourier-Transformation löst. Hierzu berücksichtigen wir, daß die Greensche Funktion $G_c(t, t')$ gemäß (5.96) nur von der Zeitdifferenz $t - t'$ abhängen kann, da die zu (5.169) gehörende homogene Differentialgleichung nicht explizit von der Zeit abhängt. Die Fourier-Zerlegung der Greenschen Funktion $G_c(t, t')$ lautet deshalb in Analogie zu (5.166):

$$G_c(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i\omega'(t-t')} \tilde{G}_c(\omega'). \quad (5.181)$$

Außerdem verwenden wir die Fourier-Zerlegung der Inhomogenität $\delta(t - t')$ von (5.169), die sich aus (5.162) ergibt:

$$\delta(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i\omega'(t-t')}. \quad (5.182)$$

Das Einsetzen der Fourier-Zerlegungen (5.181) und (5.182) in die inhomogene Differentialgleichung (5.169) führt auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \left(-\omega'^2 + 2i\kappa\omega' + \omega_0^2 \right) \tilde{G}_c(\omega') e^{i\omega'(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{m} e^{i\omega'(t-t')}. \quad (5.183)$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Exponentialfunktionen $e^{i\omega'(t-t')}$ läßt sich aus (5.183) unmittelbar eine algebraische Identität der Integranden ablesen:

$$\left(-\omega'^2 + 2i\kappa\omega' + \omega_0^2 \right) \tilde{G}_c(\omega') = \frac{1}{m}, \quad (5.184)$$

aus der die Fourier-Transformierte der Greenschen Funktion bestimmt werden kann:

$$\tilde{G}_c(\omega') = \frac{-1}{m (\omega'^2 - 2i\kappa\omega' - \omega_0^2)}. \quad (5.185)$$

Setzt man (5.185) in (5.181) ein, so ist die Greensche Funktion $G_c(t - t')$ bis auf ein Frequenzintegral bestimmt:

$$G_c(t - t') = \frac{-1}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{e^{i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 - 2i\kappa\omega' - \omega_0^2}. \quad (5.186)$$

Die Nullstellen des Nenners von (5.186) liegen bei

$$\omega_{\pm} = i\kappa \pm \omega, \quad (5.187)$$

wobei wir uns wieder auf den Fall der schwachen Dämpfung (5.31) beschränken, wo die Frequenz (5.33) auftritt. Wir führen nun die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\omega'^2 - 2i\kappa\omega' - \omega_0^2} = \frac{A_+}{\omega' - \omega_+} + \frac{A_-}{\omega' - \omega_-} \quad (5.188)$$

durch, bei der die Koeffizienten A_{\pm} auftreten. Bringt man die rechte Seite in (5.188) auf den Hauptnenner, so ergeben sich die Koeffizienten A_{\pm} aus folgendem inhomogenen linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_- & \omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.189)$$

Die Lösung von (5.189) mit Hilfe von (5.57) und (5.58) führt unter Beachtung von (5.187) auf

$$A_{\pm} = \frac{\pm 1}{2\omega}. \quad (5.190)$$

Nach (5.187)–(5.190) zerfällt das Frequenzintegral (5.186) für die Greensche Funktion in

$$G_c(t-t') = \frac{-1}{4\pi m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left(\frac{1}{\omega' - i\kappa - \omega} - \frac{1}{\omega' - i\kappa + \omega} \right) e^{i\omega'(t-t')}. \quad (5.191)$$

Substituiert man im ersten Integral $\omega'' = \omega' - \omega$ und im zweiten Integral $\omega'' = \omega' + \omega$, so lassen sich beide zu einem Integranden zusammenfassen:

$$G_c(t-t') = \frac{-i \sin \omega(t-t')}{2\pi m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \frac{e^{i\omega''(t-t')}}{\omega'' - i\kappa}. \quad (5.192)$$

Verwendet man nun die Eulerschen Formel (4.48), so führen Symmetrieüberlegungen auf einen reellen Ausdruck:

$$G_c(t-t') = \frac{\sin \omega(t-t')}{2\pi m\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \frac{\kappa \cos \omega''(t-t') + \omega'' \sin \omega''(t-t')}{\omega'' - i\kappa}. \quad (5.193)$$

Die verbleibenden Integrale lassen sich wie folgt berechnen [19, (3.723)]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}, \quad a > 0, \quad (5.194)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} = \pi e^{-ab}, \quad a > 0. \quad (5.195)$$

Damit folgt aus (5.193) die explizite Gestalt der kausalen Greenschen Funktion bei schwacher Dämpfung (5.95) im Falle $t > t'$.

Kapitel 6

Zweikörper-Problem

Bisher haben wir uns ausführlich mit dem harmonischen Oszillator als einem Prototyp für ein eindimensionales mechanisches System mit einem Massenpunkt beschäftigt. Nun wollen wir uns wichtigen mehrdimensionalen mechanischen Systemen mit mehr als einem Massenpunkt zuwenden. In diesem Kapitel betrachten wir ein dreidimensionales mechanisches System aus zwei Massenpunkten m_1 und m_2 , bei dem die Wechselwirkung zwischen den Massen durch ein Zentralpotential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (6.1)$$

beschrieben wird. Zunächst zeigen wir, daß sich dieses Zweikörper-Problem auf ein effektives Einkörper-Problem abbilden läßt. Anschließend werden wir für das effektive Einkörper-Problem die Winkel eliminieren, und die Bewegung anhand der verbleibenden Radialgleichung qualitativ diskutieren.

6.1 Problemstellung

Bei einem Zentralpotential (6.1) wirken zwischen den beiden Massen die Kräfte

$$\vec{F}_{12} = -\text{grad}_{\vec{r}_1} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (6.2)$$

$$\vec{F}_{21} = -\text{grad}_{\vec{r}_2} V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (6.3)$$

die dem dritten Newtonschen Axiom (3.8) von “actio = - reactio” genügen, siehe Abb. 6.1a). In diesen Rahmen fällt beispielsweise die attraktive Newtonsche Gravitationswechselwirkung, bei der das Zentralpotential gegeben ist durch

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (6.4)$$

siehe Abb. 6.1b). Hierbei beinhaltet die Abkürzung

$$\alpha = Gm_1m_2 \quad (6.5)$$

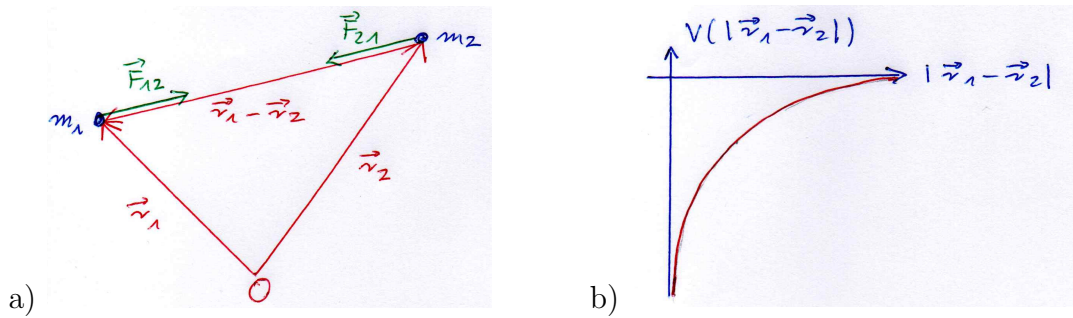


Abbildung 6.1: a) Ortsvektoren und Kräfte (6.2), (6.3) bei einem Zentralpotential (6.1), wie sie z.B. beim b) attraktiven Newtonschen Gravitationspotential (6.4), (6.5) auftreten.

die Newtonsche Gravitationskonstante

$$G = (6,67430 \pm 0,00015) \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}, \quad (6.6)$$

die von allen Naturkonstanten am ungenauesten bekannt ist. Wir wollen uns aber in diesem Kapitel auf die physikalischen Konsequenzen eines allgemeinen Zentralpotentials (6.1) beschränken und die Spezialisierung auf das Newtonsche Gravitationspotential (6.4) erst im nächsten Kapitel durchführen.

6.2 Symmetrieüberlegungen

Die Kräfte (6.2) und (6.3) führen zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen der Massenpunkte m_1 und m_2 :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = F_{12} = - \frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (6.7)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = F_{21} = \frac{\partial V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)}{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (6.8)$$

Hierbei handelt es sich um ein gekoppeltes System von sechs gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das die Zeitabhängigkeit der Ortsoperatoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 der Massenpunkte m_1 und m_2 festlegt. Dieses Zweikörper-Problem besitzt die folgenden Symmetrien:

1. Invarianz unter räumlichen Translationen,
2. Invarianz unter Rotationen bezüglich der Verbindungsachse $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$
3. Invarianz unter zeitlichen Translationen.

Aufgrund dieser Symmetrien lässt sich das Zweikörper-Problem schrittweise vereinfachen:

1. Die Lösung der Schwerpunktbewegung führt auf ein effektives Einkörper-Problem der Relativbewegung.

2. Die Lösung der Winkelbewegung führt auf eine radiale Differentialgleichung zweiter Ordnung.
3. Eine Integration der Radialgleichung führt auf den Energieerhaltungssatz und damit zu einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Damit lässt sich das Problem für ein allgemeines Zentralpotential (6.1) bis auf ein Integral lösen. Zur Ausführung dieses Integrals muss das Zentralpotential spezifiziert werden.

6.3 Reduktion auf Einkörper-Problem

Die Invarianz des Problems unter räumlichen Translationen tritt deutlicher hervor, wenn man von den Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 der Massenpunkte zu den Schwerpunktkoordinaten

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6.9)$$

und den Relativkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (6.10)$$

übergeht. Dadurch entkoppelt man nämlich die gekoppelten Bewegungsgleichungen (6.7) und (6.8) in unabhängige Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkts- und die Relativbewegung. Für die Schwerpunktsbewegung erhalten wir aus (6.9)

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}, \quad (6.11)$$

so dass wir aus (6.7) und (6.8) folgern

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \quad (6.12)$$

mit der Gesamtmasse

$$M = m_1 + m_2. \quad (6.13)$$

Dabei ist die Gesamtmasse M per definitionem immer größer als jede der beiden Massen m_1 , m_2 . Im Falle von $m_1 = m_2 = m$ erhalten wir beispielsweise $M = 2m$. Aus (6.12) lesen wir die Erhaltung des Schwerpunktsimpuls ab, so dass sich der Schwerpunkt längs einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit bewegt:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t. \quad (6.14)$$

Die Relativbewegung dagegen wird bestimmt durch (6.7), (6.8) und (6.10):

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\partial V(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (6.15)$$

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$\mu \ddot{\vec{r}} = - \frac{\partial V(|\vec{r}|)}{\partial |\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = - \text{grad}_{\vec{r}} V(|\vec{r}|), \quad (6.16)$$

indem man die reduzierte Masse μ einführt:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.17)$$

Dabei ist die reduzierte Masse μ definitionsgemäß immer kleiner als jede der beiden Massen m_1, m_2 . Sind z.B. beide Massen gleich, gilt also $m_1 = m_2 = m$, so erhalten wir $\mu = m/2$. Aus (6.16) lesen wir ab, dass die Relativbewegung ein effektives Einkörper-Problem darstellt. Die Relativbewegung erfolgt also so, als ob sich ein Teilchen mit der reduzierten Masse μ in einem Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ bewegen würde.

Damit haben wir für das Zweikörper-Problem ein physikalisches Modell gewonnen. Ein Modell in der Physik ist ein ideelles, also gedankliches, oder aber ein materielles und damit gegenständliches Objekt, das als Ersatzobjekt für ein Original genutzt wird. Sprachlich wird dies häufig dadurch zum Ausdruck gebracht, dass man den Konjunktiv verwendet: Das Original verhält sich so, als ob es das Ersatzobjekt sei. Es ist zu beachten, dass das Modell immer eine Vereinfachung des Originals und damit der Wirklichkeit ist. In einigen Eigenschaften, wie hier der Relativbewegung, stimmt das Modell, also die Bewegung des Teilchens mit der reduzierten Masse, mit dem Original, hier dem Zweikörper-Problem, überein. Andere Eigenschaften, wie hier die Schwerpunktbewegung der beiden Massen, werden dagegen durch das physikalische Modell nicht korrekt beschrieben. Ein Modell ist damit weder richtig noch falsch, sondern nur für einen bestimmten Zweck geeignet oder nicht geeignet. Im Laufe der Vorlesung werden wir noch weitere Beispiele für solche physikalische Modelle kennenlernen.

6.4 Reduktion auf Radialgleichung

Für die Relativbewegung ist der Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (6.18)$$

eine Erhaltungsgröße, da dessen zeitliche Ableitung aufgrund von (6.16) verschwindet:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}. \quad (6.19)$$

Demnach befinden sich Ortsvektor \vec{r} und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$ zu allen Zeiten t in einer Ebene senkrecht zum Drehimpulsvektor \vec{L} . Wir wählen nun ein spezielles Koordinatensystem, bei dem der Drehimpulsvektor \vec{L} in z -Richtung zeigt, so dass die Bewegung des effektiven Teilchens in der xy -Ebene erfolgt. Im Falle von ebenen Polarkoordinaten lautet der Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

so dass sich der Geschwindigkeitsvektor zu

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

und der Beschleunigungsvektor zu

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} \cos \varphi - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \rho \ddot{\varphi} \sin \varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{\rho} \sin \varphi + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi + \rho \ddot{\varphi} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

ergeben. Die Bewegungsgleichung (6.16) geht dann über in

$$\mu(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mu(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Projiziert man (6.23) mit Hilfe von (6.20) auf die Einheitsvektoren in radialer Richtung

$$\vec{e}_\rho = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

und in tangentialer Richtung

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

so erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\mu(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}, \quad (6.26)$$

$$2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} = 0. \quad (6.27)$$

Berechnen wir den Drehimpulsvektor (6.18) im Falle der ebenen Polarkoordinaten (6.20) und (6.21), so führt dies auf

$$\vec{L} = \mu \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \rho \cos \varphi & \rho \sin \varphi & 0 \\ \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi & \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = L \vec{e}_z, \quad L = \mu \rho^2 \dot{\varphi}. \quad (6.28)$$

Für die zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors folgt hieraus:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dL}{dt} \vec{e}_z, \quad \frac{dL}{dt} = \mu \rho (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}). \quad (6.29)$$

Demnach führt (6.27) auf die Erhaltung (6.19) des Drehimpulsvektors \vec{L} und der Betrag des Drehimpulsvektors stellt ein Integral der Bewegung dar:

$$L = |\vec{L}| = \mu\rho^2\dot{\varphi} = \text{konstant} . \quad (6.30)$$

Mit Hilfe von (6.30) lässt sich die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in (6.26) eliminieren

$$\mu\ddot{\rho} = \frac{L^2}{\mu\rho^3} - \frac{\partial V(\rho)}{\partial\rho} . \quad (6.31)$$

Der Drehimpuls führt demnach zu einer Zentrifugalkraft in der radialen Bewegungsgleichung. Man kann sie auf die Form einer eindimensionalen Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\rho)}{\partial\rho} \quad (6.32)$$

bringen, wobei sich das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ aus dem Zentralpotential $V(\rho)$ und einem repulsiven Zentrifugalpotential additiv zusammensetzt:

$$V_{\text{eff}}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} . \quad (6.33)$$

6.5 Energieerhaltung

Multiplikation von (6.32) mit $\dot{\rho}$ führt auf

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) \right] = 0 , \quad (6.34)$$

so dass die Energie des Einkörper-Problems erhalten ist:

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = \text{konstant} . \quad (6.35)$$

Die Separation der Variablen

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)]} \quad (6.36)$$

ergibt eine implizite Bestimmungsgleichung für $\rho(t)$:

$$t = t_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho(t)} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)]}} . \quad (6.37)$$

Setzt man die so bestimmte Zeitabhängigkeit der Radialkoordinate $\rho(t)$ in (6.30) ein, so ergibt sich die Zeitabhängigkeit der Winkelkoordinate $\varphi(t)$ gemäß

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \frac{L}{\mu\rho^2(t')} dt' . \quad (6.38)$$

Häufig ist man aber nicht daran interessiert, zu welchem Zeitpunkt t welcher Radius $\rho(t)$ und welcher Winkel $\varphi(t)$ vorliegt, sondern man möchte lediglich die Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$ bestimmen. In einem solchen Falle eliminiert man aus $\rho = \rho(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ die Zeit t , um die Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$ zu gewinnen. Es ist aber auch möglich, die Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$ direkt zu bestimmen. Unter Verwendung von (6.30) und (6.36) erhält man hierzu:

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}} = \pm \frac{\frac{L}{\mu\rho^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V_{\text{eff}}(\rho)]}}. \quad (6.39)$$

Die Integration von (6.39) ergibt dann eine implizite Bestimmungsgleichung für die Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho(\varphi)} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2\mu [E - V_{\text{eff}}(\rho)]}} d\rho. \quad (6.40)$$

6.6 Diskussion der Bewegung

Auch ohne explizite Lösung der verbleibenden Integrale in (6.37), (6.38) und (6.40) lassen sich qualitative Aussagen über die Bewegung machen.

6.6.1 Newtonsches Gravitationspotential

Hierzu betrachten wir als Beispiel zunächst das Newtonsche Gravitationspotential (6.4), das gemäß (6.33) zum effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (6.41)$$

führt. Zeichnet man den Graphen von $V_{\text{eff}}(\rho)$, dann gibt dessen Abstand zur Horizontalen E gemäß (6.35) die jeweilige kinetische Energie $\mu\dot{\rho}^2/2$ an. Abhängig vom Vorzeichen von $\dot{\rho}$ läuft das Teilchen zum Zentrum hin ($\dot{\rho} < 0$) oder nach außen ($\dot{\rho} > 0$). Die Bewegung des Teilchens ist auf diejenigen Bereiche beschränkt, für die $E - V_{\text{eff}}(\rho) \geq 0$ ist. An den Umkehrpunkten ρ_i mit

$$E = V_{\text{eff}}(\rho_i) \quad (6.42)$$

kehrt sich die Bewegung um. Man kann grundsätzlich zwei verschiedene Bewegungstypen unterscheiden, siehe Abb. 6.2;

- Ist $E < 0$, so liegt eine gebundene Bewegung vor, die durch ρ_1 und ρ_2 eingegrenzt ist. Wie wir noch sehen werden, handelt es sich bei der Bahnkurve um eine Ellipse bzw. einen Kreis. Dieser Fall liegt z.B. bei der Bewegung der Planeten um die Sonne vor.

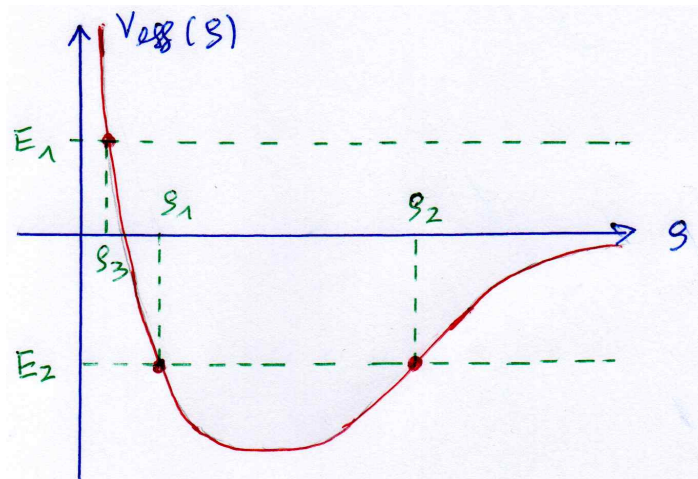


Abbildung 6.2: Abhängig davon, ob die Energie (6.42) an den Umkehrpunkten ρ_i negativ oder positiv ist, ergeben sich verschiedene Bewegungstypen.

- Ist $E > 0$, so liegt eine Streulösung vor. Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen und fliegt zum Umkehrpunkt ρ_3 . Dort kehrt sich die Bewegung um und das Teilchen fliegt vom Zentrum weg. Wie wir noch sehen werden, handelt es sich bei der Bahnkurve um eine Hyperbel bzw. eine Parabel. Dieser Fall liegt z.B. bei der Bewegung von Kometen vor.

6.6.2 Beliebige Zentralpotential

Abschließend diskutieren wir im Falle eines beliebigen Zentralpotentials $V(\rho)$ die gebundene Bewegung zwischen zwei Umkehrpunkten ρ_1 und ρ_2 etwas eingehender. Die Bewegung erfolgt in der xy -Ebene vollständig in dem ringförmigen Gebiet, das durch die Kreise $\rho = \rho_1$ und $\rho = \rho_2$ begrenzt wird. Das bedeutet jedoch nicht, daß die Bahn geschlossen ist. Während sich ρ von ρ_1 bis ρ_2 und dann wieder bis ρ_1 ändert, dreht sich der Ortsvektor gemäß (6.40) um den Winkel

$$\Delta\varphi = \pm 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2\mu [E - V_{\text{eff}}(\rho)]}} d\rho. \quad (6.43)$$

Die Bahn bildet nur dann eine geschlossene Kurve, wenn dieser Winkel ein rationaler Teil von 2π ist, d.h. wenn

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n}{m} \quad (6.44)$$

mit ganzen Zahlen n, m gilt. Nach m -maliger Wiederholung der zugehörigen Zeitperiode hat der Ortsvektor n ganze Umläufe durchgeführt und fällt mit dem Anfangswert wieder zusammen, d.h. die Kurve schließt sich. Es existieren nur zwei Zentralpotentiale, das $1/\rho$ - und das ρ^2 -Potential, bei denen alle Bahnen einer begrenzten Bewegung geschlossen sind [20]. Bei einer beliebigen Form des Zentralpotentials $V(\rho)$ wird der Winkel $\Delta\varphi$ kein rationaler Teil von 2π sein. Die Bahn ist dann nicht geschlossen. Beispielsweise wird das Newtonsche Gravitationspo-

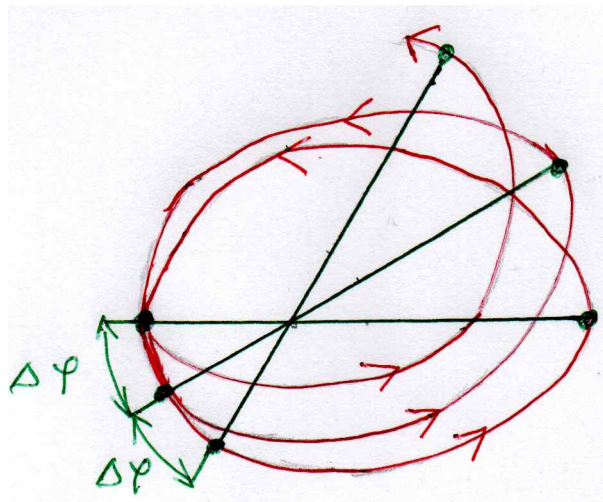


Abbildung 6.3: Rosettenbahn eines Planeten, bei der nacheinander Ellipsen durchlaufen werden, deren große Halbachse sich während des Durchlaufens langsam dreht.

tential (6.4) der Sonne durch die Gravitationspotentiale anderer Planeten gestört. Nach jedem Umlauf des Planeten ist dann die Linie vom Zentrum zum sonnennächsten Punkt, dem Perihel der Bahn, ein wenig gedreht, siehe Abb. 6.3. Beispielsweise ist die Periheldrehung für den Merkur von der Größenordnung einer Bogensekunde pro Umlauf um die Sonne, die etwa 88 Tage dauert. Sie wird zu etwa 9/10 durch die Gravitationspotentiale anderer Planeten verursacht. Das restliche 1/10 der Periheldrehung des Merkur ist zwar mit 43 Bogensekunden pro Jahrhundert relativ klein, stellte aber bis Ende des 19. Jahrhunderts ein ungelöstes astronomisches Rätsel dar. Als Lösungsvorschläge kursierten Staub in der Nähe der Sonne, die Abplattung der Sonne oder ein hypothetischer Planet innerhalb der Merkurbahn, für den sogar schon der Name Vulkan festgelegt wurde. Erst durch die Allgemeine Relativitätstheorie, die Albert Einstein im Jahre 1915 veröffentlichte, konnte diese restliche Periheldrehung des Merkur durch eine Unvollständigkeit der Newtonschen Gravitationstheorie erklärt werden.

Kapitel 7

Kepler-Problem

Nun untersuchen wir quantitativ die Bahnkurven, die im Newtonschen Gravitationspotential (6.4) auftreten können. Wir werden sehen, daß die Bahnkurve abhängig von den Erhaltungsgrößen Energie E und Drehimpuls L einen Kreis, eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein kann.

7.1 Bahnkurve

Setzen wir das Newtonsche Gravitationspotential (6.4) in das effektive Potential (6.33) ein, so lautet die implizite Bestimmungsgleichung (6.40) für die Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int_{\rho_0}^{\rho(\varphi)} \frac{L}{\rho^2 \sqrt{2\mu \left[E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \right]}} d\rho. \quad (7.1)$$

Mit Hilfe der naheliegenden Substitution

$$u(\rho) = \frac{1}{\rho}, \quad du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad \implies \quad d\rho = -\rho^2 du \quad (7.2)$$

geht das Integral (7.1) über in

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{L}{\sqrt{2\mu}} \int_{1/\rho(\varphi)}^{1/\rho_0} \frac{du}{\sqrt{E + \alpha u - \frac{L^2}{2\mu} u^2}}. \quad (7.3)$$

Zur Integration von (7.3) kann man das Standardintegral [19][(1.623.1), (2.261)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos \left(\frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C \quad (7.4)$$

verwenden, das den Einschränkungen

$$c < 0, \quad b^2 - 4ac > 0 \quad (7.5)$$

unterliegt. Identifizieren wir die einzelnen Parametern gemäß

$$a = E, \quad b = \alpha, \quad c = -\frac{L^2}{2\mu} < 0, \quad \implies \quad b^2 - 4ac = \alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu} > 0, \quad (7.6)$$

so erhalten wir

$$\varphi = \varphi_0 \pm \left\{ \arccos \left(\frac{\frac{L^2}{\mu\rho_0} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right) - \arccos \left[\frac{\frac{L^2}{\mu\rho(\varphi)} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right] \right\}. \quad (7.7)$$

Wir führen nun als Abkürzung die Konstante

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \pm \arccos \left(\frac{\frac{L^2}{\mu\rho_0} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right) \quad (7.8)$$

ein, die durch den Anfangswinkel φ_0 und den Anfangsradius ρ_0 bestimmt ist. Damit erhalten wir aus (7.7):

$$\varphi - \tilde{\varphi}_0 = \mp \arccos \left[\frac{\frac{L^2}{\mu\rho(\varphi)} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}}} \right], \quad (7.9)$$

bzw. nach einigen algebraischen Umformungen

$$\rho(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\mu}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \frac{2EL^2}{\mu}} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}. \quad (7.10)$$

Beachten wir, dass die Konstante α im Newtonschen Gravitationspotential (6.4) gemäß (6.5) positiv ist, so ergibt sich die endgültige Form der Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$ zu

$$\rho(\varphi) = \frac{\frac{L^2}{\alpha\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}. \quad (7.11)$$

Mit dem Parameter

$$p = \frac{L^2}{\alpha\mu} \quad (7.12)$$

und der Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \quad (7.13)$$

a)	$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu\alpha^2}{2L^2}$	Kreis
	$0 < \varepsilon < 1$	$-\frac{\mu\alpha^2}{2L^2} < E < 0$	Ellipse
	$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Parabel
	$\varepsilon > 1$	$E > 0$	Hyperbel

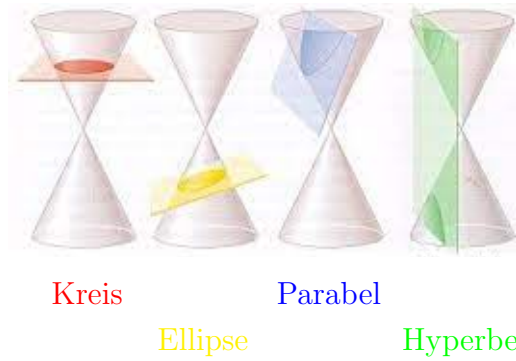


Abbildung 7.1: a) Energie E und Drehimpuls L legen die Exzentrizität (7.13) und damit b) den Kegelschnitt [21] fest.

besitzt (7.11) die Form eines Kegelschnitts:

$$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}. \quad (7.14)$$

Bei einem Kegelschnitt treten abhängig von der Energie E verschiedene Fälle auf, die in der Tabelle von Abb. 7.1 zusammengestellt sind. Wir diskutieren nun getrennt diese möglichen Bahnkurven.

7.2 Ellipse

Wir betrachten zunächst die gebundene Bewegung $-\mu\alpha^2/2L^2 < E < 0$ mit $0 < \varepsilon < 1$ und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{\varphi}_0 = 0$. Aufgrund von (6.20) lautet der Zusammenhang zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (7.15)$$

Einsetzen von (7.15) in (7.14) führt dann auf

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 + \varepsilon \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}. \quad (7.16)$$

Nach einigen algebraischen Umformungen erhalten wir hieraus

$$\frac{\left(x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} = 1. \quad (7.17)$$

Es handelt sich demnach um die Normalform einer Ellipse

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1 \quad (7.18)$$

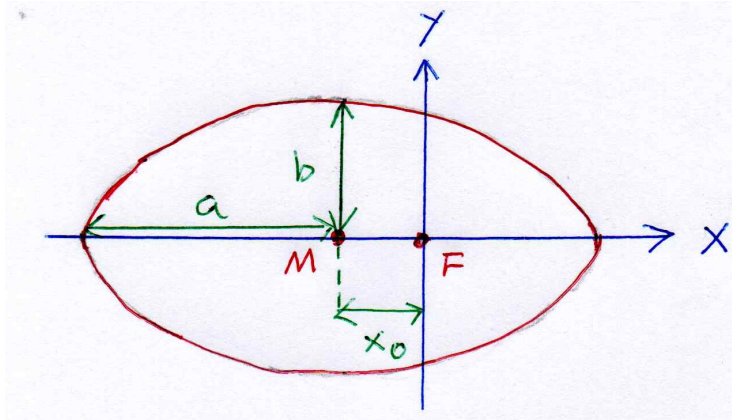


Abbildung 7.2: Beschreibung einer Ellipse mit Mittelpunkt M und Brennpunkt F durch Polar- bzw. kartesische Koordinaten gemäß (7.14) bzw. (7.18).

mit den Halbachsen

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} > b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (7.19)$$

und dem Mittelpunkt

$$x_0 = -\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} < 0, \quad y_0 = 0. \quad (7.20)$$

Die Lage der Ellipse ist in Abb. 7.2 skizziert. Der Ursprung F des Koordinatensystems liegt in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Die Ellipse wird gemäß (7.14) bzw. (7.18) durch Polar- bzw. kartesische Koordinaten beschrieben. Dabei ist im letzteren Falle der Mittelpunkt M der Ellipse durch (7.20) charakterisiert. Abschließend bemerken wir, dass die Ellipse im Falle $E = -\mu\alpha^2/2L^2$, d.h. bei $\varepsilon = 0$, zu einem Kreis entartet, da dann die beiden Halbachsen a und b in (7.19) gleich sind und mit dem Parameter p übereinstimmen sowie $x_0 = y_0 = 0$ gilt.

7.3 Kepler-Gesetze

Wir diskutieren nun die ellipsenförmig gebundene Bewegung für ein System, das aus der Erde mit der Masse $m_1 = 6 \times 10^{24}$ kg und aus der Sonne mit der Masse $m_2 = 2 \times 10^{30}$ kg besteht. Hierbei ergeben sich die drei Keplerschen Gesetze.

7.3.1 Erstes Kepler-Gesetz

Zunächst drücken wir die Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 durch die Schwerpunkt- (6.9) und die Relativkoordinaten (6.10) aus:

$$\begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

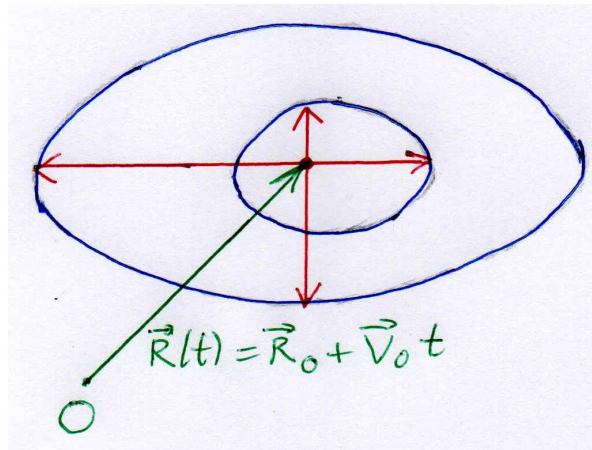


Abbildung 7.3: Bewegung von Erde und Sonne aufgrund des Newtonschen Gravitationsgesetzes: Der Schwerpunkt bewegt sich nach (6.2) gleichförmig und die Relativbewegung besteht aus gegenläufigen Ellipsenbewegungen.

Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem lässt sich mit Hilfe von (5.57), (5.58) nach \vec{r}_1 und \vec{r}_2 auflösen

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ 1 & -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

so dass wir erhalten

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (7.23)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (7.24)$$

Demnach vollführen beide Massenpunkte neben der Schwerpunktsbewegung (6.14) als Relativbewegung noch gegenläufige Ellipsenbewegungen, wobei der gemeinsame Schwerpunkt im Brennpunkt beider Ellipsen liegt, siehe Abb. 7.3. Da unterschiedlich große Masse $m_1 \ll m_2$ vorliegen, lassen sich (7.23), (7.24) nähern durch

$$\vec{r}_1 \approx \vec{R} + \vec{r}, \quad (7.25)$$

$$\vec{r}_2 \approx \vec{R} \quad (7.26)$$

und es ergibt sich das erste Keplersche Gesetz. Die Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt. Bei dieser Näherung werden Terme der Größenordnung des Massenverhältnisses $m_1/m_2 = 3 \times 10^{-6}$ von Erde und Sonne vernachlässigt. Bei einem mittleren Abstand von $1,5 \times 10^8$ km zwischen Erde und Sonne bedeutet dies, dass die Ellipsenbewegung der Sonne Halbachsen von etwa 450 km besitzt, die sehr viel kleiner als ihr Radius von 7×10^5 km sind. Für die Bewegung der Erde sind eher Korrekturen durch den relativ schweren Planeten Jupiter mit der Masse $m_3 = 2 \times 10^{27}$ kg wichtig, die von der Ordnung $m_1/m_3 = 3 \times 10^{-3}$ sind.

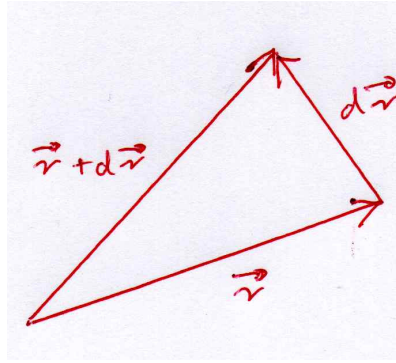


Abbildung 7.4: Der Fahrstrahl zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten \vec{r} und $\vec{r} + d\vec{r}$ überstreicht die Fläche (7.27).

7.3.2 Zweites Kepler-Gesetz

Das zweite Keplersche Gesetz besagt, dass die vom Fahrstrahl pro Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant ist. Dies entspricht gerade dem Drehimpulserhaltungssatz, der schon in Abschnitt 3.15 behandelt wurde. Hierzu betrachten wir die Fläche dF die der Fahrstrahl zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten \vec{r} und $\vec{r} + d\vec{r}$ überstreicht, siehe Abb. 7.4:

$$dF = \frac{1}{2} |\vec{r} \times (\vec{r} + d\vec{r})| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|. \quad (7.27)$$

Unter Verwendung des Drehimpulses (6.18) ergibt sich dann aus (7.27) das zweite Keplersche Gesetz:

$$dF = \frac{|\vec{L}|}{2\mu} dt \quad \implies \quad \frac{dF}{dt} = \frac{L}{2\mu}. \quad (7.28)$$

Dabei geht (7.28) in das frühere Ergebnis (3.105) im Falle von $m_1 \ll m_2$ über, da dann die reduzierte Masse μ gemäß (6.17) näherungsweise mit der leichteren Masse m_1 übereinstimmt.

7.3.3 Drittes Kepler-Gesetz

Das dritte Keplersche Gesetz besagt, dass die Quadrate der Umlaufzeiten T verschiedener Planeten proportional zur kubischen Potenz der großen Halbachsen a ihrer Ellipsenbahnen sind, es gilt also

$$T^2 = k a^3, \quad (7.29)$$

wobei k eine Proportionalitätskonstante darstellt. Um die Beziehung (7.29) abzuleiten, integrieren wir (7.28) über eine Periode und erhalten zunächst

$$F = \int_0^T dt \frac{dF}{dt} = T \frac{L}{2\mu}. \quad (7.30)$$

Andererseits lässt sich die Fläche einer Ellipse in kartesischen Koordinaten wie folgt berechnen. Aus Symmetriegründen reicht es aus, die Viertelellipse im ersten Quadranten zu betrachten.

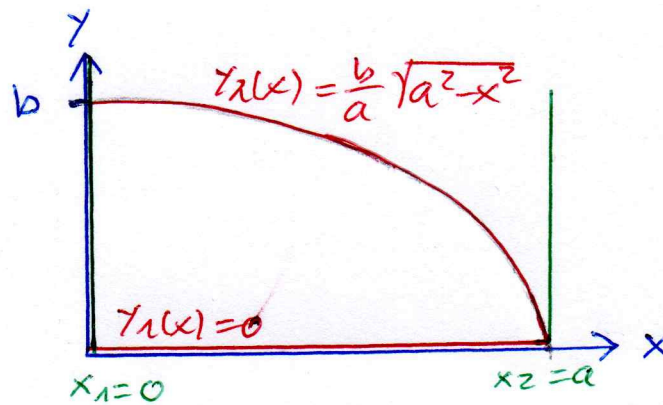


Abbildung 7.5: Illustration der Parametrisierung einer Viertelellipse gemäß (7.31).

Aufgrund der Normalform einer Ellipse (7.18) mit $x_0 = y_0 = 0$ wird diese Viertelellipse parametrisiert durch

$$F/4 = \left\{ (x, y) \mid x_1 = 0 \leq x \leq x_2 = a; \quad y_1(x) = 0 \leq y \leq y_2(x) = b\sqrt{a^2 - x^2}/a \right\}. \quad (7.31)$$

Wie aus der Illustration dieser Parametrisierung in Abb. 7.5 hervorgeht, lässt sich die Fläche der Ellipse dann mit Hilfe des folgenden Integrals berechnen:

$$F = \frac{4b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad (7.32)$$

Dieses Integral kann mit Hilfe der Substitution $x = a \sin t$ vereinfacht werden. Für den Integranden gilt dann $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ aufgrund des trigonometrischen Pythagoras (1.41). Ferner erhalten wir für die Transformation des totalen Differentials $dx = dt a \cos t$. Berücksichtigt man noch die entsprechende Transformation der Integrationsgrenzen, geht (7.32) über in das elementare Integral

$$F = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} \left[t + \frac{1}{2} \cos(2t) \right]_0^{\pi/2} = \pi ab. \quad (7.33)$$

Die Fläche einer Ellipse (7.33) geht im Falle eines Kreises $a = b = R$ in das bekannte Resultat $F = \pi R^2$ über. Setzen wir (7.12) und (7.13) in (7.19) ein, so lauten die Halbachsen der Ellipse:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad (7.34)$$

$$b = \frac{L}{\sqrt{2\mu|E|}}. \quad (7.35)$$

Zwischen den beiden Halbachsen a und b besteht nach (7.34) und (7.35) die Beziehung

$$\frac{b}{L} = \frac{1}{\sqrt{2\mu|E|}} = \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}}. \quad (7.36)$$

Einsetzen von (7.36) in (7.30) und (7.33) führt dann auf (7.29):

$$\frac{T}{2\mu} = \pi a \frac{b}{L} = \pi a \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}} \quad \implies \quad T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} a^3. \quad (7.37)$$

Für die Proportionalitätskonstante k in (7.29) erhalten wir unter Berücksichtigung von (6.5) und (6.17)

$$k = \frac{4\pi^2\mu}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{1}{m_1 + m_2}, \quad (7.38)$$

d.h. sie hängt von der Masse des Planeten m_1 und der Masse der Sonne m_2 ab. Aber im Falle $m_1 \ll m_2$ ist sie näherungsweise von den Planeten unabhängig:

$$k = \frac{4\pi^2}{Gm_2}. \quad (7.39)$$

Damit ist die Proportionalitätskonstante k eine Eigenschaft des Sonnensystems, die nur noch von der Masse der Sonne m_2 abhängt. Dies eröffnet die Möglichkeit, die Masse der Sonne durch die Beobachtung der Planetenbewegungen zu bestimmen. Beispielsweise ergibt sich für die Erde der Zahlenwert

$$k = \frac{T^2}{a^3} = \frac{(365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s})^2}{(1,5 \times 10^{11} \text{ m})^3} = 2,95 \times 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}. \quad (7.40)$$

Mit Hilfe von (7.39) erhalten wir damit für die Masse der Sonne:

$$m_2 = \frac{4\pi^2}{Gk} = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2) \cdot 2,95 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (7.41)$$

Eine weitere spektakuläre Anwendung des dritten Keplerschen Gesetzes ergab sich durch die langjährige Beobachtung von Sagittarius A*, das ca. 28 000 Lichtjahre von unserem Sonnensystem entfernt ist und eine kompakte Quelle von Radiowellen im Zentrum der Milchstraße darstellt, siehe Abb. 7.6a). Ab den 1990er Jahren wurde die Region um Sagittarius A* von zwei unabhängigen Teams um Andrea Ghez am Keck-Observatorium sowie Reinhard Genzel am La-Silla-Observatorium und am Very Large Telescope in mehrjährigen Beobachtungsreihen untersucht. Dabei konnten die Orbits von etwa 50 Sternen genauestens vermessen werden, die als S-Sterne bezeichnet werden. Dabei stellte sich im Laufe der Jahre heraus, dass sich all diese S-Sterne auf elliptischen Bahnen bewegen und dass sich Sagittarius A* jeweils in einem ihrer Brennpunkte befindet, siehe Abb. 7.6b) [22]. Durch Anwendung des dritten Keplerschen Gesetzes konnte festgestellt werden, dass es sich bei Sagittarius A* um ein Objekt von rund 4,3 Millionen Sonnenmasse handelt, das sich auf einen relativ kleinen Raumbereich konzentriert und daher als ein supermassereiches Schwarzes Loch angesehen wird [23]. Der Durchmesser seines Ereignishorizonts, der alle Ereignisse innerhalb des Horizonts von der Außenwelt abtrennt, entspricht mit 22 Millionen Kilometern etwa 20 % der Bahn des Merkurs um die Sonne. Für die bahnbrechende Entdeckung eines Schwarzen Loches im Zentrum der Milchstraße wurden Andrea Ghez von der University of California, Los Angeles und Reinhard Genzel vom Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik in München der Nobelpreis für Physik 2020 zuerkannt. Und schließlich konnte vor kurzem mit Hilfe des Very Large Telescopes der Europäischen Südsternwarte in Chile beim Stern S2 sogar eine Rosettenbahn des elliptischen Orbits beobachtet werden, siehe Abb. 6.3, die sich im Einklang mit den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein befindet [24].

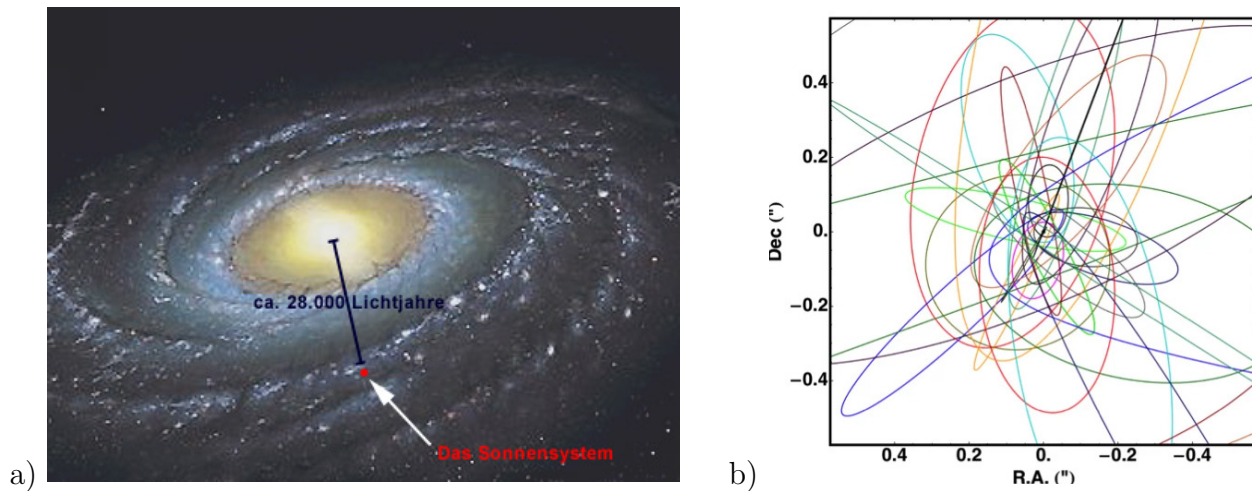


Abbildung 7.6: a) Lage unseres Sonnensystems in der Milchstraße, b) Langjährige Vermessung elliptischer Orbits von S-Sternen um Sagittarius A* durch Radioastronomie [22].

7.4 Hyperbel

Nun betrachten wir die Streulösung $E > 0$ mit $\varepsilon > 1$ und setzen wieder $\tilde{\varphi}_0 = 0$. In diesem Fall geht die Normalform einer Ellipse (7.18)–(7.20) in die Normalform einer Hyperbel über

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1 \quad (7.42)$$

mit den Halbachsen

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad (7.43)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad (7.44)$$

und dem Mittelpunkt

$$x_0 = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1} > 0, \quad y_0 = 0. \quad (7.45)$$

Die Hyperbel (7.42) besitzt die Asymptote

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0) \quad (7.46)$$

und durchstößt die Gerade $y = y_0 = 0$ bei den Punkten

$$(x_0 \pm a, 0). \quad (7.47)$$

Hierbei ist wegen (7.43) und (7.45) zu beachten, dass $x_0 = \varepsilon a$ ist, d.h. es gilt $x_0 > a$ wegen $\varepsilon > 1$. Beispielsweise bewegt sich ein Komet bei seiner Bewegung um die Sonne auf einer solchen Hyperbel. Aus dem Unendlichen kommend wird der Komet aufgrund der attraktiven Newtonschen Gravitationskraft bis zum sonnennächsten Punkt schneller und anschließend wieder langsamer, siehe Abb. 7.7. Setzt man (7.44) und (7.45) in (7.42) ein

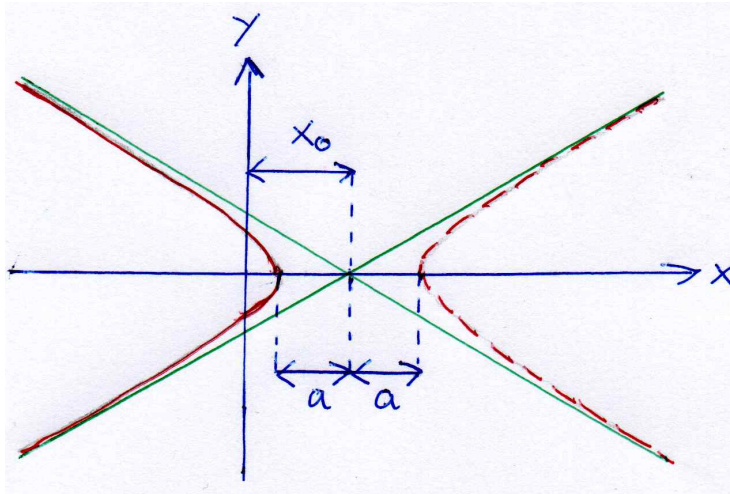


Abbildung 7.7: Beschreibung einer Hyperbel durch kartesische Koordinaten gemäß (7.42).

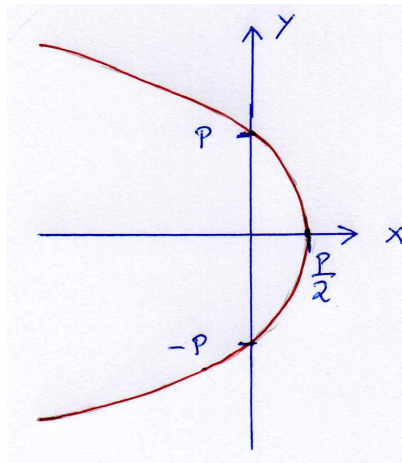


Abbildung 7.8: Beschreibung einer Parabel durch kartesische Koordinaten gemäß (7.49).

$$\left[x^2 - 2 \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1} x + \frac{\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \right] \frac{(\varepsilon^2 - 1)^2}{p^2} - \frac{\varepsilon^2 - 1}{p^2} y^2 = 1, \quad (7.48)$$

so artet die Hyperbel im Grenzfall $\varepsilon = 1$ zu einer Parabel aus, siehe Abb. 7.8

$$x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2}. \quad (7.49)$$

7.5 Coulomb-Potential

Die elektrostatische Wechselwirkung zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 wird durch das Coulomb-Potential beschrieben. Es besitzt dieselbe Form wie das Newtonsche Gravitationspotential (6.4), die Konstante α ist aber nicht durch (6.5) sondern durch

$$\alpha = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad (7.50)$$

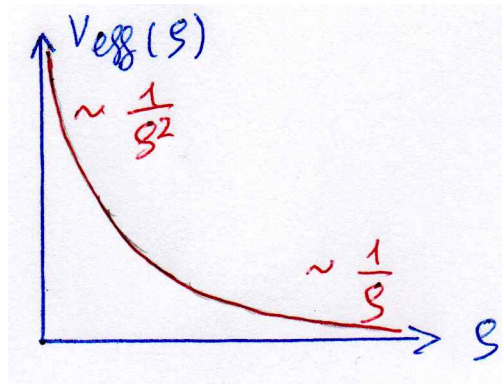


Abbildung 7.9: Effektives Potential (6.41) im Falle des Coulomb-Potentials (6.4), (7.50) mit $Q_1 Q_2 < 0$.

gegeben. Hierbei wurde das internationale SI-Einheitensystem verwendet, wobei die Abkürzung SI vom Französischen *Système international d'unités* stammt, in dem die Naturkonstante

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (7.51)$$

die Dielektrizitätskonstante des Vakuums bezeichnet. Haben Q_1 und Q_2 ein unterschiedliches Vorzeichen, so ist die elektrostatische Wechselwirkung mit $\alpha > 0$ attraktiv und das entsprechende Zweikörper-Problem lässt sich wie beim attraktiven Newtonschen Gravitationspotential (6.4) behandeln. Insbesondere gibt es eine gebundene Lösung, bei der sich beide Punktladungen auf Ellipsenbahnen umkreisen. Diese Überlegung war die Grundlage des Atommodells von Bohr und Sommerfeld für das Wasserstoff-Atom, das aus einem Elektron $Q_1 = -e$ und einem Proton $Q_2 = +e$ besteht. Hierbei bezeichnet

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (7.52)$$

die Elementarladung, die die kleinste frei existierende elektrische Ladungsmenge darstellt. Eine neue Situation tritt allerdings auf, wenn beide Ladungen dasselbe Vorzeichen besitzen, da dann die elektrostatische Wechselwirkung mit $\alpha < 0$ repulsiv wird. Gemäß (6.41) ist in diesem Fall das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ positiv und monoton fallend, siehe Abb. 7.9. Dann gibt es nur Lösungen mit $E > 0$ und es liegt nur ein Umkehrpunkt vor. Der Bewegungsablauf stellt eine Streuung dar. Geht man bei der Herleitung der Bahnkurve $\rho = \rho(\varphi)$ auf (7.10) zurück, so ergibt sich auch für $\alpha < 0$ ein Kegelschnitt (7.14) mit dem Parameter $p < 0$ gemäß (7.12). Die Exzentrizität ist aber nicht mehr durch (7.13), sondern durch

$$\varepsilon = -\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu\alpha^2}} \quad (7.53)$$

gegeben. Da nun $\varepsilon < -1$ vorliegt, ergibt sich wieder die Hyperbel als Bahnkurve. Diese Situation liegt z.B. beim Rutherford'schen Streuexperiment vor, wenn an einem Atomkern mit der Kernladungszahl Z und der Ladung $Q_2 = Ze$ ein α -Teilchen gestreut wird, das als Heliumkern

aus 2 Protonen und 2 Neutronen besteht und daher die Ladung $Q_1 = 2e$ besitzt. Aus dem Unendlichen kommend wird das α -Teilchen aufgrund der repulsiven Coulomb-Wechselwirkung bis zu dem Punkt seiner Bahn langsamer, wo es dem Atomkern am nächsten ist, und anschließend wieder schneller.

Kapitel 8

System von Massenpunkten

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Dynamik eines einzelnen Massenpunktes auf ein System von Massenpunkten. Dabei führen wir mit dem Schwerpunkt, dem Gesamtimpuls, dem Gesamtdrehimpuls und der Gesamtenergie globale Observablen ein, die das gesamte System von Massenpunkten charakterisieren.

8.1 Newtonsche Grundgleichung

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten, die mit dem Index $i = 1, 2, \dots, N$ durchnummeriert werden. Hierbei wird die Bahnkurve des i -ten Massenpunktes durch den Ortsvektor $\vec{r}_i(t)$ beschrieben, während seine Masse mit m_i und die auf ihn wirkende Kraft mit \vec{F}_i bezeichnet wird. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt dann die Newtonsche Grundgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i. \quad (8.1)$$

Bei den wirkenden Kräften unterscheidet man zwischen inneren und äußeren Kräften. Die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} sind diejenigen, die die Massenpunkte des Systems aufeinander ausüben. Nach dem dritten Newtonschen Axiom “actio = - reactio” von Abschnitt 3.3 gilt für die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} , die das j -te Teilchen auf das i -te Teilchen ausübt, die Beziehung

$$\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \vec{0}. \quad (8.2)$$

Sie ist erfüllt, wenn die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} konservativ sind und sich gemäß

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (8.3)$$

mit dem Gradienten bezüglich der Koordinaten des i ten Massenpunktes

$$\vec{\nabla}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^T \quad (8.4)$$

aus einem Potential mit der Eigenschaft

$$U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = U_{ji}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (8.5)$$

herleiten lassen. Beispielsweise verursacht bei einem Sternhaufen die Gravitationswechselwirkung zwischen den Sternen die inneren Kräfte

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (8.6)$$

die das Potential

$$U_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (8.7)$$

besitzen. Die äußeren Kräfte $\vec{F}_i^{(a)}$ sind diejenigen, die von außen auf das System von Massenpunkten einwirken. Beispielsweise sind die Moleküle eines Gases der äußeren Gravitationskraft unterworfen. Demnach lassen sich die in (8.1) wirkenden Kräfte \vec{F}_i auf den i ten Massenpunkt zerlegen in

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}. \quad (8.8)$$

8.2 Schwerpunkt

Wenn wir jeden einzelnen Radiusvektor \vec{r}_i mit der Masse m_i gewichten, erhalten wir als arithmetisches Mittel den Ortsvektor \vec{R} des Schwerpunktes aller Massenpunkte:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}. \quad (8.9)$$

Hierbei bezeichnet

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (8.10)$$

die Gesamtmasse des Systems. Wir stellen nun unter Verwendung von (8.1), (8.8) und (8.9) die Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt auf:

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}. \quad (8.11)$$

Aufgrund des dritten Newtonschen Axioms (8.2) verschwindet in (8.11) die Summe über die inneren Kräfte. Formal erkennt man dies dadurch, dass man die Summationsindizes umbenennet, die Reihenfolge der Summation vertauscht und dann das dritte Newtonsche Axiom (8.2) anwendet:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ji} = - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \vec{0}. \quad (8.12)$$



Abbildung 8.1: Münchhausen kann sich nicht samt Pferd am Schopf aus dem Sumpf ziehen: Die Kraft der Hand wirkt wohl auf den Schopf, dieser übt aber eine *reactio* auf die Hand aus, welche aber auch zum Körper des Barons Münchhausen gehört. Betrachtet man also den Gesamtkörper des Münchhausen, so halten sich diese inneren Kräfte die Waage. Eine Bewegungsänderung ist jedoch nur durch äußere Kräfte möglich.

Aus (8.11) und (8.12) ergibt sich dann der Schwerpunktsatz

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(a)}. \quad (8.13)$$

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt wäre und als ob die Summe der äußeren Kräfte

$$\vec{F}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \quad (8.14)$$

auf ihn wirken würde. Daraus können wir die folgenden Schlußfolgerungen ziehen:

- Die inneren Kräfte sind ohne Einfluß auf die Bewegung des Schwerpunktes. Salopp gesprochen bedeutet dies, dass man sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen kann, siehe Abb. 8.1.
- Der Schwerpunktsatz rechtfertigt im nachhinein die Idealisierung realer Körper als Massenpunkte. Wenn die inneren Bewegungen eines Festkörpers, wie z.B. seine Rotationen oder seine Schwingungen, nicht von Interesse sind, können wir den gesamten Körper als einen Massenpunkt der Masse M behandeln, für den eine Newton-Gleichung der Form (8.13) gilt.
- Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System, das keine Wechselwirkungen mit Vorgängen außerhalb des Systems hat. Da es für ein abgeschlossenes System keine

äußeren Kräfte gibt, also aufgrund von (8.14)

$$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}^{(a)} = \vec{0} \quad (8.15)$$

gilt, folgt aus (8.13), dass der Schwerpunktimpuls

$$\vec{P} = M\dot{\vec{R}} \quad (8.16)$$

erhalten bleibt. Für die Beschreibung der Bewegung des Massenpunktes wird man vorzugsweise dasjenige Inertialsystem benutzen, in dem der Schwerpunkt ruht. Dieses Schwerpunktsystem wird in Abschnitt 8.4 eingeführt.

8.3 Gesamtdrehimpuls

Den Gesamtdrehimpuls definieren wir als die Summe der Drehimpulse der einzelnen Massenpunkte

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i. \quad (8.17)$$

So wie der einzelne Drehimpuls hängt auch der Gesamtdrehimpuls des Systems von der Wahl des Koordinatensystems ab. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.14 leiten wir den Gesamtdrehimpulssatz ab, indem wir die Newtonsche Grundgleichung (8.1) vektoriell mit \vec{r}_i multiplizieren und über alle Massenpunkte aufsummieren. Unter Verwendung von (8.8) und (8.17) folgt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Wir untersuchen den Term in (8.18), der das Drehmoment der inneren Kräfte beinhaltet. Durch Umbenennung der Summationsindizes, Vertauschung der Summationsreihenfolge und Anwendung des dritten Newtonschen Axioms (8.2) folgt

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}. \quad (8.19)$$

Hieraus folgern wir

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}. \quad (8.20)$$

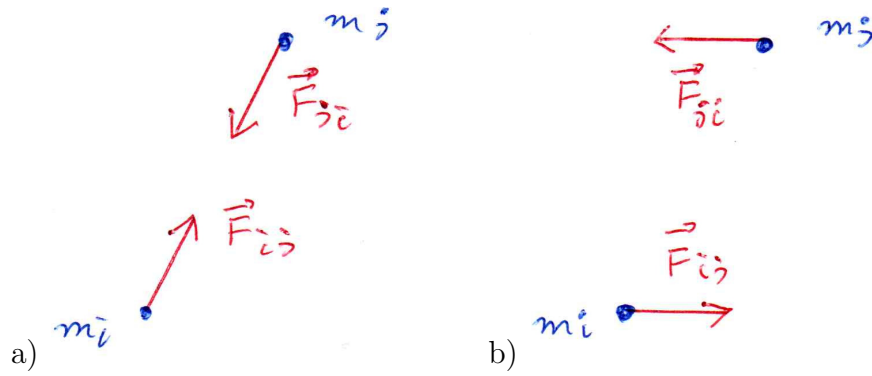


Abbildung 8.2: Schematische Darstellung innerer Kräfte: a) realisiert, da sie entsprechend (8.21) in Richtung der Verbindungslinie wirken; b) nicht realisiert, da sie gemäß (8.20) ein Drehmoment und damit eine Drehung verursachen würden.

Wir müssen die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} durch die weitere Annahme einschränken, dass sie nur in Richtung der Verbindungslinien wirken, siehe Abb. 8.2a):

$$\vec{F}_{ij} = A_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) , \quad A_{ij} = A_{ji} . \quad (8.21)$$

Falls diese Einschränkung nicht gelten würde, könnte sich beispielsweise ein abgeschlossenes System aus zwei Teilchen mit einer starren Achse von selbst in immer schnellere Drehung versetzen. Dies würde allen Beobachtungen widersprechen und ist daher nicht in der Natur realisiert, siehe Abb. 8.2b). Die Einschränkung (8.21) ist beispielsweise bei konservativen inneren Kräften (8.3) erfüllt, bei denen das Potential die über (8.5) hinausgehende Eigenschaft

$$U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = U_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (8.22)$$

besitzt. Einsetzen von (8.22) in (8.3) führt nämlich auf (8.21) mit

$$A_{ij} = - \frac{U'_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} . \quad (8.23)$$

Aufgrund der Einschränkung (8.21) und (8.20) führen die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} zu keinem Drehmoment:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \vec{0} . \quad (8.24)$$

Demnach folgt aus (8.18) und (8.24) der Gesamtdrehimpulsatz

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}^{(a)} . \quad (8.25)$$

Er besagt, dass die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses \vec{L} durch das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte

$$\vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} \quad (8.26)$$

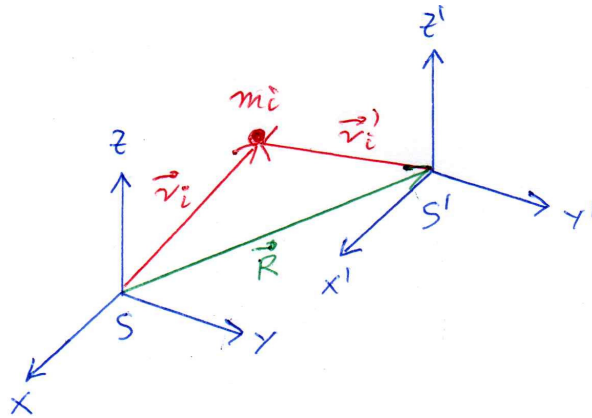


Abbildung 8.3: Übergang vom ursprünglichen Koordinatensystems S zum Schwerpunkt S' des bewegten Systems gemäß (8.28).

gegeben ist. In einem abgeschlossenen System verschwinden die äußeren Kräfte und damit nach (8.26) auch das von ihnen verursachte Gesamtdrehmoment:

$$\vec{F}_i^{(a)} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{M}^{(a)} = \vec{0}. \quad (8.27)$$

Dann bleibt der in (8.17) definierte Gesamtdrehimpuls \vec{L} des Systems nach (8.25) erhalten.

8.4 Schwerpunktsystem

Wir gehen nun vom ursprünglichen Koordinatensystem S zu einem dazu achsenparallelen neuen Koordinatensystem S' über, das im Schwerpunkt des bewegten Systems von Massenpunkten verankert ist, siehe Abb. 8.3. Die Ortsvektoren \vec{r}_i und \vec{r}'_i der Masse m_i im Koordinatensystem S und S' unterscheiden sich dann durch den Vektor \vec{R} , der vom Ursprung von S zum Ursprung von S' zeigt:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i. \quad (8.28)$$

Aus der Definition des Schwerpunkts in (8.9), (8.10) folgt dann mit Hilfe von (8.28) tatsächlich, dass der Schwerpunkt des Systems von Massenpunkten mit dem Ursprung des neuen Koordinatensystems S' zusammenfällt:

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \vec{R} \sum_{i=1}^N m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \vec{0}. \quad (8.29)$$

Differenzieren wir (8.29) nach der Zeit, so lesen wir ab, dass der Gesamtimpuls des Schwerpunktes im neuen Koordinatensystem S' verschwindet:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}'_i = \vec{0}. \quad (8.30)$$

Wir untersuchen nun die Auswirkungen der Koordinatentransformation (8.28) auf den Gesamtdrehimpuls (8.17):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \times (\dot{\vec{r}}'_i + \dot{\vec{R}}) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{r}'_i \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \dot{\vec{r}}'_i + \vec{R} \times \dot{\vec{R}}). \quad (8.31)$$

Aufgrund von (8.29) und (8.30) erhalten wir die Zerlegung

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_S. \quad (8.32)$$

Demnach zerfällt der Gesamtdrehimpuls (8.17) im ursprünglichen Koordinatensystem S in den Gesamtdrehimpuls im neuen Koordinatensystem S'

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i \times \dot{\vec{r}}'_i \quad (8.33)$$

und den Drehimpuls des Schwerpunktes bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems S

$$\vec{L}_S = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}. \quad (8.34)$$

Eine entsprechende Zerlegung erhält man auch für das Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte mit Hilfe von (8.26) und (8.28):

$$\vec{M}^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(a)} + \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} = \vec{M}'^{(a)} + \vec{M}_S^{(a)}. \quad (8.35)$$

Das Gesamtdrehmoment (8.26) im ursprünglichen Koordinatensystem S zerfällt in das Gesamtdrehmoment im neuen Koordinatensystem S'

$$\vec{M}'^{(a)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(a)} \quad (8.36)$$

und in das Drehmoment der am Schwerpunkt angreifenden äußeren Kräfte bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems S

$$\vec{M}_S^{(a)} = \vec{R} \times \vec{F}^{(a)}. \quad (8.37)$$

Aus dem Gesamtdrehimpulssatz (8.25) im ursprünglichen Koordinatensystem S und den Zerlegungen (8.32), (8.35) folgt zunächst

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \frac{d\vec{L}_S}{dt} = \vec{M}'^{(a)} + \vec{M}_S^{(a)}. \quad (8.38)$$

Aufgrund der Bewegungsgleichung des Schwerpunktes (8.13) gilt nun unter Beachtung von (8.34) und (8.37):

$$\frac{d\vec{L}_S}{dt} = M \vec{R} \times \ddot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{F}^{(a)} = \vec{M}_S^{(a)}. \quad (8.39)$$

Aus (8.38) und (8.39) lesen wir dann ab, dass der Gesamtdrehimpulssatz auch im neuen Koordinatensystem S' gültig ist:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'^{(a)}. \quad (8.40)$$

Dieses Ergebnis bildet den Ausgangspunkt für die spätere Behandlung des starren Körpers.

8.5 Gesamtenergie

Wir gehen nun wieder in das ursprüngliche Koordinatensystem S und leiten analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.7 den Gesamtenergieerhaltungssatz her. Hierzu multiplizieren wir die Newtonsche Grundgleichung (8.1) skalar mit $\dot{\vec{r}}_i$ und summieren über alle Massenpunkte. Mit Hilfe von (8.8) erhalten wir dann:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij}. \quad (8.41)$$

Die linke Seite ist die zeitliche Änderung der kinetischen Gesamtenergie

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2, \quad (8.42)$$

während die rechte Seite die von den äußeren und den inneren Kräften aufgebraachte Leistung darstellt. Wir nehmen nun an, dass sowohl die äußeren Kräfte $\vec{F}_i^{(a)}$ als auch die inneren Kräfte \vec{F}_{ij} konservativ sind und daher aus Potentialfeldern herleitbar sind. Unter Berücksichtigung von (8.3) und (8.22) gilt dann

$$\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i U_i^{(a)}(\vec{r}_i), \quad (8.43)$$

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (8.44)$$

Werden diese Potentialfelder entlang der Bahnkurve $\vec{r}_i(t)$ ausgewertet, so führt die Kettenregel unter Berücksichtigung von (8.43) auf

$$\frac{d}{dt} U_i^{(a)}(\vec{r}_i(t)) = \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i U_i^{(a)}(\vec{r}_i(t)) = -\dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \vec{F}_i^{(a)} \quad (8.45)$$

und entsprechend erhalten wir mit Hilfe von (8.44)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_{ij}(|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|) &= \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i U_{ij}(|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|) + \dot{\vec{r}}_j(t) \cdot \vec{\nabla}_j U_{ij}(|\vec{r}_i(t) - \vec{r}_j(t)|) \\ &= -\dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \vec{F}_{ij} - \dot{\vec{r}}_j(t) \cdot \vec{F}_{ji}. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Summieren wir in (8.45) über den Index i , so gilt

$$\sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{(a)} = -\frac{d}{dt} U^{(a)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (8.47)$$

mit dem Potential der äußeren Kräfte

$$U^{(a)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i^{(a)}(\vec{r}_i). \quad (8.48)$$

Entsprechend folgt aus (8.46) durch Summation über alle i und j

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_{ij} + \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_{ji}) = -\frac{d}{dt} U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad (8.49)$$

mit dem Potential der inneren Kräfte

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (8.50)$$

Einsetzen von (8.42), (8.47) und (8.49) in (8.41) führt auf den Gesamtenergieerhaltungssatz

$$\frac{d}{dt}(T + U^{(a)} + U) = 0 \quad \Longrightarrow \quad T + U^{(a)} + U = E = \text{konstant} \quad (8.51)$$

mit der Gesamtenergie E . Die Potentiale (8.48) und (8.50) der äußeren und inneren Kräfte lassen sich auch zur Formulierung der Newtonschen Grundgleichung (8.1) heranziehen. Deren Gradienten ergeben nämlich nach (8.43) und (8.48)

$$\vec{\nabla}_i U^{(a)} = \vec{\nabla}_i U_i^{(a)} = -\vec{F}_i^{(a)},$$

während wir analog aus (8.44) und (8.50) ablesen:

$$\vec{\nabla}_i U = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\nabla}_i U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\vec{F}_{ij},$$

so dass man aus (8.1) und (8.8) abliest

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i (U^{(a)} + U). \quad (8.52)$$

Liegen keine äußeren Kräfte vor, gilt also z.B.

$$U^{(a)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0, \quad (8.53)$$

so vereinfacht sich die Newtonsche Grundgleichung (8.52) zu

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\vec{\nabla}_i U. \quad (8.54)$$

Kapitel 9

Matrizen

Wir gehen jetzt genauer auf Matrizen ein, die sich auf vielfältige Weise in der Physik anwenden lassen. Zum einen führen wir grundlegende Rechenregeln für Matrizen ein und diskutieren, wie die Multiplikation zweier Matrizen definiert ist und wie sich die Determinante oder das Inverse einer Matrix bestimmen lassen. Damit lassen sich beispielsweise Koordinatentransformationen wie eine Rotation beschreiben, siehe Abschnitt 1.8. Und es lassen sich lineare Gleichungssysteme mit Matrizen kompakt formulieren und effizient lösen [1, Kapitel 12]. Zum anderen behandeln wir das Eigenproblem einer Matrix, mit dessen Hilfe symmetrische reelle Matrizen durch eine geeignete Koordinatentransformation diagonalisiert werden können. Dies ist ein wichtiges Handwerkszeug, um im anschließenden Kapitel die harmonischen Schwingungen von Massenpunkten beschreiben zu können.

9.1 Definitionen

Es seien m, n zwei natürliche Zahlen. Eine $m \times n$ -Matrix ist dann ein rechteckiges Schema $A = (a_{ij})$ mit Einträgen aus reellen Zahlen a_{ij} mit $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.1)$$

Eine $m \times n$ -Matrix besitzt also m Zeilen und n Spalten. Ein Beispiel für eine 2×3 -Matrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Falls $m = n$ vorliegt, handelt es sich um eine quadratische $n \times n$ -Matrix. Ein Beispiel für eine 2×2 -Matrix ist:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Ist $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix, dann bezeichnen wir

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

als i -ten Zeilenvektor von A und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

als j -ten Spaltenvektor von A . Ist ferner $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ -Matrix, so bezeichnet $A^T = (a_{ij}^T)$ mit den Einträgen $a_{ij}^T = a_{ji}$ eine $n \times m$ -Matrix, die man als transponierte Matrix bezeichnet:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

So gilt für die schon in (9.2) und (9.3) eingeführten beispielhaften Matrizen erhalten dann die transponierten Matrizen

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Durch Transposition wird ein Zeilenvektor zu einem Spaltenvektor und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{mj} \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

9.2 Rechenoperationen mit Matrizen

Wir betrachten nun einige nützliche Rechenoperationen mit Matrizen.

9.2.1 Elementare Rechenoperationen

Es seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ zwei $m \times n$ -Matrizen. Dann werden sie dadurch addiert bzw. subtrahiert, dass ihre entsprechenden Einträge addiert bzw. subtrahiert werden:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

So erhalten wir für die beiden 2×3 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.10)$$

als Summe und Differenz

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Auch die Multiplikation einer $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit einem reellen Skalar k ist komponentenweise definiert:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

So gilt beispielsweise:

$$2B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

9.2.2 Multiplikation von Matrizen

Es seien A und B eine $m \times p$ - und eine $p \times n$ -Matrix. Wichtig ist dabei, dass die Spaltenzahl p von A mit der Zeilenzahl von B übereinstimmt. Dann ist das Produkt $C = AB$ der beiden Matrizen A und B eine $m \times n$ -Matrix, die durch die Komponenten

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (9.14)$$

definiert ist. Das bedeutet, dass sich das Element c_{ij} als Skalarprodukt des i -ten Zeilenvektors von A und des j -ten Spaltenvektors von B ergibt. Als Beispiel betrachten wir die Multiplikation einer 4×3 -Matrix A mit einer 3×2 -Matrix B , was auf die 4×2 -Matrix $AB = C$ führt:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 5 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 37 \\ 19 & 10 \\ 21 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.15)$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen ist das Folgende zu beachten:

- a) Das Produkt BA im obigen Beispiel ist nicht definiert, da die Zahl der Spalten von B , also 2, nicht mit der Zahl der Zeilen von A , also 4, übereinstimmt.
- b) Im Allgemeinen gilt für das Produkt von Matrizen, dass es nicht kommutativ ist:

$$AB \neq BA. \quad (9.16)$$

Beispielsweise erhalten wir für die beiden 2×2 -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

den Kommutator

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.18)$$

- c) Es ist $AB = 0$ auch mit $A, B \neq 0$ möglich. Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

- d) Für die Transponierte eines Produktes zweier Matrizen gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (9.20)$$

Die Gültigkeit dieser Rechenregel beweist man mit Hilfe der Komponentenschreibweise:

$$\left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)^T = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p b_{ik}^T a_{kj}^T. \quad (9.21)$$

- e) Das Skalarprodukt \cdot zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (9.22)$$

lässt sich auch als Matrizen-Multiplikation auffassen:

$$\vec{a}^T \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i b_i. \quad (9.23)$$

Demnach führt das Produkt einer $1 \times n$ -Matrix, also eines Zeilenvektors, mit einer $n \times 1$ -Matrix, also eines Spaltenvektors, auf eine 1×1 -Matrix, was einem Skalar entspricht.

- f) Beim dyadischen bzw. tensoriellen Produkt \otimes zweier Vektoren \vec{a}, \vec{b} dagegen wird umgekehrt das Produkt einer $n \times 1$ -Matrix, also eines Spaltenvektors, mit einer $1 \times n$ -Matrix, also eines Zeilenvektors berechnet und es entsteht dabei eine $n \times n$ -Matrix:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \ \cdots \ b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & \cdots & a_n b_n \end{pmatrix}. \quad (9.24)$$

Das dyadische Produkt zweier Vektoren ist beispielsweise hilfreich, wenn man untersuchen möchte, ob ein vorgegebener Satz an Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ in einem n -dimensionalen Vektorraum vollständig ist und damit eine Basis bildet. Falls nämlich die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \vec{e}_i^T = E \quad (9.25)$$

mit der $n \times n$ -Einheitsmatrix $E = (\delta_{ij})$ erfüllt ist, dann lässt sich ein beliebiger Vektor \vec{a} durch eine entsprechende Linearkombination der Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ darstellen

$$\vec{a} = E\vec{a} = \left(\sum_{i=1}^n \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i \right) \vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i (\vec{e}_i^T \vec{a}) = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{a}) \quad (9.26)$$

in Anlehnung an (1.7) und (1.23). Abschließend bemerken wir, dass die Beziehung (9.25) im Falle von $n = 3$ für die üblichen Basisvektoren (1.9) erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.27)$$

9.3 Determinante

Jeder quadratischen $n \times n$ -Matrix A kann man eine Zahl zuordnen, die man als Determinante $\det A$ bezeichnet. Die Determinante einer 2×2 -Matrix ist definiert durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (9.28)$$

Diesen Fall hatten wir schon bei der Wronski-Determinante (5.82) kennengelernt. Auch die Determinante einer 3×3 -Matrix hatten wir schon in (1.64) als Regel von Sarrus eingeführt und in Kapitel 1 zur Berechnung des Vektor- und des Spatprodukts angewandt. Im allgemeinen Falle einer $n \times n$ -Matrix A wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz an, um eine Determinante zu berechnen. Hierzu führt man eine $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix A_{ij} ein, die man durch

Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte aus A erhält:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

Dann besagt der Laplacesche Entwicklungssatz, dass man die Determinante einer Matrix A mit Hilfe der Determinanten von Untermatrizen berechnen kann. Hierzu gilt für jede Zeile i mit $1 \leq i \leq n$:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}. \quad (9.30)$$

Entsprechendes gilt aber auch für jede Spalte j mit $1 \leq j \leq n$:

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2} a_{2j} \det A_{2j} + \dots + (-1)^{j+n} a_{nj} \det A_{nj}. \quad (9.31)$$

Als Beispiel betrachten wir die 3×3 -Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.32)$$

deren Determinante wir durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes auf zweierlei Weisen berechnen. Zum einen entwickeln wir nach der ersten Zeile, d.h. wir wenden (9.30) mit $i = 1$ an:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boxed{0} & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2(3 - 2) = 1 + 2 = 3. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Zum anderen entwickeln wir nach der zweiten Spalte, d.h. wir wenden (9.31) mit $j = 2$ an, was natürlich auf dasselbe Ergebnis führt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6) = 1 - 4 + 6 = 3. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Auf der Grundlage dieser Beispiele bemerken wir:

- Es ist also sinnvoll, nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält.
- Die Vorzeichenverteilung im Laplaceschen Entwicklungssatz (9.30) bzw. (9.31) kann man sich dabei als „Schachbrettmuster“ vorstellen, wobei die Hauptdiagonale nur aus Pluszeichen besteht, siehe Fig. 9.1.

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

Abbildung 9.1: Die Vorzeichen beim Laplaceschen Entwicklungssatz (9.30) bzw. (9.31) weisen ein Schachbrettmuster auf.

Wir stellen nun noch einige nützliche Eigenschaften zusammen, die beim Berechnen von Determinanten zu beachten sind:

- a) Aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz (9.30) bzw. (9.31) folgt unmittelbar, dass die Determinante einer Diagonalmatrix durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben ist:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (9.35)$$

- b) Matrix A und transponierte Matrix A^T haben dieselbe Determinante:

$$\det A = \det A^T. \quad (9.36)$$

- c) Ohne Beweis erwähnen wir den Produktsatz, dass die Determinante des Produktes zweier Matrizen durch das Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen gegeben ist:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B). \quad (9.37)$$

Als Spezialfall wenden wir den Produktsatz auf Matrix A und inverse Matrix A^{-1} an, für die gilt:

$$AA^{-1} = E. \quad (9.38)$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so kann man auf der linken Seite den Produktsatz (9.38) und auf der rechten Seite a) verwenden:

$$\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) = \det E = 1. \quad (9.39)$$

Damit erhalten wir das Ergebnis, dass die Determinante der inversen Matrix A^{-1} durch das Inverse der Determinante der Matrix A gegeben ist:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad (9.40)$$

- d) Aus (9.40) lesen wir ab, dass im Falle von $\det A = 0$ die Matrix A nicht invertierbar ist, also A^{-1} nicht existiert. Dies liegt daran, dass dann die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind. Eine Veranschaulichung hiervon ist z.B. durch das Spatprodukt (1.67) der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren gegeben. Sobald die drei Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind, verschwindet mit dem Spatprodukt das von ihnen aufgespannte Volumen und damit die Determinante der von ihnen gebildeten Matrix.
- e) Für eine orthonormale Matrix R , die die Eigenschaft (1.79) erfüllt, gilt:

$$\frac{1}{\det R} = \det R^{-1} = \det R^T = \det R. \quad (9.41)$$

Im ersten Schritt wurde (9.40) verwendet, im zweiten Schritt wurde (1.81) beachtet und schließlich konnte (9.36) angewandt werden. Aus (9.41) ergibt sich dann:

$$\det R = \pm 1. \quad (9.42)$$

Man wählt üblicherweise eine orthonormale Matrix mit der Eigenschaft $\det R = 1$, da dann ein Rechtssystem wieder in ein Rechtssystem abgebildet wird.

9.4 Inverse Matrix

Existiert das Inverse A^{-1} einer Matrix A , gilt also $\det A \neq 0$, dann lässt sie sich mit Hilfe der Cramerschen Regel aus Determinanten berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A. \quad (9.43)$$

Hierbei bezeichnet

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \quad (9.44)$$

die Adjunkte der Matrix A , die aus den Determinanten aller Untermatrizen A_{ji} entsprechend (9.29) gebildet wird. Als erstes Beispiel betrachten wir eine allgemeine 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (9.45)$$

deren Determinante schon in (9.28) berechnet wurde. Gemäß (9.44) lautet deren Adjunkte

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{21} \\ (-1)^{2+1} a_{12} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{11} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (9.46)$$

Damit ergibt sich die zu A inverse Matrix mit Hilfe von (9.43) zu

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (9.47)$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in (5.57) und (5.58) erwähnt. Nun betrachten wir noch als zweites Beispiel die 3×3 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

mit der Determinante

$$\det A = 8 + 0 + 0 - (2 + 2 + 0) = 4. \quad (9.49)$$

Da $\det A \neq 0$ ist, existiert die zu A inverse Matrix A^{-1} , die nun mit der Cramerschen Regel berechnet wird. Die Adjunkte von A ist nun aufgrund von (9.44) eine 3×3 -Matrix mit Determinanten von 2×2 -Matrizen als Einträgen:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T. \quad (9.50)$$

Hieraus folgt dann mit (9.43) die zu A inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (9.51)$$

Zur Probe berechnen wir noch:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (9.52)$$

9.5 Eigenwertprobleme von Matrizen

Es sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann bildet A einen Vektor \vec{x} in einen Vektor $A\vec{x}$ ab, der in der Regel in eine andere Richtung als \vec{x} zeigt, (siehe Abb. 9.2a). Es gibt aber ausgezeichnete Vektoren \vec{x}_λ , bei denen $A\vec{x}_\lambda$ parallel zu \vec{x}_λ zeigt, so dass \vec{x}_λ durch Streckung oder Stauchung mit einem Faktor λ mit $A\vec{x}_\lambda$ übereinstimmt, (siehe Abb. 9.2b). Dann wird durch die Gleichung

$$A\vec{x}_\lambda = \lambda\vec{x}_\lambda, \quad \vec{x}_\lambda \neq \vec{0} \quad (9.53)$$

ein Eigenvektor \vec{x}_λ und ein Eigenwert λ definiert. Man sieht unmittelbar anhand des Eigenwertproblems (9.53) der Matrix A , dass auch $\alpha\vec{x}_\lambda$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, falls \vec{x}_λ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist. Wenn es also einen Eigenvektor gibt, dann gibt es immer unendlich viele davon. Daher stellt sich die grundlegende Frage, ob man einen Minimalsatz linear unabhängiger Eigenvektoren bestimmen kann.

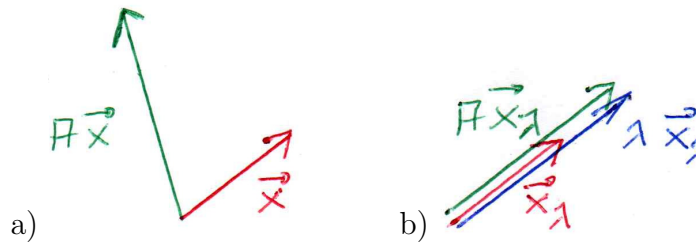


Abbildung 9.2: Auswirkung einer Matrix A auf Vektoren: a) In der Regel zeigen $A\vec{x}$ und \vec{x} in unterschiedliche Richtungen b) Im Falle eines Eigenvektors \vec{x}_λ zeigen aber $A\vec{x}_\lambda$ und \vec{x}_λ in dieselbe Richtung, so dass es ein λ mit der Eigenschaft (9.53) gibt.

9.5.1 Eigenwerte

Zur Beantwortung dieser Frage formen wir zunächst (9.53) zur Standardform eines homogenen linearen Gleichungssystems um:

$$(A - \lambda E) \vec{x}_\lambda = \vec{0}, \quad (9.54)$$

wobei $E = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Falls $\det(A - \lambda E) \neq 0$ gelten würde, dann könnte man die Matrix $A - \lambda E$ gemäß Bemerkung d) auf Seite 132 invertieren und aus (9.54) würde folgen, dass $\vec{x}_\lambda = \vec{0}$ gegeben ist. Dies wäre aber im Widerspruch zur Forderung von (9.53), dass \vec{x}_λ nur dann ein Eigenvektor ist, falls er vom Nullvektor $\vec{0}$ verschieden ist. Daher muss die Bedingung

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (9.55)$$

erfüllt sein, die man auch als charakteristische Gleichung der Matrix A bezeichnet. Sie ist nur für bestimmte Werte von λ erfüllt, die die gesuchten Eigenwerte darstellen. Für eine $n \times n$ -Matrix A führt (9.55) auf das Nullstellenproblem eines Polynoms n ten Grades:

$$\det(A - \lambda E) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + (-1)^n\lambda^n = 0, \quad (9.56)$$

wobei $c_0 = \det A$ gilt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra von Abschnitt 4.6 gibt es im Komplexen genau n Lösungen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von (9.56) mit der Eigenschaft

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda). \quad (9.57)$$

Demnach gibt es genau n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von A . Um die folgende Diskussion so übersichtlich wie möglich zu halten, werden wir von nun an annehmen, dass kein Eigenwert mehrfach auftritt.

9.5.2 Eigenvektoren

Der zu einem Eigenwert λ_k gehörende Eigenvektor \vec{x}_k ist dann durch die Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda_k E) \vec{x}_k = \vec{0} \quad (9.58)$$

gegeben. Da per Konstruktion $\det(A - \lambda_k E) = 0$ ist, können wir (9.58) nicht durch Invertierung der Matrix $A - \lambda_k E$ lösen. Die Bedingung $\det(A - \lambda_k E) = 0$ führt nämlich dazu, dass die n Gleichungen des homogenen linearen Gleichungssystem (9.58), also

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.59)$$

linear abhängig sind. Da wir der Einfachheit halber davon ausgehen, dass der Eigenwert λ_k nicht mehrfach auftritt, ist der Lösungsraum von (9.59) nur eindimensional. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit reicht es dann aus, sich auf die ersten $n - 1$ Gleichungen von (9.59) zu beschränken. Betrachtet man die letzte Komponente x_{kn} des Eigenvektors \vec{x}_k als Unbekannte, dann genügen die ersten $n - 1$ Komponenten $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn-1}$ einem inhomogenen linearen Gleichungssystem $(n - 1)$ ten Grades:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_k & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_k & \cdots & a_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} - \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{kn-1} \end{pmatrix} = -x_{kn} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{pmatrix}. \quad (9.60)$$

Durch Lösung von (9.60) erhält man $x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn-1}$ als Funktion von x_{kn} . Da aber mit \vec{x}_k auch $\alpha \vec{x}_k$ eine Lösung von (9.58) ist, können wir ohne Beschränkung fordern, dass der Eigenvektor \vec{x}_k normiert ist:

$$|\vec{x}_k| = 1 \quad \iff \quad \sqrt{x_{k1}^2 + x_{k2}^2 + \dots + x_{kn}^2} = 1. \quad (9.61)$$

Aus dieser Normierungsbedingung läßt sich schließlich die noch unbekannt n te Komponente x_{kn} des Eigenvektors \vec{x}_k bestimmen.

9.5.3 Beispiel

Wir illustrieren dieses allgemeine Vorgehen am Beispiel der 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.62)$$

die auf die folgende charakteristische Gleichung führt:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0. \quad (9.63)$$

Demnach besitzt die Matrix (9.62) die beiden Eigenwerte

$$\lambda_+ = 3, \quad \lambda_- = -1. \quad (9.64)$$

Der Eigenvektor \vec{x}_+ zum Eigenwert λ_+ genügt dann dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(A - \lambda_+ E) \vec{x}_+ = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_+ & 4 \\ 1 & 1 - \lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.65)$$

Aus der ersten der beiden Gleichungen von (9.65) folgt unter Berücksichtigung von $\lambda_+ = 3$

$$(1 - \lambda_+) x_{+1} = -4x_{+2} \quad \implies \quad x_{+1} = 2x_{+2}, \quad (9.66)$$

so dass der erste Eigenvektor lautet

$$\vec{x}_+ = x_{+2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.67)$$

Aus der Normierungsbedingung (9.61) folgt dann

$$|\vec{x}_+| = 1 \quad \implies \quad x_{+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (9.68)$$

und wir erhalten schließlich für den ersten Eigenvektor

$$\vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.69)$$

Analog ergibt sich der zweite Eigenvektor zu

$$\vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.70)$$

Wir bemerken, dass die beiden Eigenvektoren (9.69) und (9.70) der nicht symmetrischen 2×2 -Matrix (9.62) nicht orthogonal sind:

$$\vec{x}_+^T \vec{x}_- = -\frac{3}{5}. \quad (9.71)$$

9.6 Reelle Symmetrische Matrizen

Es sei A eine reelle symmetrische Matrix, d.h. es gilt

$$A^{*T} = A \quad \iff \quad a_{ji}^* = a_{ij}. \quad (9.72)$$

Dann gibt es zwei wichtige Aussagen zum entsprechenden Eigenwertproblem.

9.6.1 Eigenwerte

Zum einen können wir zeigen, dass die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix reel sind. Multipliziert man nämlich das Eigenwertproblem (9.53) von links mit \vec{x}_λ^{*T} , so folgt

$$\vec{x}_\lambda^{*T} A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda^{*T} \vec{x}_\lambda. \quad (9.73)$$

Transponiert man (9.73) unter Berücksichtigung von (9.20) und geht man zum konjugiert Komplexen über, dann gilt aufgrund von (9.72)

$$\vec{x}_\lambda^{*T} A \vec{x}_\lambda = \lambda^* \vec{x}_\lambda^{*T} \vec{x}_\lambda. \quad (9.74)$$

Die Subtraktion von (9.73) und (9.74) führt auf

$$(\lambda - \lambda^*) \vec{x}_\lambda^{*T} \vec{x}_\lambda = 0. \quad (9.75)$$

Da für einen Eigenvektor $\vec{x}_\lambda \neq 0$ gilt, muss

$$\vec{x}_\lambda^{*T} \vec{x}_\lambda = |x_{\lambda 1}|^2 + |x_{\lambda 2}|^2 + \dots + |x_{\lambda n}|^2 \neq 0 \quad (9.76)$$

gelten, so dass wir aus (9.75) ablesen:

$$\lambda = \lambda^*. \quad (9.77)$$

Wenn aber die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix gemäß (9.77) reell sind, dann folgt daraus auch, dass die zugehörigen Eigenvektoren als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (9.54) auch reell sind:

$$\vec{x}_\lambda = \vec{x}_\lambda^*. \quad (9.78)$$

9.6.2 Eigenvektoren

Zum anderen gilt, dass die Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind. Multipliziert man nämlich das Eigenwertproblem (9.53) von links mit \vec{x}_μ^T , so folgt

$$\vec{x}_\mu^T A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\mu^T \vec{x}_\lambda. \quad (9.79)$$

Durch Vertauschung von λ und μ erhalten wir analog

$$\vec{x}_\lambda^T A \vec{x}_\mu = \mu \vec{x}_\lambda^T \vec{x}_\mu. \quad (9.80)$$

Transponiert man (9.80) unter Berücksichtigung von (9.20), so führt dies auf

$$\vec{x}_\mu^T A \vec{x}_\lambda = \mu \vec{x}_\mu^T \vec{x}_\lambda. \quad (9.81)$$

Durch Subtraktion von (9.79) und (9.81) folgt dann

$$(\lambda - \mu) \vec{x}_\mu^T \vec{x}_\lambda = 0, \quad (9.82)$$

so dass im Falle von $\lambda \neq \mu$ die entsprechenden Eigenvektoren \vec{x}_λ und \vec{x}_μ senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{x}_\mu^T \vec{x}_\lambda = 0. \quad (9.83)$$

9.6.3 Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 \end{pmatrix}. \quad (9.84)$$

Deren charakteristisches Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0. \quad (9.85)$$

führt auf die Eigenwerte

$$\lambda_+ = 3, \quad \lambda_- = -3. \quad (9.86)$$

Entsprechend des in Abschnitt 9.6.2 diskutierten Verfahrens ergeben sich die entsprechenden normierten Eigenvektoren zu

$$\vec{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_- = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix}. \quad (9.87)$$

Somit erhalten wir für das Skalarprodukt der beiden Eigenvektoren

$$\vec{x}_+^T \vec{x}_- = 0. \quad (9.88)$$

Ferner zeigen wir an diesem Beispiel exemplarisch, dass die Eigenvektoren einer reellen symmetrischen Matrix vollständig sind und daher die Beziehung (9.25) erfüllen:

$$\vec{x}_+ \vec{x}_+^T + \vec{x}_- \vec{x}_-^T = \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} (\sqrt{5} \ 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5} \end{pmatrix} (1 \ -\sqrt{5}) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.89)$$

9.7 Transformation von Matrizen

Es sei A eine Matrix, die eine Abbildung zwischen zwei Vektoren \vec{x} und \vec{y} vermittelt:

$$\vec{y} = A\vec{x}. \quad (9.90)$$

Führt man nun im Sinne von Abschnitt 1.8 eine Koordinatentransformation durch, dann gilt nach (1.84)

$$\vec{x} = R^T \vec{x}', \quad \vec{y} = R^T \vec{y}', \quad (9.91)$$

wobei R eine orthonormale Matrix mit der Eigenschaft (1.79) bzw. (1.81) darstellt. Dadurch transformiert sich die Abbildung (9.90) zwischen den Vektoren gemäß

$$\vec{y}' = A' \vec{x}', \quad (9.92)$$

wobei die resultierende Transformation der Matrix gegeben ist durch

$$A' = RAR^T. \quad (9.93)$$

Wir stellen fest, dass bei der Transformation von Vektoren wie in (9.91) die orthonormale Matrix R nur einmal auftritt, während bei der Transformation einer Matrix die orthonormale Matrix R gemäß (9.93) zweimal erscheint. Deshalb bezeichnet man einen Vektor bzw. eine Matrix auch als einen Tensor erster bzw. zweiter Stufe. Wir erwähnen zwei wichtige Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der Transformation der Matrix in (9.93) ergeben:

- a) Die Determinanten von A und A' stimmen überein. In der Tat folgt aus (9.36), (9.37), (9.42 und (9.93):

$$\det A' = \det (RAR^T) = \det R \det A \det R^T = \det A. \quad (9.94)$$

- b) Die Eigenwerte von A sind dieselben wie von A' in (9.93):

$$\det (A' - \lambda E) = \det (RAR^T - \lambda E) = \det [R^T (A - \lambda E) R] = \det (A - \lambda E). \quad (9.95)$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt (1.79) und im dritten Schritt (9.36), (9.37), (9.42) verwendet.

9.8 Diagonalisierung

Wir betrachten wieder eine reelle symmetrische Matrix und nehmen aber noch zusätzlich an, dass deren Eigenwerte paarweise verschieden sind. Dann folgt aus (9.61) und (9.83), dass deren Eigenvektoren orthonormal sind, es gilt also

$$\vec{x}_i^T \vec{x}_j = \delta_{ij}. \quad (9.96)$$

Wir zeigen nun, dass sich A durch eine Koordinatentransformation R auf Diagonalform

$$A_{\text{diag}} = RAR^T \quad (9.97)$$

bringen lässt. Hierbei wird die Diagonalmatrix A_{diag} aus den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ von A aufgebaut

$$A_{\text{diag}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (9.98)$$

und die orthonormale Matrix R besitzt die entsprechenden Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ als Zeilenvektoren:

$$R = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{array} \right)^T. \quad (9.99)$$

Wir bemerken, dass in der Tat (1.79) aus (9.96) folgt. Aus dem Eigenwertproblem (9.53) von A sowie (9.98) und (9.99) resultiert unmittelbar

$$\begin{aligned} AR^T &= A \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ A\vec{x}_1 & A\vec{x}_2 & \cdots & A\vec{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \lambda_1 \vec{x}_1 & \lambda_2 \vec{x}_2 & \cdots & \lambda_n \vec{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \cdots & \vec{x}_n \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = R^T A_{\text{diag}}. \end{aligned} \quad (9.100)$$

Hieraus ergibt sich einerseits der zentrale Satz (9.97) oder durch Umstellung

$$A = R^T A_{\text{diag}} R. \quad (9.101)$$

Das letztere Resultat besagt, dass sich die Matrix A aus deren Eigenwerten und deren Eigenvektoren unter Verwendung von (9.98) und (9.99) darstellen lässt. Abschließend erwähnen wir noch, dass sich die Determinante von A als Produkt deren Eigenwerte ergibt. Aus (9.35)–(9.37), (9.42, (9.98) und (9.101) folgt nämlich:

$$\det A = \det (R^T A_{\text{diag}} R) = \det R^T \det A_{\text{diag}} \det R = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad (9.102)$$

Kapitel 10

Harmonische Schwingungen von Massenpunkten

Wir behandeln nun ein System von N Massenpunkten, die kleine Auslenkungen um ihre Ruhelage ausführen. Beispiele hierfür sind mehrere Massen, die durch Federn gekoppelt sind, gekoppelte Pendel oder die Schwingungen von Molekülen. Es handelt sich hierbei häufig um starke Idealisierungen eines realen Systems, bei der die zugrunde liegenden nichtlinearen Bewegungsgleichungen im Grenzfall kleiner Auslenkungen linearisiert werden. Dadurch lässt sich die Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen auf die Lösung des Eigenwertproblems einer reellen symmetrischen Matrix zurückführen. Als Ergebnis erhalten wir, dass ein solches System zu Eigenschwingungen fähig ist, bei denen alle N Massenpunkte mit ein- und derselben Eigenfrequenz schwingen.

10.1 Notation

Wir führen zunächst eine kompakte Notation zur Beschreibung eines Systems von N Massenpunkten ein. Hierbei ist zu beachten, dass jede einzelne Masse m_i mit $i = 1, 2, \dots, N$ durch einen entsprechenden Ortsvektor $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ charakterisiert ist. Um eine Doppelindizierung für die Komponenten der Ortsvektoren der Massenpunkte zu vermeiden, werden diese wie folgt zu einem $3N$ -dimensionalen Vektor zusammengefasst:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{3N-2} \\ X_{3N-1} \\ X_{3N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

Damit wird das Potential der inneren Kräfte zu einer Funktion dieses $3N$ -dimensionalen Vektors:

$$U = U(\vec{X}). \quad (10.2)$$

Führt man noch die $3N \times 3N$ -Massenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & m_1 & 0 & \cdots & & \mathcal{O} \\ 0 & 0 & m_1 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & m_N & 0 & 0 \\ \mathcal{O} & & \cdots & 0 & m_N & 0 \\ & & & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

ein, so lassen sich die Newtonschen Grundgleichungen (8.54) für die N Massenpunkte zusammenfassen zu

$$M\ddot{\vec{X}} = -\vec{\nabla}U(\vec{X}), \quad (10.4)$$

wobei auf der rechten Seite ein $3N$ -dimensionaler Gradient

$$\vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_{3N}} \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

des Potentials (10.2) auftritt.

10.2 Kleine Auslenkungen aus Ruhelage

Wir nehmen nun an, dass die inneren Kräfte so beschaffen sind, dass die Massenpunkte eine Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$ besitzen. Dann verschwinden die inneren Kräfte in dieser Ruhelage, d.h. es gilt

$$\left. \frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k} \right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} = 0; \quad k = 1, \dots, 3N. \quad (10.6)$$

Wir untersuchen nun kleine Auslenkungen \vec{x} aus dieser Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$:

$$\vec{X} = \vec{X}^{(0)} + \vec{x}. \quad (10.7)$$

Setzt man die Zerlegung (10.7) in das Potential (10.2) der inneren Kräfte ein

$$U = U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x}), \quad (10.8)$$

so kann man eine Taylor-Entwicklung in den kleinen Auslenkungen \vec{x} durchführen. Hierzu verallgemeinert man die in Abschnitt 4.3 diskutierte Taylor-Entwicklung einer Variablen

$$U(X^{(0)} + x) = U(X^{(0)}) + \left. \frac{\partial U(X)}{\partial X} \right|_{X=X^{(0)}} x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U(X)}{\partial X^2} \right|_{X=X^{(0)}} x^2 + \dots \quad (10.9)$$

auf mehrere Variablen

$$U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x}) = U(\vec{X}^{(0)}) + \sum_{k=1}^{3N} \left. \frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k} \right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3N} \sum_{l=1}^{3N} \left. \frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l} \right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} x_k x_l + \dots \quad (10.10)$$

Für kleine Auslenkungen ist es ausreichend, die Taylor-Entwicklung schon nach der zweiten Ordnung abzurechnen. Berücksichtigt man außerdem noch die Bedingung (10.6) für die Ruhelage $\vec{X}^{(0)}$, so verschwinden die linearen Terme und (10.10) vereinfacht sich zu

$$U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x}) = U(\vec{X}^{(0)}) + \frac{1}{2} \vec{x}^T U x, \quad (10.11)$$

wobei die $3N \times 3N$ -Matrix

$$U_{kl} = \left. \frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l} \right|_{\vec{X}=\vec{X}^{(0)}} \quad (10.12)$$

eingeführt wurde. Wir lesen hieraus ab, dass diese Matrix reell ist:

$$U = U^*. \quad (10.13)$$

Da wir nach dem Satz von Schwarz annehmen, dass die zweiten partiellen Ableitungen des Potentials nach den inneren Kräften vertauschen

$$\frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_k \partial X_l} = \frac{\partial^2 U(\vec{X})}{\partial X_l \partial X_k}, \quad (10.14)$$

ist die Matrix (10.12) aber auch symmetrisch:

$$U = U^T. \quad (10.15)$$

Da wir ferner annehmen, dass die Ruhelage der Massenpunkte ein Minimum darstellt, muss die Matrix U positiv definit sein, d.h. es gilt

$$\vec{x}^T U \vec{x} \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{x}. \quad (10.16)$$

Der Gradient des Potentials der inneren Kräfte (10.5) ergibt dann mit (10.8) und (10.11) sowie der Symmetrie (10.15)

$$\frac{\partial U(\vec{X})}{\partial X_k} = \frac{\partial U(\vec{X}^{(0)} + \vec{x})}{\partial x_k} = (U \vec{x})_k, \quad (10.17)$$

so dass die Bewegungsgleichungen (10.4) übergehen in

$$M \ddot{\vec{x}}(t) = -U \vec{x}(t). \quad (10.18)$$

Es handelt sich demnach um ein Differentialgleichungssystem von $3N$ gekoppelten harmonischen Oszillatoren. Eine Vereinfachung erfolgt dadurch, dass man es von links mit dem Inversen der $3N \times 3N$ -Matrix M multipliziert. Hierdurch erhalten wir

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -W\vec{x}(t). \quad (10.19)$$

mit der neu eingeführten Matrix

$$W = M^{-1}U. \quad (10.20)$$

Hier tritt aber das Problem auf, dass (10.20) im allgemeinen nicht symmetrisch ist, auch wenn Massenmatrix M und Koeffizientenmatrix U symmetrisch sind. Daher können wir die Erkenntnisse des letzten Kapitels über das Eigenwertproblem reeller symmetrischer Matrizen hier nicht direkt anwenden.

10.3 Koordinatentransformationen

Deshalb führen wir gehen wir wieder zur Bewegungsgleichung (10.18) zurück und führen die folgende Koordinatentransformation durch

$$\vec{x}(t) = M^{-1/2}\vec{y}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{y}(t) = M^{1/2}\vec{x}(t), \quad (10.21)$$

wobei die Wurzel der Massenmatrix (10.3) definiert ist durch

$$M^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \sqrt{m_1} & 0 & \cdots & & & \mathcal{O} \\ 0 & 0 & \sqrt{m_1} & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \sqrt{m_N} & 0 & 0 \\ & \mathcal{O} & & \cdots & 0 & \sqrt{m_N} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \sqrt{m_N} \end{pmatrix}, \quad (10.22)$$

und entsprechend lautet deren Inverse

$$M^{-1/2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m_1} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1/\sqrt{m_1} & 0 & \cdots & & & \mathcal{O} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{m_1} & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1/\sqrt{m_N} & 0 & 0 \\ & \mathcal{O} & & \cdots & 0 & 1/\sqrt{m_N} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1/\sqrt{m_N} \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (10.18) zu

$$\ddot{\vec{y}}(t) = -V\vec{y}(t) \quad (10.24)$$

mit der neu eingeführten Matrix

$$V = M^{-1/2}UM^{-1/2}. \quad (10.25)$$

Mit den Matrizen $M^{-1/2}$ und U ist aufgrund von (10.13), (10.15), (10.23 und (10.25) auch die Matrix V reell

$$V = V^* \quad (10.26)$$

und symmetrisch:

$$V^T = (M^{-1/2})^T U^T (M^{-1/2})^T = M^{-1/2}UM^{-1/2} = V. \quad (10.27)$$

Außerdem folgt aus der positiven Definitheit der Matrix U in (10.16) und der Koordinatentransformation (10.21), dass auch die Matrix V positiv definit ist:

$$\vec{y}^T V \vec{y} \geq 0 \quad \text{für alle } \vec{y}. \quad (10.28)$$

10.4 Eigenwertproblem

Die Fundamentallösungen von (10.24) sind die Eigenschwingungen

$$\vec{y}_k(t) = \vec{y}_k e^{\pm i\omega_k t}, \quad (10.29)$$

bei denen alle Komponenten von $\vec{y}_k(t)$ mit derselben Frequenz ω_k schwingen und die deshalb als Eigenfrequenz bezeichnet wird. Einsetzen von (10.29) in (10.24) führt auf das Eigenwertproblem der Matrix V :

$$V \vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_k. \quad (10.30)$$

Demnach sind die Amplituden \vec{y}_k der Eigenschwingungen die Eigenvektoren und die Quadrate der Eigenfrequenzen ω_k die Eigenwerte der Matrix V .

10.4.1 Eigenfrequenzen

Das homogene lineare Gleichungssystem (10.30) besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet:

$$\det(V - \omega_k^2 E) = 0. \quad (10.31)$$

Diese Bestimmungsgleichung für ω_k^2 besagt, dass die Quadrate der Eigenfrequenzen ω_k Nullstellen eines Polynoms der Ordnung $3N$ sind. Nach dem Gaußschen Fundamentalsatz der Algebra, siehe Abschnitt 4.6, gibt es genau $3N$ Lösungen ω_k^2 mit $k = 1, 2, \dots, 3N$, wobei Mehrfachwurzeln entsprechend mehrfach gezählt werden. Dabei führen die Eigenschaften (10.27) und (10.28) von V dazu, dass sich für die Eigenwerte ω_k gewisse Aussagen ableiten lassen. Da V nach nach

(10.26) reell und nach (10.27) symmetrisch ist, folgt aus Abschnitt 9.6.1, dass die Quadrate der Eigenwerte ω_k reell sind:

$$\omega_k^2 = \omega_k^{2*} . \quad (10.32)$$

Ferner bewirkt die positive Definitheit (10.28) von V zusammen mit (10.30) und unter Beachtung von (9.22) und (9.23)

$$\vec{y}_k^T V \vec{y}_k = \omega_k^2 \vec{y}_k^T \vec{y}_k = \omega_k^2 |\vec{y}_k|^2 \geq 0 \quad \implies \quad \omega_k^2 \geq 0 , \quad (10.33)$$

so dass auch die Eigenfrequenzen ω_k reell sind.

10.4.2 Eigenvektoren

Zu jedem reellen Eigenwert ω_k^2 der Matrix V erhält man durch Lösung von (10.30) gemäß Abschnitt 9.6.1 einen reellen Eigenvektor \vec{y}_k . Tritt ein Eigenwert ω_k^2 gerade g_k -fach auf, dann gibt es genau g_k verschiedene, linear unabhängige Eigenvektoren \vec{y}_k bei der Lösung von (10.30). Man bezeichnet g_k als den Entartungsgrad von ω_k . Aus Abschnitt 9.5.2 wissen wir ferner, dass die Eigenvektoren \vec{y}_k, \vec{y}_l zu verschiedenen Eigenwerten $\omega_k \neq \omega_l$ orthogonal zueinander. Innerhalb eines g_k -fach entarteten Eigenraumes kann man die Eigenvektoren mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Verfahrens [5, Seite 764] orthogonalisieren. Eine anschließende Normierung führt dazu, da die Eigenvektoren \vec{y}_k ein vollständig normiertes Orthogonalsystem bilden, das auch als VONS bezeichnet wird:

$$\vec{y}_k^T \vec{y}_l = \delta_{kl} . \quad (10.34)$$

10.4.3 Rücktransformation

Wir machen nun die Koordinatentransformation (10.21) wieder rückgängig und untersuchen, wie sich die erzielten Ergebnisse für die transformierten Koordinaten \vec{y} auf die ursprünglichen Koordinaten \vec{x} auswirken. Die Fundamentallösungen (10.29) von (10.24) gehen mit Hilfe von (10.21) über in die Fundamentallösungen von (10.18)

$$\vec{x}_k(t) = \vec{x}_k e^{\pm i\omega_k t} , \quad (10.35)$$

wobei die Amplitude gegeben ist durch

$$\vec{x}_k = M^{-1/2} \vec{y}_k . \quad (10.36)$$

Außerdem geht das Eigenwertproblem (10.30) mit Hilfe von (10.25) über in

$$W \vec{x}_k = \omega_k^2 \vec{x}_k , \quad (10.37)$$

wobei die im allgemeinen nicht symmetrische Matrix W bereits in (10.20) eingeführt wurde. Aus (10.37) lesen wir ab, dass ω_k^2 und $\vec{x}_k = M^{-1/2} \vec{y}_k$ auch Eigenwert und Eigenvektor der

Matrix W sind, wenn sie Eigenwert und Eigenvektor der Matrix V sind. Ferner geht die Orthonormalitätsrelation (10.34) der Eigenvektoren \vec{y}_k dabei über in

$$\vec{x}_k^T M \vec{x}_l = \delta_{kl}. \quad (10.38)$$

Demnach sind die Eigenvektoren \vec{x}_k von W bezüglich der Massenmatrix M orthonormiert.

10.5 Einarbeiten der Anfangsbedingungen

Nun konstruieren wir durch Linearkombination der Fundamentallösungen (10.35) die allgemeine Lösung von (10.18):

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(a_k^{(1)} e^{i\omega_k t} + a_k^{(2)} e^{-i\omega_k t} \right). \quad (10.39)$$

Die Anwendung der Eulerschen Formel (4.48) ergibt dann

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(b_k^{(1)} \cos \omega_k t + b_k^{(2)} \sin \omega_k t \right) \quad (10.40)$$

mit den Koeffizienten

$$b_k^{(1)} = a_k^{(1)} + a_k^{(2)}, \quad b_k^{(2)} = i(a_k^{(1)} - a_k^{(2)}). \quad (10.41)$$

Die noch unbekanntenen Koeffizienten $b_k^{(1)}, b_k^{(2)}$ lassen sich mit Hilfe von (10.40) durch die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(0) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k b_k^{(1)}, \quad (10.42)$$

$$\dot{\vec{x}}_0 = \dot{\vec{x}}(0) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k b_k^{(2)} \omega_k \quad (10.43)$$

festlegen. Multipliziert man (10.42) und (10.43) mit $\vec{x}_l^T M$, so folgt unter der Berücksichtigung der Orthonormalitätsrelation (10.38)

$$b_k^{(1)} = \vec{x}_k^T M \vec{x}_0, \quad b_k^{(2)} = \frac{\vec{x}_k^T M \dot{\vec{x}}_0}{\omega_k}. \quad (10.44)$$

Damit lautet die Lösung (10.40) von (10.18):

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{3N} \vec{x}_k \left(\vec{x}_k^T M \vec{x}_0 \cos \omega_k t + \frac{\vec{x}_k^T M \dot{\vec{x}}_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right). \quad (10.45)$$

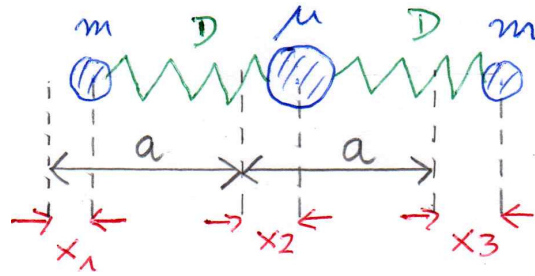


Abbildung 10.1: Eindimensionales Modell eines dreiatomigen Moleküls.

10.6 Dreiatomiges Molekül

Als Beispiel untersuchen wir ein Molekül wie Kohlenstoffdioxid CO_2 , das aus drei Atomen der Massen $m_1 = m$, $m_2 = \mu$, $m_3 = m$ besteht. Der Einfachheit halber nehmen wir dabei an, dass sich die drei Atome nur längs einer Achse bewegen können. In der Ruhelage sollen benachbarte Atome den Gleichgewichtsabstand a voneinander haben. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage lassen sich die Rückstellkräfte durch Federn mit der Federkonstanten D modellieren, siehe Abb. 10.1. Die potentielle Energie des Systems setzt sich additiv aus den potentiellen Energien der einzelnen Federn zusammen und lautet

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{D}{2} [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2]. \quad (10.46)$$

Damit erhalten wir für die Newtonschen Bewegungsgleichungen für die Auslenkungen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ der drei Massen aus der Gleichgewichtslage

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = D(x_2 - x_1), \\ \mu\ddot{x}_2 &= -\frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = -D(x_2 - x_1) + D(x_3 - x_2), \\ m\ddot{x}_3 &= -\frac{\partial U(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = -D(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Sie sind demnach von der Form (10.18), wobei die Matrizen M und U die folgende explizite Gestalt besitzen:

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad U = D \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

Die Invertierung der Massenmatrix M führt analog zu (10.22) und (10.23) auf

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}, \quad (10.49)$$

so dass sich aus (10.20), (10.48) und (10.49) die Matrix

$$W = M^{-1}U = \begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & \frac{2D}{\mu} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix} \quad (10.50)$$

ergibt. Wir bemerken, dass die Matrix W im Fall $m \neq \mu$ nicht symmetrisch ist. Das charakteristische Polynom der Matrix (10.50) lautet:

$$\det(W - \omega^2 E) = \begin{vmatrix} \frac{D}{m} - \omega^2 & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & \frac{2D}{\mu} - \omega^2 & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = \omega^2 \left(\frac{D}{m} - \omega^2 \right) \left(\omega^2 - 2\frac{D}{\mu} - \frac{D}{m} \right). \quad (10.51)$$

Die Nullstellen dieser Gleichung führen uns auf die folgenden Eigenfrequenzen des Moleküls:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{D}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{D}{m} + \frac{2D}{\mu}}. \quad (10.52)$$

Die dazugehörigen unnormierten Eigenvektoren ergeben sich durch Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (10.37) unter Verwendung von (10.50) und (10.52):

$$(W - \omega_1^2 E)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & \frac{2D}{\mu} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10.53)$$

$$(W - \omega_2^2 E)\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & \frac{2D}{\mu} - \frac{D}{m} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_2 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_2 = N_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (10.54)$$

$$(W - \omega_3^2 E)\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{m} & 0 \\ -\frac{D}{\mu} & -\frac{D}{m} & -\frac{D}{\mu} \\ 0 & -\frac{D}{m} & -\frac{2D}{\mu} \end{pmatrix} \vec{x}_3 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x}_3 = N_3 \begin{pmatrix} \mu \\ -2m \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Entsprechend (10.38) sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten tatsächlich ortho-



Abbildung 10.2: Eigenschwingungen des dreiatomigen Moleküls von Abb. 10.1 mit den Eigenfrequenzen (10.52) und den Eigenvektoren (10.53)–(10.55): a) Translation, b) symmetrische Streckschwingung, c) asymmetrische Streckschwingung.

gonal zueinander:

$$\vec{x}_2^T M \vec{x}_1 = N_1 N_2 (1, 0, -1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (10.56)$$

$$\vec{x}_3^T M \vec{x}_1 = N_1 N_3 (\mu, -2m, \mu) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (10.57)$$

$$\vec{x}_3^T M \vec{x}_2 = N_2 N_3 (\mu, -2m, \mu) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0. \quad (10.58)$$

Die Bedingungen für die Normierung der Eigenvektoren lauten

$$\vec{x}_1^T M \vec{x}_1 = N_1^2 (1, 1, 1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \quad (10.59)$$

$$\vec{x}_2^T M \vec{x}_2 = N_2^2 (1, 0, -1) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1, \quad (10.60)$$

$$\vec{x}_3^T M \vec{x}_3 = N_3^2 (\mu, -2m, \mu) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ -2m \\ \mu \end{pmatrix} = 1, \quad (10.61)$$

so dass sich die Normierungskonstanten ergeben zu:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu + 2m}}, \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}, \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{2m\mu(\mu + 2m)}}. \quad (10.62)$$

Die Eigenvektoren des dreiatomigen Moleküls (10.53)–(10.55) sind in Abb. 10.2 graphisch veranschaulicht. Dadurch ist es möglich, die Eigenschwingungen zu den Eigenfrequenzen (10.52) als Translation sowie symmetrische und asymmetrische Streckschwingung zu identifizieren.

Kapitel 11

Rotierendes Bezugssystem

In der Newtonschen Mechanik sind alle Inertialsysteme physikalisch gleichwertig. Das bedeutet insbesondere, dass die Newtonschen Bewegungsgleichung in allen Inertialsystemen dieselbe Form besitzt. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn ein System Beschleunigungen unterworfen wird, da dann in den Newtonschen Bewegungsgleichungen zusätzliche Scheinkräfte auftreten. Auch wenn diese Scheinkräfte letztendlich einen geometrischen Ursprung haben, so wirken sie im rotierenden Bezugssystem wie reale Kräfte. Die neuen Bewegungsgleichungen erhält man, indem man die Newtonschen Bewegungsgleichungen in einem Inertialsystem aufstellt und dann in das beschleunigte System transformiert. In diesem Kapitel untersuchen wir exemplarisch die Newtonschen Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Bezugssystem und leiten ab, dass es mit der Zentrifugalkraft, der Coriolis-Kraft und der Euler-Kraft insgesamt drei Scheinkräfte gibt. Anschließend behandeln wir als Anwendung den freien Fall auf der rotierenden Erde, bei dem ein fallender Massenpunkt durch die Coriolis-Kraft nach Osten abgelenkt wird.

11.1 Transformation der Einheitsvektoren

Wir untersuchen die Transformation zwischen einem ruhenden Bezugssystem S und einem beliebig rotierenden Bezugssystem S' , die beide denselben Ursprung besitzen. Während die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ von S zeitunabhängig sind, besitzen die Einheitsvektoren $\vec{e}'_1(t), \vec{e}'_2(t), \vec{e}'_3(t)$ von S' eine explizite Zeitabhängigkeit. Der Zusammenhang zwischen den Einheitsvektoren von S und S' lautet gemäß (1.74)

$$\vec{e}'_i(t) = R_{ij}(t)\vec{e}_j, \quad (11.1)$$

wobei die Matrixelemente $R_{ij}(t)$ durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ und \vec{e}_j bestimmt sind:

$$R_{ij}(t) = \vec{e}'_i(t) \cdot \vec{e}_j = \cos[\sphericalangle(\vec{e}'_i(t), \vec{e}_j)]. \quad (11.2)$$

In (11.1) haben wir die Summation über j bewußt nicht mitaufgeführt. Wir wollen nämlich von jetzt ab zur Vereinfachung der Notation die Einsteinsche Summenkonvention verwenden, wonach über zwei gleiche Indizes automatisch aufzusummieren ist. Wir setzen voraus, dass sowohl

die Einheitsvektoren \vec{e}_i von S als auch die Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S' ein Orthonormalsystem bilden:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad (11.3)$$

$$\vec{e}'_i(t) \cdot \vec{e}'_j(t) = \delta_{ij}. \quad (11.4)$$

Dies führt zu einer Einschränkung der Matrixelemente $R_{ij}(t)$. Aufgrund von (11.1) und (11.3) gilt dann

$$\vec{e}'_k(t) \cdot \vec{e}'_l(t) = R_{ki}(t)R_{lj}(t)\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = R_{ki}(t)R_{lj}(t)\delta_{ij} = R_{ki}(t)R_{li}(t), \quad (11.5)$$

so dass der Vergleich mit (11.4) auf die Beziehung

$$R_{ki}(t)R_{li}(t) = \delta_{kl} \quad (11.6)$$

führt. Sie besagt, dass die aus den Matrixelementen $R_{ij}(t)$ aufgebaute Matrix $R(t)$ orthonormal ist:

$$R(t)R^T(t) = I. \quad (11.7)$$

Das Inverse der Matrix $R(t)$ ist demnach die transponierte Matrix

$$R^{-1}(t) = R^T(t). \quad (11.8)$$

Mit (11.7) gilt dann auch

$$R^T(t)R(t) = E, \quad (11.9)$$

was in Komponentenschreibweise heißt

$$R_{ik}(t)R_{il}(t) = \delta_{kl}. \quad (11.10)$$

Man beachte, dass die Summation in (11.6) bzw. in (11.10) über die zweiten bzw. die ersten Indizes der Matrixelemente $R_{ij}(t)$ erfolgt. Außerdem führt die Invertierung des Zusammenhangs (11.1) mit Hilfe von (11.10) auf

$$R_{ik}(t)\vec{e}'_i(t) = R_{ik}(t)R_{ij}(t)\vec{e}_j = \delta_{kj}\vec{e}_j = \vec{e}_k, \quad (11.11)$$

so dass gilt

$$\vec{e}_i = \vec{e}'_j(t)R_{ji}(t). \quad (11.12)$$

11.2 Zeitableitung der Einheitsvektoren

Wir betrachten nun die Zeitableitung von (11.1) und verwenden dabei, dass die Einheitsvektoren \vec{e}_j von S nicht explizit zeitabhängig sind:

$$\dot{\vec{e}}_j = \vec{0}. \quad (11.13)$$

Mit Hilfe von (11.12) können wir dann die Zeitableitung der Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S' wieder nach den Basisvektoren $\vec{e}_i(t)$ von S' zerlegen

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \vec{e}'_j(t)\Omega_{ji}(t), \quad (11.14)$$

wobei die Matrixelemente $\Omega_{ji}(t)$ gegeben sind durch

$$\Omega_{ji}(t) = R_{jk}(t)\dot{R}_{ik}(t). \quad (11.15)$$

Differenzieren wir (11.6) nach der Zeit

$$\dot{R}_{ik}(t)R_{jk}(t) + R_{ik}(t)\dot{R}_{jk}(t) = 0, \quad (11.16)$$

so können wir mit Hilfe von (11.15) eine wichtige Eigenschaft der Matrixelemente $\Omega_{ji}(t)$ ablesen:

$$\Omega_{ji}(t) + \Omega_{ij}(t) = 0. \quad (11.17)$$

Demnach besitzt die aus den Matrixelementen $\Omega_{ij}(t)$ aufgebaute Matrix

$$\Omega(t) = R(t)\dot{R}^T(t) \quad (11.18)$$

die Eigenschaft, antisymmetrisch zu sein:

$$\Omega(t) + \Omega^T(t) = 0. \quad (11.19)$$

Eine antisymmetrische 3×3 -Matrix wie $\Omega(t)$ besteht aus genau drei verschiedenen Komponenten $\Omega'_1(t)$, $\Omega'_2(t)$ und $\Omega'_3(t)$:

$$\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega'_3(t) & \Omega'_2(t) \\ \Omega'_3(t) & 0 & -\Omega'_1(t) \\ -\Omega'_2(t) & \Omega'_1(t) & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.20)$$

Wir führen nun einen Vektor $\vec{\Omega}(t)$ im rotierenden Bezugssystem ein, der gerade aus diesen drei verschiedenen Komponenten $\Omega'_1(t)$, $\Omega'_2(t)$ und $\Omega'_3(t)$ besteht:

$$\vec{\Omega}(t) = \Omega'_i(t)\vec{e}'_i(t). \quad (11.21)$$

Dann können wir mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors (1.53) zwischen den Elementen der antisymmetrischen 3×3 -Matrix (11.20) und den Komponenten des Vektors (11.21) den folgenden Zusammenhang angeben:

$$\Omega_{ij}(t) = \varepsilon_{jik}\Omega'_k(t). \quad (11.22)$$

Tatsächlich gilt für die nicht verschwindenden Matrixelemente:

$$\begin{aligned} \Omega_{12}(t) &= \varepsilon_{213}\Omega'_3(t) = -\Omega'_3(t), & \Omega_{21}(t) &= \varepsilon_{123}\Omega'_3(t) = \Omega'_3(t), \\ \Omega_{13}(t) &= \varepsilon_{312}\Omega'_2(t) = \Omega'_2(t), & \Omega_{31}(t) &= \varepsilon_{132}\Omega'_2(t) = -\Omega'_2(t), \\ \Omega_{23}(t) &= \varepsilon_{321}\Omega'_1(t) = -\Omega'_1(t), & \Omega_{32}(t) &= \varepsilon_{231}\Omega'_1(t) = \Omega'_1(t). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Man kann aber auch die Beziehung (11.22) zwischen den Elementen der antisymmetrischen 3×3 -Matrix (11.20) und den Komponenten des Vektors (11.21) invertieren. Hierzu verwenden wir die Kontraktion zweier Levi-Civita-Tensoren

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}, \quad (11.24)$$

die in den Übungen behandelt wurde, und erhalten

$$\Omega'_k(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \Omega_{ji}(t). \quad (11.25)$$

Setzen wir (11.22) in (11.14) ein, so erhalten wir aufgrund der Symmetrie (1.54) des Levi-Civita-Tensors bei der zyklischen Permutation aller Indizes

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} \quad (11.26)$$

zunächst

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \dot{\vec{e}}'_j(t) \varepsilon_{ijk} \Omega'_k(t) = \Omega'_k(t) \vec{e}'_k(t). \quad (11.27)$$

Analog zu (1.57) gilt folgende Beziehung zwischen den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S' und dem Levi-Civita-Tensor ε_{ijk} :

$$\vec{e}'_i(t) \times \vec{e}'_j(t) = \varepsilon_{ijk} \vec{e}'_k(t). \quad (11.28)$$

Einsetzen von (11.28) in (11.27) ergibt aufgrund von (11.21)

$$\dot{\vec{e}}'_i(t) = \Omega'_k(t) \vec{e}'_k(t) \times \vec{e}'_i(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{e}'_i(t). \quad (11.29)$$

Diese Beziehung rechtfertigt es, den Vektor $\vec{\Omega}(t)$ mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor zu identifizieren.

11.3 Zeitableitung der Vektorkomponenten

Ein Vektor $\vec{A}(t)$ kann nun sowohl nach den Einheitsvektoren \vec{e}_i von S

$$\vec{A}(t) = A_i(t) \vec{e}_i \quad (11.30)$$

als auch nach den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S'

$$\vec{A}(t) = A'_i(t) \vec{e}'_i(t) \quad (11.31)$$

entwickelt werden. Bei der Entwicklung (11.30) bezüglich S rührt die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{A}(t)$ nur von den Vektorkomponenten $A_i(t)$ her, so dass die Zeitableitung nach (11.30) ergibt

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_i(t)}{dt} \vec{e}_i. \quad (11.32)$$

Bei der Entwicklung (11.31) bezüglich S' dagegen rührt die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{A}(t)$ sowohl von den Vektorkomponenten $A'_i(t)$ als auch von den Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ her. Daher erhalten wir aufgrund von (11.29) und (11.31)

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + A'_i(t) \frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt} = \frac{dA'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) + \vec{\Omega}(t) \times \vec{A}(t). \quad (11.33)$$

Die Zeitableitung des Vektors $\vec{A}(t)$ bezüglich S gemäß (11.32)

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_S = \frac{dA_i(t)}{dt} \vec{e}_i \quad (11.34)$$

setzt sich demnach additiv aus der Zeitableitung des Vektors $\vec{A}(t)$ bezüglich S'

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{S'} = \frac{dA'_i(t)}{dt} \vec{e}'_i(t) \quad (11.35)$$

und der Zeitableitung der Einheitsvektoren $\vec{e}'_i(t)$ von S'

$$\vec{\Omega}(t) \times \vec{A}(t) \quad (11.36)$$

zusammen. Man bezeichnet (11.34) als wahre Zeitableitung, (11.35) als scheinbare Zeitableitung und (11.36) als Rotationsableitung. Demnach kann man (11.33) auch zusammenfassen als

$$\left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega}(t) \times \vec{A}(t). \quad (11.37)$$

Als Kurzschreibweise kann man (11.37) auch als operatorwertige Gleichung auffassen:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_S \bullet = \left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} \bullet + \vec{\Omega}(t) \times \bullet. \quad (11.38)$$

11.4 Trägheitskräfte

Wir wenden nun (11.38) auf die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Massenpunktes an und erhalten für die Geschwindigkeit

$$\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_S = \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t). \quad (11.39)$$

Dann wenden wir die Operatorengleichung (11.38) nochmals auf (11.39) an und erhalten für die Beschleunigung

$$\left. \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right|_S = \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega}(t) \times \right] \left[\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t) \right]. \quad (11.40)$$

Ein Ausmultiplizieren der beiden Klammern führt dabei auf

$$\left. \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right|_S = \left. \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \right|_{S'} + \left. \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} \right|_{S'} \times \vec{r}(t) + 2\vec{\Omega}(t) \times \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{S'} + \vec{\Omega}(t) \times \left[\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t) \right]. \quad (11.41)$$

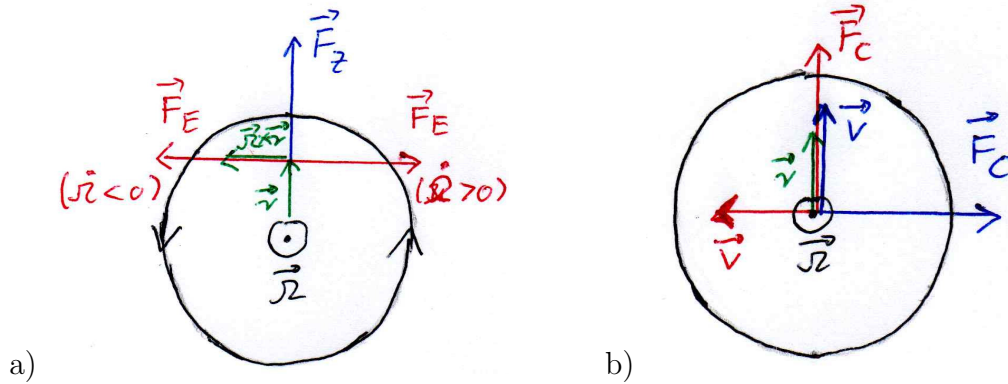


Abbildung 11.1: Richtungen der Scheinkräfte auf einer Drehscheibe: a) Zentrifugal- und Euler-Kraft, b) Coriolis-Kraft.

Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung im ruhenden Bezugssystem S

$$m \left. \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \right|_S = \vec{F} \quad (11.42)$$

folgt dann mit Hilfe von (11.41) eine entsprechende Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem S' :

$$m \left. \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \right|_{S'} = \vec{F} - m \left. \frac{d\vec{\Omega}(t)}{dt} \right|_{S'} \times \vec{r}(t) - 2m\vec{\Omega}(t) \times \left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{S'} - m\vec{\Omega}(t) \times [\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t)]. \quad (11.43)$$

Es handelt sich hierbei wieder um eine Newtonsche Bewegungsgleichung, bei der aber neben der Kraft \vec{F} noch drei Scheinkräfte hinzukommen. Da diese Scheinkräfte proportional zur trägen Massen m sind, bezeichnet man sie auch als Trägheitskräfte. Im Einzelnen unterscheidet man in (11.43) von links nach rechts gelesen die Euler-Kraft, die Coriolis-Kraft und die Zentrifugalkraft.

Wir betrachten nun separat die drei Scheinkräfte und diskutieren deren Richtungen für eine Drehscheibe, wie sie beispielsweise bei einem Karussell mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ auftreten, siehe Abb. 11.1. Die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = -m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ ist immer radial von der Rotationsachse nach Außen gerichtet. Demgegenüber wirkt die Eulerkraft $\vec{F}_E = -m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}$ mit der Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\Omega} \vec{e}_z$ immer senkrecht zur Zentrifugalkraft, d.h. sie zeigt tangential. Beim Anfahren, also $\dot{\Omega} > 0$, bzw. Abbremsen, also $\dot{\Omega} < 0$, wirkt sie tangential entgegen bzw. in der Richtung der momentanen Rotation. Und im Unterschied zu Zentrifugal- und Euler-Kraft wirkt die Coriolis-Kraft $\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}$ nur dann, wenn sich der Körper relativ zum mitrotierenden Bezugssystem bewegt und zwar zeigt sie senkrecht zur Bewegungsrichtung. Bei einer radialen bzw. tangentialen Bewegung wirkt sie tangential in der Richtung der momentanen Rotation bzw. radial.

Berücksichtigen wir noch, dass im ruhenden Bezugssystem S die Newtonsche Gravitationskraft wirkt

$$\vec{F} = -GmM \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3}, \quad (11.49)$$

so folgt aus (11.44)–(11.49) die noch exakte Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}'(t)}{dt^2} \Big|_{S'} &= -GmM \frac{\vec{R}(t) + \vec{r}'(t)}{|\vec{R}(t) + \vec{r}'(t)|^3} - 2m\vec{\Omega}(t) \times \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \Big|_{S'} \\ &\quad - m\vec{\Omega}(t) \times [\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}'(t)] - m\vec{\Omega}(t) \times [\vec{\Omega}(t) \times \vec{R}(t)]. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Hier können wir zwei physikalische Näherungen durchführen. Da der Betrag des Winkelgeschwindigkeitsvektors, der die Erdrotation beschreibt, sehr klein ist

$$\Omega = |\vec{\Omega}(t)| = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}}, \quad (11.51)$$

kann man in (11.50) die in $\vec{\Omega}(t)$ quadratischen Terme vernachlässigen. Betrachtet man außerdem einen Massenpunkt in der Nähe der Erdoberfläche, so läßt sich $\vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$ näherungsweise durch $\vec{R}(t)$ ersetzen. Damit können wir die Erdbeschleunigung

$$\vec{g} = -GM \frac{\vec{R}(t)}{|\vec{R}(t)|^3} \quad (11.52)$$

einführen, deren Betrag von der Masse der Erde $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und dem Erdradius $|\vec{R}(t)| = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$ bestimmt wird:

$$g = |\vec{g}| = 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2} = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}. \quad (11.53)$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (11.50) schließlich auf

$$\ddot{\vec{r}}'(t) = \vec{g} - 2\vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{r}}'(t). \quad (11.54)$$

Beim freien Fall auf der Erde tritt demnach im Unterschied zum ruhenden Bezugssystem noch die Coriolis-Beschleunigung auf, die den Körper in x' - und y' -Richtung ablenkt. Die in (11.54) auftretenden Vektoren lauten im bewegten Bezugssystem

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega}(t) = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \lambda \\ 0 \\ \Omega \cos \lambda \end{pmatrix}, \quad (11.55)$$

wobei λ gemäß Abb. 11.2 den Breitengrad darstellt. Mit dem Vektorprodukt

$$\vec{\Omega}(t) \times \dot{\vec{r}}'(t) = \begin{vmatrix} \vec{e}'_1(t) & \vec{e}'_2(t) & \vec{e}'_3(t) \\ -\Omega \sin \lambda & 0 & \Omega \cos \lambda \\ \dot{x}'(t) & \dot{y}'(t) & \dot{z}'(t) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega \cos \lambda \dot{y}'(t) \\ \Omega \cos \lambda \dot{x}'(t) + \Omega \sin \lambda \dot{z}'(t) \\ -\Omega \sin \lambda \dot{y}'(t) \end{pmatrix} \quad (11.56)$$

erhält man die drei gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x}'(t) = 2\Omega \cos \lambda \dot{y}'(t) \quad (11.57)$$

$$\ddot{y}'(t) = -2\Omega \cos \lambda \dot{x}'(t) - 2\Omega \sin \lambda \dot{z}'(t) \quad (11.58)$$

$$\ddot{z}'(t) = -g + 2\Omega \sin \lambda \dot{y}'(t). \quad (11.59)$$

Beim freien Fall auf der rotierenden Erde wird der Körper aus der Höhe h zur Zeit $t = 0$ losgelassen, so dass sich folgende Anfangsbedingungen ergeben:

$$x'(0) = y'(0) = 0, \quad z'(0) = h, \quad \dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = \dot{z}'(0) = 0. \quad (11.60)$$

Die Bewegungsgleichungen (11.57)–(11.59) lassen sich unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (11.60) einmal hochintegrieren:

$$\dot{x}'(t) = 2\Omega \cos \lambda y'(t), \quad (11.61)$$

$$\dot{y}'(t) = -2\Omega \cos \lambda x'(t) - 2\Omega \sin \lambda z'(t) + 2\Omega h \sin \lambda, \quad (11.62)$$

$$\dot{z}'(t) = -gt + 2\Omega \sin \lambda y'(t). \quad (11.63)$$

Einsetzen von (11.61) und (11.63) in (11.58) führt auf

$$\ddot{x}'(t) = -4\Omega^2 y'(t) + 2\Omega g t \sin \lambda. \quad (11.64)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y'(t) = \frac{g \sin \lambda}{2\Omega} t + A \cos 2\Omega t + B \sin 2\Omega t. \quad (11.65)$$

Die Einarbeitung der Anfangsbedingungen (11.60) legt die Parameter A und B fest:

$$y'(0) = A = 0 \quad (11.66)$$

$$\dot{y}'(0) = \frac{g \sin \lambda}{2\Omega} + 2\Omega B = 0 \quad \implies \quad B = -\frac{g \sin \lambda}{4\Omega^2}. \quad (11.67)$$

Einsetzen von (11.66) und (11.67) in (11.65) führt auf die gesuchte Lösung

$$y'(t) = \frac{g \sin \lambda}{2\Omega} \left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} \right). \quad (11.68)$$

Unter Verwendung von (11.68) gehen (11.61) und (11.63) über in

$$\dot{x}'(t) = g \sin \lambda \cos \lambda \left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} \right), \quad (11.69)$$

$$\dot{z}'(t) = -gt + g \sin^2 \lambda \left(t - \frac{\sin 2\Omega t}{2\Omega} \right), \quad (11.70)$$

so dass eine Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (11.60) ergibt:

$$x'(t) = g \sin \lambda \cos \lambda \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\Omega t - 1}{4\Omega^2} \right), \quad (11.71)$$

$$z'(t) = h - \frac{g}{2} t^2 + g \sin^2 \lambda \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\Omega t - 1}{4\Omega^2} \right). \quad (11.72)$$

Die zeitlichen Oszillationen, die beim freien Fall auf der Erde gemäß (11.68), (11.71), (11.72) auftreten sollen, sind aber nicht physikalisch. Es handelt sich hierbei lediglich um ein mathematisches Artefakt, das dadurch entstand, dass wir die in der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}(t)$ quadratischen Terme in (11.50) vernachlässigten. Da wir in der zugrunde liegenden Bewegungsgleichung (11.50) nur die Terme berücksichtigten, die in der Winkelgeschwindigkeit linear sind, sind in der Lösung unseres Anfangswertproblems auch nur diejenigen Terme physikalisch, die linear in der Winkelgeschwindigkeit sind. Deshalb entwickeln wir die trigonometrischen Funktionen in (11.68), (11.71), (11.72) nach Taylor bezüglich der Winkelgeschwindigkeit Ω :

$$\sin 2\Omega t = 2\Omega t - \frac{1}{6}(2\Omega t)^3 + \dots, \quad \cos 2\Omega t = 1 - \frac{1}{2}(2\Omega t)^2 + \dots \quad (11.73)$$

Die erste Ordnung in Ω lautet dann

$$x'(t) = g \sin \lambda \cos \lambda \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1 - 2\Omega^2 t^2 - 1}{4\Omega^2} \right) + \dots = 0 + \dots, \quad (11.74)$$

$$y'(t) = \frac{g \sin \lambda}{2\Omega} \left(t - \frac{2\Omega t - 4\Omega^3 t^3/3}{2\Omega} \right) + \dots = \frac{1}{3} \Omega g \sin \lambda t^3 + \dots, \quad (11.75)$$

$$z'(t) = h - \frac{g}{2} t^2 + \dots \quad (11.76)$$

Demnach wird ein fallender Massenpunkt nach Osten abgelenkt. Dieses Ergebnis erscheint zunächst paradox, weil sich die Erde doch auch nach Osten dreht. Es wird aber sofort anschaulich verständlich, wenn man bedenkt, dass der Massenpunkt in der Höhe h zur Zeit $t = 0$ durch die Erdrotation bezüglich des ruhenden Bezugssystems eine größere Geschwindigkeitskomponente ostwärts besitzt als bezüglich des bewegten Bezugssystems S' auf der Erdoberfläche. Es ist diese "überschüssige" Geschwindigkeit in Ostrichtung, die für den Beobachter auf der Erde den Massenpunkt nach Osten fallen lässt.

Zur quantitativen Auswertung setzen wir die Zeit zum Durchfallen der Höhe h nach (11.76)

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (11.77)$$

in (11.75) ein und erhalten für die Ostablenkung

$$y' = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Omega h \sin \lambda \sqrt{\frac{h}{g}}. \quad (11.78)$$

Am Äquator mit dem Breitengrad $\lambda = 90^\circ$ ist diese Ostablenkung maximal und ergibt bei einer Höhe von $h = 100$ m

$$y' = \frac{2\sqrt{2}}{3} 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{s}} 100 \text{ m} \sqrt{\frac{100 \text{ m}}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 2,2 \text{ cm}. \quad (11.79)$$

In unseren Breiten dagegen liegt der Breitengrad $\lambda = 40^\circ$ vor, so dass diese Ostablenkung um den Faktor

$$\sin 40^\circ = 0,64 \quad (11.80)$$

unterdrückt ist.

Kapitel 12

Mehrdimensionale Integrale

Aus der Schule wissen wir, dass das Integral einer Funktion der Fläche zwischen dieser Funktion und der x -Achse entspricht. Dieses Konzept lässt sich nun auf verschiedene Weise auf mehrere Raumdimensionen verallgemeinern. Hierzu betrachten wir im Einzelnen Flächen-, Volumen- und Oberflächenintegrale. Deren Berechnung wird üblicherweise nicht in kartesischen Koordinaten sondern in geeignet gewählten krummlinigen Koordinaten durchgeführt. Bei einer solchen Koordinatentransformation wird insbesondere auch das Integrationsmaß verändert, was durch die Jacobi-Determinante berücksichtigt wird.

12.1 Flächenintegrale

Es sei F eine Fläche in der Ebene und $f(x, y)$ eine skalare Funktion. Dann lässt sich deren Integral bezüglich der Fläche F

$$I = \iint_F dF f(x, y) \quad (12.1)$$

mit dem infinitesimalen Flächenelement

$$dF = dx dy \quad (12.2)$$

auf zweierlei Weisen berechnen. Zunächst nehmen wir an, dass die Fläche F parametrisiert ist durch

$$F = \left\{ (x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \right\}, \quad (12.3)$$

Dann ist das Flächenintegral (12.1) iterativ zu berechnen gemäß

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy f(x, y), \quad (12.4)$$

wie in Abb. 12.1a) dargestellt. Es wird also zuerst das Integral über y zwischen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ und anschließend das Integral über x zwischen x_1 und x_2 ausgeführt. Nach dem Satz von

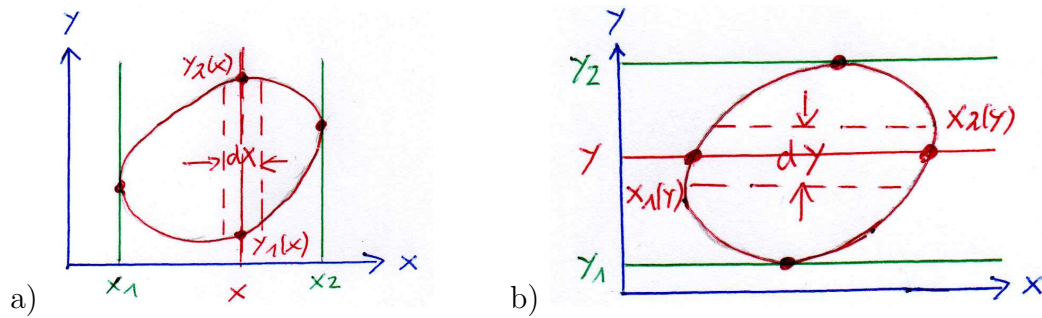


Abbildung 12.1: Iterative Berechnung eines Flächenintegrals (12.1), (12.2) gemäß (12.4) in a) oder (12.5) in b).

Fubini ist es aber prinzipiell auch möglich, die beiden Integrale in umgekehrter Reihenfolge durchzuführen, siehe Abb. 12.1b):

$$I = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx f(x, y). \quad (12.5)$$

Dann müsste aber die Fläche parametrisiert sein durch

$$F = \left\{ (x, y) \mid y_1 \leq y \leq y_2; \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \right\}. \quad (12.6)$$

Wählt man bei diesen Flächenintegralen (12.4) und (12.5) als skalare Funktion $f(x, y) = 1$, dann gehen sie in Integrale zur Bestimmung der Fläche F über. Ein Beispiel hierfür hatten wir schon bei der Berechnung der Fläche einer Ellipse in Abschnitt 7.3.3 kennengelernt. Hier hatten wir eine Viertellipse entsprechend des allgemeinen Falls (12.3) wie in (7.31) angegeben parametrisiert, siehe Abb. 7.5. Entsprechend reduziert sich dann das Flächenintegral (12.4) auf

$$\frac{F}{4} = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}/a} dy, \quad (12.7)$$

so dass die Ausführung des y -Integrals direkt auf (7.32) führt.

12.2 Volumenintegrale

Analog dazu lässt sich auch das Volumenintegral einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ einführen

$$I = \iiint_V dV f(x, y, z) \quad (12.8)$$

mit dem infinitesimalen Volumenelement

$$dV = dx dy dz. \quad (12.9)$$

Liegt beispielsweise die Parametrisierung des Volumenintegrals in der Form

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x); \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \right\} \quad (12.10)$$

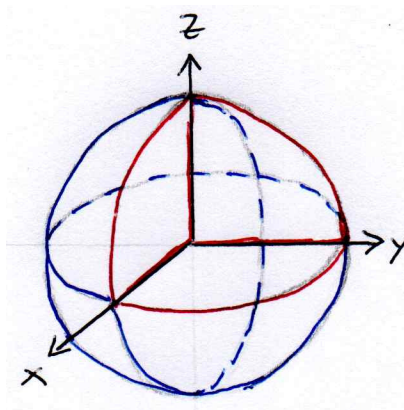


Abbildung 12.2: Kugel im ersten Oktanten.

vor, dann ist das Volumenintegral iterativ definiert durch

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz f(x, y, z). \quad (12.11)$$

Entsprechend des Satzes von Fubini gibt es 5 weitere Möglichkeiten, das Volumenintegral (12.8), (12.9) durch iteratives Berechnen eindimensionaler Integrale auszuwerten. Spezialisiert man bei das Volumenintegralen (12.11) auf die skalare Funktion $f(x, y, z) = 1$, dann kann man das zugrunde liegende Volumen V berechnen. Beispielsweise lässt sich das Volumen einer Kugel mit Radius R berechnen, die in kartesischen Koordinaten beschrieben wird durch

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \quad (12.12)$$

Aus Symmetriegründen kann man sich dabei auf ein Achtel des Volumens beschränken, das im ersten Oktanten des Koordinatensystems aufgrund von (12.12) parametrisiert wird durch

$$\frac{V}{8} = \left\{ (x, y, z) \left| \begin{array}{l} x_1 = 0 \leq x \leq x_2 = R, \\ y_1(x) = 0 \leq y \leq y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \\ z_1(x, y) = 0 \leq z \leq z_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \end{array} \right. \right\}, \quad (12.13)$$

siehe Abb. 12.2. Mit Hilfe von (12.11) und $f(x, y, z)$ erhalten wir zunächst

$$\frac{V}{8} = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dz. \quad (12.14)$$

Das z -Integral lässt sich dann direkt auswerten:

$$V = 8 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (12.15)$$

Anschließend wird das y -Integral mit Hilfe der Substitution $y = \sqrt{R^2 - x^2} \sin t$ analog zum Vorgehen auf Seite 109 berechnet und wir erhalten:

$$V = 2\pi \int_0^R dx (R^2 - x^2). \quad (12.16)$$

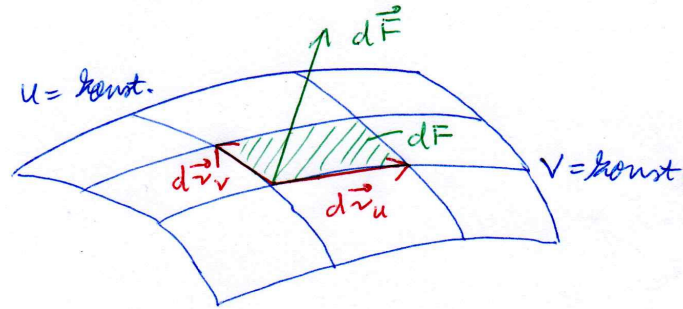


Abbildung 12.3: Infinitesimale Änderungen des Ortsvektors $d\vec{r}_u$, $d\vec{r}_v$ führen gemäß (12.20) zu einem Vektor des infinitesimalen Flächenelements $d\vec{F}$.

Das verbleibende x -Integral ist dann elementar und führt auf den bekannten Ausdruck für das Volumen einer Kugel:

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (12.17)$$

12.3 Oberflächenintegrale

Der Begriff des Flächenintegrals lässt sich auch von der ebenen Fläche auf eine allgemein gekrümmte Fläche ausdehnen. Dies eröffnet die Möglichkeit, auch den Fluß eines Vektorfeldes durch diese gekrümmte Fläche einzuführen. Ist diese gekrümmte Fläche geschlossen, dann spricht man vom Oberflächenintegral.

12.3.1 Gekrümmte Fläche

Es sei nun F eine im allgemeinen gekrümmte Fläche. Dann lässt sich diese Fläche durch dreidimensionale Ortsvektoren \vec{r} beschreiben, die von zwei Parametern u und v abhängen:

$$F = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(u, v) \right\}. \quad (12.18)$$

Infinitesimale Veränderungen der Parameter u und v führen dann zu entsprechenden infinitesimalen Änderungen des Ortsvektors \vec{r} :

$$d\vec{r}_u = \vec{r}(u + du, v) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \quad d\vec{r}_v = \vec{r}(u, v + dv) - \vec{r}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv. \quad (12.19)$$

Da es sich bei $d\vec{r}_u$ und $d\vec{r}_v$ um zwei dreidimensionale Vektoren handelt, bilden sie den Vektor des infinitesimalen Flächenelements

$$d\vec{F} = d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v, \quad (12.20)$$

der nicht nur einen Betrag sondern auch noch eine Richtung hat, siehe Abb. 12.3. Einsetzen von (12.19) in (12.20) führt auf

$$d\vec{F} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} du dv, \quad (12.21)$$

Zunächst lesen wir aus (12.21) den Einheitsvektor in Richtung der Flächennormalen ab:

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v}{|d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}. \quad (12.22)$$

Dann lässt sich der Vektor des infinitesimalen Flächenelements (12.21) auch schreiben als

$$d\vec{F} = dF \vec{n}, \quad (12.23)$$

wobei dessen Betrag gegeben ist durch

$$dF = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv. \quad (12.24)$$

12.3.2 Ebene Fläche

Wir bemerken, dass die hier behandelte allgemeine gekrümmte Fläche auch die ebene Fläche beinhaltet. In diesem Spezialfall können wir nämlich die beiden Parameter u und v mit den kartesischen Koordinaten x und y identifizieren, so dass (12.19) auf die infinitesimalen Vektoren

$$d\vec{r}_x = \vec{r}(x + dx, y) - \vec{r}(x, y) = dx \vec{e}_x \quad d\vec{r}_y = \vec{r}(x, y + dy) - \vec{r}(x, y) = dy \vec{e}_y \quad (12.25)$$

führt. Damit spezialisiert sich der Normalenvektor (12.22) für die ebene Fläche zu

$$\vec{n} = \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad (12.26)$$

und der Betrag des Vektors des infinitesimalen Flächenelements (12.24) reduziert sich auf (12.2) in Übereinstimmung mit den früheren Überlegungen in Abschnitt 5.6.

12.3.3 Fluß eines Vektorfeldes

Es sei nun zusätzlich noch ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben. Dann ist der infinitesimale Fluß $d\Phi$ des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ durch das infinitesimale Flächenelement, das durch den Vektor $d\vec{F}$ charakterisiert ist, über das Skalarprodukt der beiden Vektoren definiert, siehe Abb. 12.4a):

$$d\Phi = \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (12.27)$$

Demnach ist der infinitesimale Fluß $d\Phi$ maximal (minimal), wenn $\vec{A}(\vec{r})$ parallel (senkrecht) zu $d\vec{F}$ gerichtet ist, siehe Abb. 12.4b) und c). Der Fluß durch die gesamte Fläche F ergibt sich dann durch Aufsummation aller infinitesimalen Beiträge (12.27) über F :

$$\Phi = \iint_F d\vec{F} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (12.28)$$

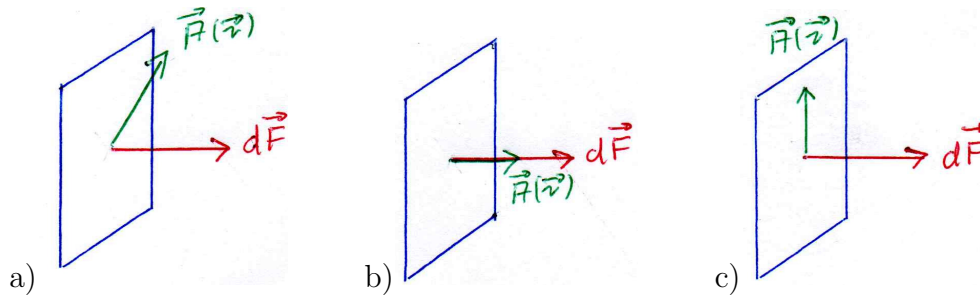


Abbildung 12.4: a) Infinitesimaler Fluß (12.27) eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ durch ein infinitesimales Flächenelement $d\vec{F}$; b) maximal im Falle von $\vec{A}(\vec{r}) \parallel d\vec{F}$; c) minimal falls $\vec{A}(\vec{r}) \perp d\vec{F}$.

Durch Beachtung von (12.23) reduziert sich das Oberflächenintegral (12.28) über ein Vektorfeld zu einem Flächenintegral eines skalaren Feldes:

$$\Phi = \iint_F dF \vec{n} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (12.29)$$

Eine besondere Bedeutung hat schließlich der Fluß durch eine geschlossene Oberfläche, für den wir die folgende Notation einführen:

$$\Phi = \oiint_F d\vec{F} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (12.30)$$

Häufig findet man in der Literatur aber auch die vereinfachte Notation

$$\Phi = \oint_F d\vec{F} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (12.31)$$

Ist man am Flächeninhalt der Oberfläche interessiert, dann identifiziert man das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mit dem Normalenvektor \vec{n} und erhält aufgrund von (12.23)

$$F = \iint_F dF. \quad (12.32)$$

Dabei reduziert sich (12.32) unter Beachtung von (12.24) auf

$$F = \iint_F \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| dudv. \quad (12.33)$$

12.3.4 Beispiel

Als Beispiel berechnen wir die Oberfläche einer Kugel mit Radius R . Hierzu bietet sich eine Beschreibung mit den Kugelkoordinaten r, ϑ, φ an, die in Abschnitt 2.3.2 eingeführt wurden. Setzt man $r = R$, so können die krummlinigen Koordinaten u, v mit dem Polarwinkel ϑ und dem Azimutalwinkel φ identifiziert werden. Die Punkte auf der Oberfläche der Kugel werden dann durch die folgenden Ortsvektoren beschrieben:

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (12.34)$$

Für die partiellen Ableitungen des Ortsvektors (12.34) nach beiden Winkeln ϑ , φ erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = R \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = R \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.35)$$

Deren Vektorprodukt lautet demnach

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ R \cos \vartheta \cos \varphi & R \cos \vartheta \sin \varphi & -R \sin \vartheta \\ -R \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = R^2 \sin \vartheta \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (12.36)$$

und besitzt den Betrag

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = R^2 \sin \vartheta. \quad (12.37)$$

Berücksichtigen wir noch die entsprechenden Definitionsbereiche der beiden Winkel ϑ , φ in (12.34), so reduziert sich (12.33) im Falle der Kugeloberfläche mit Hilfe von (12.37) auf

$$F = R^2 \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta, \quad (12.38)$$

was sich elementar auswerten lässt und auf das bekannte Resultat für die Oberfläche einer Kugel führt:

$$F = 4\pi R^2. \quad (12.39)$$

12.4 Jacobi-Determinante

Um Flächen- oder Volumenintegrale konkret auszurechnen, ist es hilfreich, diese in verschiedene krummlinige Koordinaten darstellen zu können. Hierbei ist zu berücksichtigen, wie sich diese mehrdimensionalen Integrale verändern, wenn man von kartesischen zu krummlinigen Koordinaten übergeht.

12.4.1 Flächenintegrale

Betrachten wir hierzu zunächst ein Flächenintegral in der xy -Ebene, bei dem das infinitesimale Flächenelement dF in kartesischen Koordinaten durch (12.2) gegeben ist. Gehen wir nun von den kartesischen Koordinaten x , y zu krummlinigen Koordinaten u , v in der Ebene über, dann lautet die Parametrisierung des Ortsvektors

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.40)$$

Hieraus ergibt sich aufgrund von (1.63) das Vektorprodukt

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = J \vec{e}_z \quad (12.41)$$

mit der Abkürzung

$$J = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}. \quad (12.42)$$

Bei (12.42) handelt es sich um die sogenannte Jacobi-Determinante der Transformation von den kartesischen Koordinaten x, y auf die krummlinigen Koordinaten u, v :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \quad (12.43)$$

Aus (12.21) und (12.41) lesen wir ab, dass der Vektor des infinitesimalen Flächenelements senkrecht zur xy -Ebene steht

$$d\vec{F} = dF \vec{e}_z, \quad (12.44)$$

wobei für dessen Betrag gilt

$$dF = J du dv. \quad (12.45)$$

Berücksichtigen wir noch (12.2), so folgt aus (12.45) schließlich

$$dxdy = J du dv. \quad (12.46)$$

Als Beispiel betrachten wir den Übergang von den kartesischen Koordinaten x, y auf die ebenen Polarkoordinaten ρ, φ , der in (2.24) und (2.25) eingeführt wurde. Für die entsprechende Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \quad (12.47)$$

Deshalb transformiert sich ein Flächenintegral über eine skalare Funktion von kartesischen Koordinaten auf ebene Polarkoordinaten wie folgt:

$$\int dx \int dy f(x, y) = \int d\rho \int d\varphi \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \quad (12.48)$$

Hierbei ist im konkreten Fall zu berücksichtigen, wie sich diese Koordinatentransformation auf die jeweiligen Integrationsgrenzen auswirkt. So lässt sich im Falle von $f(x, y) = 1$ die Fläche eines Kreises mit Radius R durch ebene Polarkoordinaten berechnen. Dann reduziert sich (12.48) nämlich auf

$$F = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2. \quad (12.49)$$

12.4.2 Volumenintegrale

In ganz analoger Weise werden auch Volumenintegrale von kartesischen Koordinaten x, y, z auf krummlinige Koordinaten u, v, w transformiert. Hierzu geht man von der zugrunde liegenden Parametrisierung des Ortsvektors aus:

$$\vec{r}(u, v, w) = \begin{pmatrix} x(u, v, w) \\ y(u, v, w) \\ z(u, v, w) \end{pmatrix}. \quad (12.50)$$

Infinitesimale Veränderungen der krummlinigen Koordinaten du, dv, dw führen dann analog zu (12.19) zu entsprechenden infinitesimalen Veränderungen des Ortsvektors:

$$d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du, \quad d\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv, \quad d\vec{r}_w = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw. \quad (12.51)$$

Diese drei infinitesimalen Vektoren $d\vec{r}_u, d\vec{r}_v, d\vec{r}_w$ spannen ein infinitesimales Parallelepipid auf, dessen Volumen sich mit Hilfe des Spatprodukts (1.43) berechnen lässt:

$$dV = (d\vec{r}_u \times d\vec{r}_v) \times d\vec{r}_w. \quad (12.52)$$

Setzt man aufgrund von (12.52) die infinitesimalen Vektoren (12.50) in die Determinantenformel (1.67) für das Spatprodukt ein, so erhält man analog zu (12.45) das Ergebnis

$$dV = J du dv dw \quad (12.53)$$

mit der Jacobi-Determinante

$$J = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}. \quad (12.54)$$

Aufgrund (12.9) erhalten wir schließlich aus (12.53):

$$dx dy dz = J du dv dw. \quad (12.55)$$

Wenn wir beispielsweise von den kartesischen Koordinaten x, y, z auf die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ transformieren, so erhalten wir mit Hilfe von (2.75) für die entsprechende Jacobi-Determinante (12.54):

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi & \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & -r \sin \vartheta \\ -r \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \vartheta. \quad (12.56)$$

Dies bedeutet, dass sich ein Volumenintegral über eine skalare Funktion analog zu (12.48) von kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten transformiert:

$$\int dx \int dy \int dz f(x, y, z) = \int dr \int d\vartheta \int d\varphi r^2 \sin \vartheta f(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta). \quad (12.57)$$

Auch hier ist im Einzelfall zu beachten, welche Integrationsgrenzen zu verwenden sind. Setzen wir $f(x, y, z) = 1$, so können wir beispielsweise durch Spezialisierung von (12.57) das Volumen einer Kugel mit Radius R berechnen:

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \vartheta = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (12.58)$$

Vergleichen wir die Berechnung des Volumens einer Kugel durch Verwendung von kartesischen Koordinaten auf Seite 163 mit der bei Anwendung der Kugelkoordinaten, so stellen wir fest, dass letzere Rechnung deutlich einfacher ist. Damit lohnt es sich also für die Volumenberechnung, solche Koordinaten zu wählen, die der Symmetrie eines vorliegenden Problems am besten anpassen sind. Beachten Sie, dass dies nicht nur auf die Volumenberechnung zutrifft. Es ist eine grundlegende Erkenntnis, dass die Wahl geeigneter Koordinaten die Lösung eines Problems der Theoretischen Physik deutlich vereinfachen kann.

Kapitel 13

Vektoranalysis

Wir entwickeln nun die mathematischen Grundlagen der Vektoranalysis, die für die Formulierung der Elektrostatik und der Magnetostatik notwendig sind. Hierzu beginnen wir damit, die uns schon bekannten Differentialoperatoren Gradient und Rotation auf anschauliche Weise koordinatenunabhängig zu definieren. Dies gibt uns auch die Gelegenheit, als dritten Differentialoperator die Divergenz einzuführen. Aus diesen anschaulichen Definitionen von Gradient, Divergenz und Rotation kann man dann deren Darstellungen in kartesischen Koordinaten ableiten. Andererseits erlauben sie aber auch, die Integralsätze der Vektoranalysis herzuleiten. Dabei beschreibt der Integralsatz von Gauß, wie sich mit Hilfe der Divergenz ein Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandeln lässt. Und der Integralsatz von Stokes erlaubt es, durch die Rotation ein Flächenintegral mit einem Kurvenintegral in Verbindung zu bringen.

13.1 Anschauliche Definitionen

Wir betrachten ein beliebiges Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ und ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$. Für die im folgenden untersuchten partiellen Ortsableitungen spielt eine eventuelle zusätzliche Zeitabhängigkeit dieser Felder keine Rolle, so dass diese in der Notation unterdrückt wird.

13.1.1 Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$ wird mit $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ bezeichnet und wurde schon in Abschnitt 3.9 diskutiert. Hier führen wir den Gradienten erneut ein, indem wir eine infinitesimale Änderung des Skalarfeldes $d\varphi(\vec{r})$ durch das Skalarprodukt des Vektorfeldes $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ mit einem infinitesimalen Ortsvektor $d\vec{r}$ definieren:

$$d\varphi(\vec{r}) = \text{grad}\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (13.1)$$

Der Vektor $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ steht damit senkrecht auf den Flächen $\varphi(\vec{r}) = \text{konst.}$ Er zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs und sein Betrag ist proportional zu diesem Anstieg, siehe Abb. 13.1.

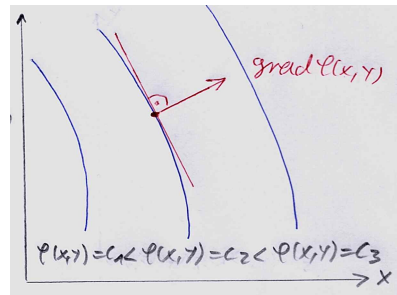


Abbildung 13.1: Der Gradient $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ steht wegen (13.1) senkrecht auf den Flächen $\varphi(\vec{r}) = \text{konst.}$

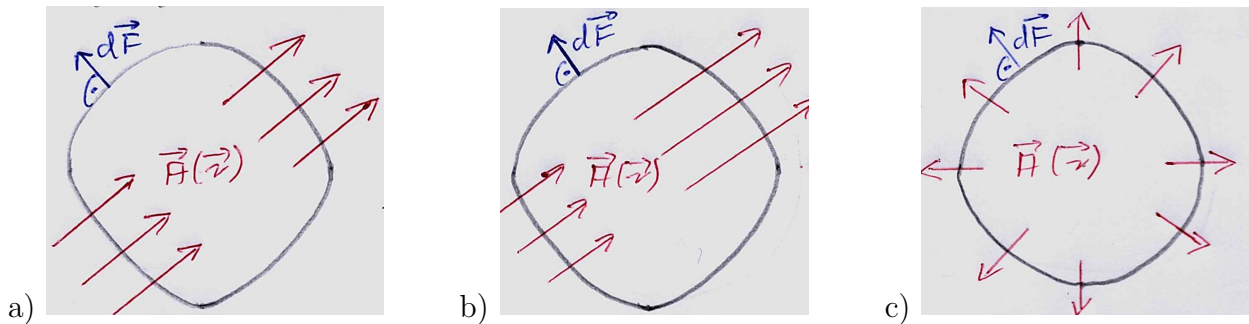


Abbildung 13.2: a) Wenn das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ im Bereich des Volumens konstant ist, verschwindet dessen Divergenz: $\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}$. b) Nimmt $\vec{A}(\vec{r})$ dagegen innerhalb des Volumens zu, so ist $\text{div}\vec{A}(\vec{r})$ positiv: $\text{div}\vec{A}(\vec{r}) > 0$. c) Die Divergenz wird maximal, wenn $\vec{A}(\vec{r})$ immer parallel zum Flächenektor $d\vec{F}$ ist: $\text{div}\vec{A}(\vec{r}) \gg 0$.

13.1.2 Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ wird mit $\text{div}\vec{A}(\vec{r})$ bezeichnet. Zur Definition des Skalarfeldes $\text{div}\vec{A}(\vec{r})$ wird der Fluß

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \quad (13.2)$$

des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Oberfläche ΔF eines Volumens ΔV betrachtet, siehe Abb. 12.4a). Dabei wird dieser Fluß (13.2) auf das Volumen ΔV bezogen und dann der Grenzwert eines verschwindenden Volumens $\Delta V \rightarrow 0$ durchgeführt:

$$\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (13.3)$$

Man bezeichnet (13.2) auch als die Quellstärke und $\text{div}\vec{A}(\vec{r})$ als die Quelldichte des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$. Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch Abb. 13.2.

13.1.3 Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ wird mit $\text{rot}\vec{A}(\vec{r})$ bezeichnet und wurde schon in Abschnitt 3.11 behandelt. Hier definieren wir in Analogie zur Divergenz im vorhergehenden Ab-

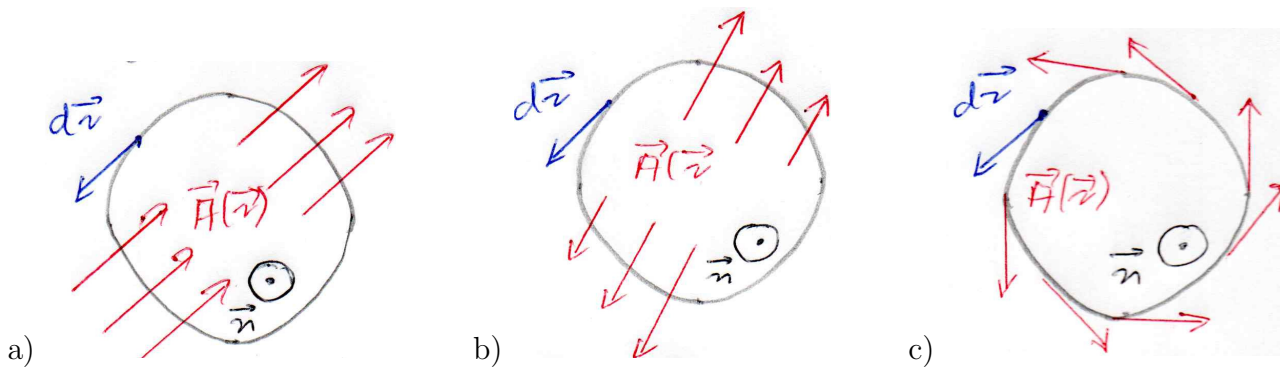


Abbildung 13.3: a) Wenn das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ im Bereich des Flächenelements konstant ist, verschwindet dessen Rotation: $\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{0}$. b) Nimmt $\vec{A}(\vec{r})$ dagegen wie gezeigt zu, so ist $\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r})$ positiv: $\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) > 0$. c) Die Rotation wird maximal, wenn $\vec{A}(\vec{r})$ immer parallel zum Wegelement $d\vec{r}$ ist: $\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) \gg 0$.

schnitt die Komponente des Vektorfeldes $\text{rot}\vec{A}(\vec{r})$ in Richtung eines beliebigen Einheitsvektors \vec{n} wie folgt. Wir betrachten ein Flächenelement $\Delta\vec{F}$ parallel zu \vec{n} am Orte \vec{r} und die Zirkulation, also gemäß Seite 37 das geschlossene Kurvenintegral

$$\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (13.4)$$

entlang des Randes ΔC des Flächenelementes $\Delta\vec{F}$. Dabei wird die Zirkulation auf das Flächenelement ΔF bezogen und der Grenzwert $\Delta F \rightarrow 0$ durchgeführt:

$$\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad \vec{n} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta F}. \quad (13.5)$$

Man bezeichnet (13.4) auch als die Wirbelstärke und $\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{A}(\vec{r})$ als die Wirbeldichte des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ in Richtung von \vec{n} . Wir veranschaulichen diese Begriffsbildung durch die Abb. 13.3.

13.2 Kartesische Koordinaten

Die Definitionen (13.1), (13.3) und (13.5) verdeutlichen die Bedeutung der drei Differentialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation für physikalische Felder. Außerdem sind sie von der Koordinatenwahl unabhängig, d.h. aus ihnen können die Differentialoperatoren in beliebigen Koordinaten abgeleitet werden. Im folgenden konzentrieren wir uns auf die Herleitung der Darstellung dieser Differentialoperatoren in kartesische Koordinaten und verweisen im Falle von krummlinigen Koordinaten wie z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten auf die Literatur, siehe z.B. [3, Abschnitt 9.4].

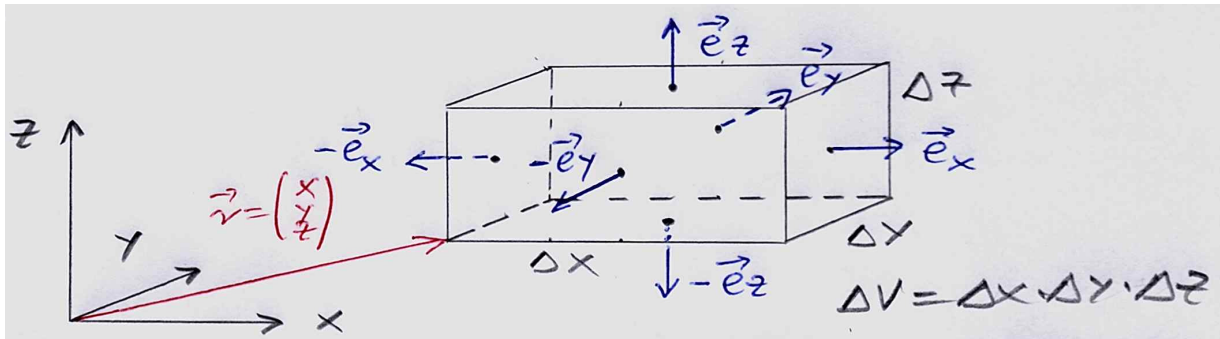


Abbildung 13.4: Berechnung des Flusses (13.2) eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ durch die Oberfläche eines infinitesimalen Quaders.

13.2.1 Gradient

Wir werten nun (13.1) in kartesischen Koordinaten aus. Für die linke Seite erhalten wir mit Hilfe der Taylor-Reihe von Funktionen mit mehreren Variablen (10.10):

$$d\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z} dz. \quad (13.6)$$

Entsprechend geht das Skalarprodukt auf der rechten Seite von (13.1) über in

$$d\varphi(\vec{r}) = [\text{grad}\varphi(\vec{r})]_x dx + [\text{grad}\varphi(\vec{r})]_y dy + [\text{grad}\varphi(\vec{r})]_z dz. \quad (13.7)$$

Der Vergleich von (13.6) und (13.7) führt auf

$$\text{grad}\varphi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (13.8)$$

Demnach sind die Komponenten des Vektorfeldes $\text{grad}\varphi(\vec{r})$ gerade die ersten partiellen Ableitungen des Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$. Mit Hilfe des Nabla-Operators (3.41) erhalten wir

$$\text{grad}\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}), \quad (13.9)$$

was wir schon in (3.42) feststellten.

13.2.2 Divergenz

Zur Berechnung der Divergenz in kartesischen Koordinaten werten wir (13.2) für einen infinitesimalen Quader mit achsenparallelen Kanten aus, siehe Abb. 13.4. Wir nehmen an, dass

eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb des Quaders liegen. Der Fluß (13.2) setzt sich dann insgesamt aus sechs Summanden zusammen:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_y^{y+\Delta y} dy' \int_z^{z+\Delta z} dz' \left[\vec{A}(x + \Delta x, y', z') \cdot \vec{e}_x + \vec{A}(x, y', z') \cdot (-\vec{e}_x) \right] + 4 \text{ weitere Terme.} \quad (13.10)$$

Es sollen nun Δx , Δy , Δz so klein gewählt werden, dass sich das Vektorfeld im Innern des Quaders nur schwach ändert und daher eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung durchgeführt werden kann:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \approx \int_y^{y+\Delta y} dy' \int_z^{z+\Delta z} dz' \frac{\partial A_x(x, y', z')}{\partial x} \Delta x + \text{zwei weitere Terme.} \quad (13.11)$$

Für kleine Δx , Δy , Δz kann nun der Mittelwertsatz der Integralrechnung (3.62) für jedes Integral angewandt werden:

$$\oint_{\Delta F} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} \approx \frac{\partial A_x(x, \xi_y, \xi_z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \text{zwei weitere Terme.} \quad (13.12)$$

Hierbei stellen $\xi_y \in [y, y + \Delta y]$ und $\xi_z \in [z, z + \Delta z]$ entsprechende Zwischenpunkte dar. Dividiert man dann noch (13.12) durch das Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, so folgt im Limes $\Delta V \rightarrow 0$, dass sich die Zwischenpunkte $\xi_y \in [y, y + \Delta y]$ und $\xi_z \in [z, z + \Delta z]$ auf die Randpunkte y und z reduzieren. Damit ergibt sich damit aus (13.2) und (13.12) die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ in kartesischen Koordinaten:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z}. \quad (13.13)$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators in (3.41) geht (13.13) über in

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (13.14)$$

13.2.3 Rotation

Wir betrachten ein kleines Parallelogramm im Raum mit den Seitenvektoren \vec{a} und \vec{b} , das den Punkt \vec{r} als Eckpunkt enthält und setzen $\Delta \vec{F} = \vec{a} \times \vec{b}$. Es bezeichnet ΔC den orientierten Rand des Parallelogramms, wobei der Umlaufsinn von ΔC mit $\Delta \vec{F}$ eine Rechtsschraube ist. Das bedeutet, dass das Parallelogramm entlang von ΔC immer links liegt, siehe zur Veranschaulichung Abb. 13.5. Wir nehmen an, dass eventuelle Singularitäten des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ außerhalb des Parallelogramms liegen. Um die Zirkulation (13.4) zu berechnen, wird der Integrationsweg ΔC wie folgt mit $0 \leq t \leq 1$ parametrisiert:

$$\begin{aligned} \text{von } \vec{r} \text{ nach } \vec{r} + \vec{a} : & \quad \vec{r}(t) = \vec{r} + t\vec{a}, \\ \text{von } \vec{r} + \vec{a} \text{ nach } \vec{r} + \vec{a} + \vec{b} : & \quad \vec{r}(t) = \vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}, \\ \text{von } \vec{r} + \vec{a} + \vec{b} \text{ nach } \vec{r} + \vec{b} : & \quad \vec{r}(t) = \vec{r} + (1-t)\vec{a} + \vec{b}, \\ \text{von } \vec{r} + \vec{b} \text{ nach } \vec{r} : & \quad \vec{r}(t) = \vec{r} + (1-t)\vec{b}. \end{aligned} \quad (13.15)$$

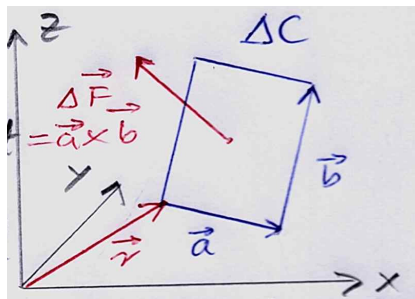


Abbildung 13.5: Berechnung der Zirkulation (13.4) eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des orientierten Randes des Parallelogramms ΔC .

Hieraus ergibt sich für die Zirkulation:

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + t\vec{a}) \cdot \vec{a} + \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) \cdot \vec{b} \\ &+ \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + (1-t)\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a}) + \int_0^1 dt \vec{A}(\vec{r} + (1-t)\vec{b}) \cdot (-\vec{b}) \\ &= \int_0^1 dt \left[\vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \right] \cdot \vec{b} - \int_0^1 dt \left[\vec{A}(\vec{r} + t\vec{a} + \vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{a}) \right] \cdot \vec{a}. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Bei der letzten Umformung wurde zwei Mal die Substitution $t'(t) = 1 - t$ durchgeführt. Für ein Skalarfeld $\varphi(\vec{r})$ gilt für kleine $d\vec{r}$ nach Gleichungen (13.1) und (13.9):

$$\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \approx \text{grad}\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \right) \varphi(\vec{r}). \quad (13.17)$$

Dementsprechend erhalten wir bei einem Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ für kleine Vektoren \vec{a} und \vec{b} :

$$\vec{A}(\vec{r} + \vec{a} + t\vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \approx \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}), \quad (13.18)$$

$$\vec{A}(\vec{r} + t\vec{a} + \vec{b}) - \vec{A}(\vec{r} + t\vec{a}) \approx \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{A}(\vec{r} + t\vec{a}). \quad (13.19)$$

Das hat für die Zirkulation (13.16) zur Folge:

$$\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r} + t\vec{b}) \right] - \int_0^1 dt \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r} + t\vec{a}) \right]. \quad (13.20)$$

Erweitert man den Mittelwertsatz der Integralrechnung (3.62) auf die beiden Kurvenintegral (13.20), so folgt

$$\oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r} + \xi_1 \vec{b}) \right] - \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r} + \xi_2 \vec{a}) \right], \quad (13.21)$$

wobei $\xi_1, \xi_2 \in [0, 1]$ entsprechende Zwischenpunkte darstellen. Dividiert man dann noch (13.21) durch das Flächenelement $\Delta F = |\vec{a} \times \vec{b}|$, so folgt im Limes $\Delta F \rightarrow 0$ aus (13.5) und (13.21)

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \left\{ \left(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right] - \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \right) \left[\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right] \right\}. \quad (13.22)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass im Limes $\Delta F \rightarrow 0$ die beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} infinitesimal klein sind, so dass die Zwischenpunkte ξ_1, ξ_2 wegfallen. Um die rechte Seite von (13.22) zu vereinfachen, betrachten wir als Nebenrechnung die folgenden Vektoridentitäten. Zunächst berücksichtigen wir die zyklische Vertauschbarkeit beim Spatprodukt (1.43), (1.45)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (13.23)$$

und erhalten

$$\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right] \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \left\{ \vec{b} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right] \right\}. \quad (13.24)$$

Anschließend wenden wir die „bac-cab“-Regel für das doppelte Vektorprodukt (1.52) auf (13.24) an:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right] &= \vec{a} \cdot \left\{ \vec{\nabla} \left[\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right] - (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r}) \right\} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \left[\vec{b} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right] - (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \left[\vec{a} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \right]. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Aus (13.22) und (13.25) folgt dann mit $\Delta \vec{F} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} |\vec{a} \times \vec{b}|$ für die Zirkulation:

$$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\Delta C} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right] = \vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right]. \quad (13.26)$$

Der Vergleich von (13.3) und (13.26) führt dann auf:

$$\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{n} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) \right]. \quad (13.27)$$

Wegen der Beliebigkeit des Normalvektors \vec{n} lässt sich auch die Rotation des Vektorfeldes durch den Nabla-Operator ausdrücken:

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}). \quad (13.28)$$

Einsetzen von (3.41) in (13.28) ergibt die Komponentendarstellung der Rotation in kartesischen Koordinaten

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(\vec{r}) & A_y(\vec{r}) & A_z(\vec{r}) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (13.29)$$

die wir schon von (3.70) her kennen.

13.3 Integralsätze

Die anschaulichen Definitionen der Divergenz in (13.3) und der Rotation in (13.5) dienen aber nicht nur dazu, deren Komponentendarstellungen in kartesischen Koordinaten (13.13) und (13.29) abzuleiten. Darüber hinaus erlauben sie auch, die Integralsätze von Gauß und Stokes herzuleiten.

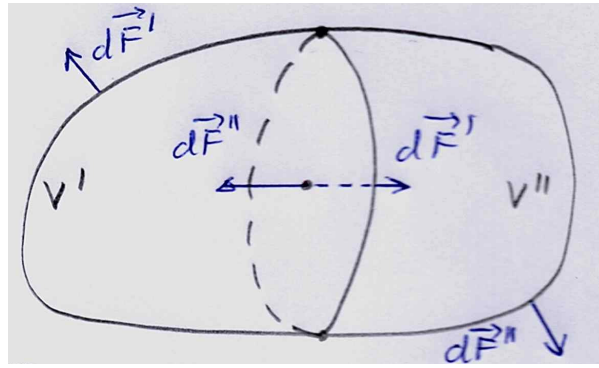


Abbildung 13.6: Volumen V zerlegt in Teilvolumina V' und V'' mit entsprechenden Flächenelementen.

13.3.1 Integralsatz von Gauß

Gegeben sei ein Volumen V mit einer geschlossenen Fläche F . Hierbei sollen die Flächenelemente $d\vec{F}$ nach Außen zeigen. Außerdem sei ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben, bei dem eventuelle Singularitäten außerhalb von V liegen sollen. Der Fluß Φ von $\vec{A}(\vec{r})$ durch F ist dann definiert durch

$$\Phi = \oint_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (13.30)$$

Man zerlege V durch eine Trennfläche in zwei Teilvolumina V' und V'' . Es gilt dann:

$$\Phi = \oint_{F'} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{F}' + \oint_{F''} \vec{A}(\vec{r}'') \cdot d\vec{F}'', \quad (13.31)$$

da für jedes Flächenelement der gemeinsamen Trennfläche

$$\vec{A}(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}''), \quad d\vec{F}' = -d\vec{F}'' \quad (13.32)$$

gelten, siehe Abb. 13.6. Demnach kompensieren sich die zusätzlichen Beiträge der Trennflächen gerade gegenseitig. Durch weitere Schnittflächen parzelliere man das Volumen V in Volumenelemente ΔV_i mit $i = 1, \dots, n$. Alle Beiträge zum Fluß von inneren Oberflächen heben sich dann analog zu den Flächenelementen gegenseitig auf:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \oint_{F_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (13.33)$$

Für eine hinreichend kleine Parzellierung folgt dann mit $\vec{r}_i \in V_i$ aus (13.3) mit $n \rightarrow \infty$:

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_i) \Delta V_i, \quad (13.34)$$

so dass sich im Limes immer kleinere Volumina $\Delta V_i \rightarrow 0$ schließlich das Volumenintegral

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV \quad (13.35)$$

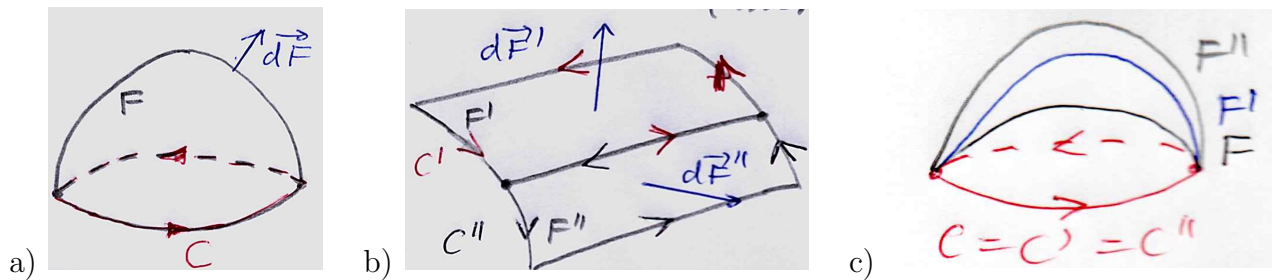


Abbildung 13.7: a) Orientierte Fläche F mit geschlossenem, orientiertem Rand C ; b) Zerlegte Fläche F in F' und F'' mit jeweiligen Rändern C' und C'' sowie den entsprechenden Orientierungen; Verschiedene Flächen F, F', F'' mit selbem Rand C .

ergibt. Aus (13.30) und (13.35) erhalten wir insgesamt den Satz von Gauß:

$$\oint_F \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) dV. \quad (13.36)$$

Betrachten wir als Beispiel das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a}f(\vec{r})$, so dass $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f(\vec{r})$ gilt, dann geht (13.36) über in

$$\vec{a} \cdot \oint_F f(\vec{r}) d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_V \operatorname{grad} f(\vec{r}) dV. \quad (13.37)$$

Da (13.37) für jeden beliebigen Vektor \vec{a} gilt, folgt hieraus die Identität

$$\oint_F f(\vec{r}) d\vec{F} = \int_V \operatorname{grad} f(\vec{r}) dV. \quad (13.38)$$

Spezialisiert man (13.38) für die Funktion $f(\vec{r}) = 1$, so lesen wir ab:

$$\oint_F d\vec{F} = \vec{0}. \quad (13.39)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Oberfläche F die Summe aller Oberflächenvektoren $d\vec{F}$ den Nullvektor ergibt.

13.3.2 Integralsatz von Stokes

Gegeben sei eine orientierte Fläche F im Raum mit einem geschlossenen orientierten Rand C , wie in Abb. 13.7a) dargestellt ist. Dabei werden die Orientierungen von F und C nach der Rechtsschraubenregel gewählt. Außerdem sei ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben, dessen Singularitäten außerhalb von F liegen sollen. Man berechne die Zirkulation von $\vec{A}(\vec{r})$ entlang des Randes C :

$$Z = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (13.40)$$

Man zerlege F durch eine Trennlinie in zwei Teilflächen F' und F'' . Es folgt dann für die Zirkulation

$$Z = \oint_{C'} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + \oint_{C''} \vec{A}(\vec{r}'') \cdot d\vec{r}'', \quad (13.41)$$

denn für jedes Linienelement der gemeinsamen Trennlinie gilt

$$\vec{A}(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}'') \quad d\vec{r}' = -d\vec{r}'', \quad (13.42)$$

so dass sich die beiden zusätzlichen Beiträge der Trennlinien zu den Kurvenintegralen genau gegenseitig kompensieren, (siehe Abb. 13.7b). Durch weitere Linien parzelliere man F in Flächenelemente ΔF_i mit $i = 1, \dots, n$. In der Summe

$$Z = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (13.43)$$

heben sich dann alle Beiträge von inneren Rändern analog zu den Beiträgen der Trennlinie gegenseitig weg. Bei hinreichend kleiner Parzellierung folgt mit $\vec{r}_i \in \Delta F_i$ aus (13.5) mit $n \rightarrow \infty$:

$$Z \approx \sum_{i=1}^{\infty} \text{rot} \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{F}_i, \quad (13.44)$$

wobei das Flächenelement $\Delta \vec{F}_i = \Delta F_i \vec{n}$ berücksichtigt wurde. Im Limes immer kleinere Flächenelemente $\Delta \vec{F}_i \rightarrow \vec{0}$ ergibt sich schließlich das Flächenintegral

$$Z = \int_F \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (13.45)$$

Aus (13.40) und (13.45) lesen wir dann den Satz von Stokes ab:

$$\oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (13.46)$$

Man beachte dabei, dass es prinzipiell mehrere Flächen F, F', F'', \dots mit ein- und demselben Rand C gibt, (siehe Abb. 13.7c). Auch hier betrachten wir als Anwendung das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{a} f(\vec{r})$, für das $\text{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \text{grad} f(\vec{r}) \times \vec{a}$ gilt, so dass (13.46) übergeht in

$$\vec{a} \cdot \oint_C f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F \left[\text{grad} f(\vec{r}) \times \vec{a} \right] \cdot d\vec{F} = \vec{a} \cdot \int_F d\vec{F} \times \text{grad} f(\vec{r}). \quad (13.47)$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die zyklische Vertauschbarkeit beim Spatprodukt (13.23) verwendet. Da (13.47) für jeden konstanten Vektor \vec{a} gilt, folgt

$$\oint_C f(\vec{r}) d\vec{r} = \int_F d\vec{F} \times \text{grad} f(\vec{r}). \quad (13.48)$$

Spezialisiert man (13.48) für die Funktion $f(\vec{r}) = 1$, so erhalten wir die Aussage

$$\oint_C d\vec{r} = \vec{0}. \quad (13.49)$$

Das bedeutet, dass bei einer geschlossenen Kurve die Summe aller Tangentialvektoren $d\vec{r}$ den Nullvektor ergibt.

Kapitel 14

Elektrostatik

Mit Hilfe der im vorhergehenden Kapitel eingeführten mathematischen Grundlagen der Vektoranalysis formulieren wir nun die Gesetze der Elektrostatik. Insbesondere leiten wir dabei mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik ab.

14.1 Fluß der elektrischen Feldstärke

Wir betrachten die Kraft, die eine im Ursprung lokalisierte Ladung Q auf eine Probeladung q am Orte \vec{r} ausübt, siehe Abb. 14.1. Wie schon in Abschnitt 7.5 diskutiert wurde, führte hierzu Charles Augustin de Coulomb umfangreiche Experimente durch, die um 1785 zum Coulomb-Gesetz führten. Es lautet im SI-Einheitensystem

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad (14.1)$$

wobei der Wert der Dielektrizitätskonstanten im Vakuum ϵ_0 in (7.51) angegeben wurde. Die Richtung der Coulomb-Kraft (14.1) hängt von den Vorzeichen von Ladung Q und Probeladung q ab. Im Falle von $Qq > 0$ bzw. $Qq < 0$ zeigt $\vec{F}(\vec{r})$ vom Ursprung weg bzw. zum Ursprung hin. Ferner lesen wir aus (14.1) ab, dass die Ladung Q am Orte \vec{r} eine elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad (14.2)$$

erzeugt, die von der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (14.3)$$

ist. Wir berechnen nun den Fluß dieser elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ durch die Oberfläche einer Kugel $K(R)$ mit Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung:

$$\Phi = \oint_{\partial K(R)} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (14.4)$$

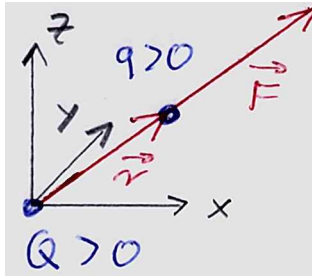


Abbildung 14.1: Coulomb-Kraft \vec{F} von Ladung Q auf Probeladung q am Ort \vec{r} gemäß (14.1).

Hierbei bezeichnet $\partial K(R)$ den Rand der Kugel $K(R)$, also deren Oberfläche. Entsprechend von Abschnitt 12.3.4 berechnet sich dieses Oberflächenintegral in Kugelkoordinaten wie folgt:

$$\Phi = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin \vartheta \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot \frac{\vec{r}}{R}. \quad (14.5)$$

Berücksichtigt man, dass auf der Kugeloberfläche $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = R^2$ gilt, reduziert sich (14.5) auf

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (14.6)$$

Dieses Ergebnis lässt sich in der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern. Der Fluß der elektrischen Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ durch eine geschlossene Oberfläche F ergibt die umschlossene Ladung Q nach dem Gauß-Gesetz

$$\Phi = \oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (14.7)$$

Dies stellt das erste Grundgesetz der Elektrostatik dar.

14.2 Überlegungen

Wir betrachten wieder die elektrische Feldstärke (14.3) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q . Differenziert man deren x -Komponente

$$E_x(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (14.8)$$

nach x , so folgt

$$\frac{\partial E_x(x, y, z)}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right]. \quad (14.9)$$

Im Falle von $\vec{r} \neq \vec{0}$ ist die Divergenz der elektrischen Feldstärke gegeben durch (13.13):

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\partial E_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\vec{r})}{\partial z}. \quad (14.10)$$

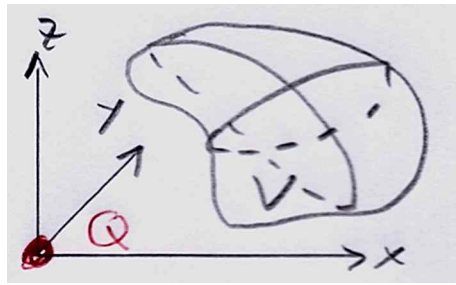


Abbildung 14.2: Volumen V außerhalb des Ursprungs, in dem eine Ladung Q sitzt.

Setzen wir (14.9) darin ein, so folgt:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = 0. \quad (14.11)$$

Wir betrachten nun ein beliebiges Volumen V , das den Ursprung nicht enthält, siehe Abb. 14.2. Wir berechnen den Fluß der elektrischen Feldstärke (14.3) durch die Oberfläche F mit Hilfe des Satzes von Gauß in (13.36) und der Divergenz nach (14.11)

$$\oint_F \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) dV = 0. \quad (14.12)$$

Das Ergebnis besagt, dass im Mittel gleich viele Feldlinien in das Volumen V hinein- und hinauszeigen. Der Fluß der elektrischen Feldstärke (14.3) verschwindet auch gemäß des Gauß-Gesetzes (14.7), weil sich in betrachtetem Volumen V keine Ladungen befinden.

14.3 Erste Maxwell Gleichung der Elektrostatik

Aus dem ersten Grundgesetz der Elektrostatik (14.7) folgt einerseits mit dem Satz von Gauß (13.36)

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) dV, \quad (14.13)$$

wobei V das Volumen bezeichnet, das von der Fläche F umschlossen wird. Andererseits lässt sich die Ladung Q durch ein Volumenintegral über die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ darstellen, so dass aus (14.7) folgt:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (14.14)$$

Aus dem Vergleich von (14.13) und (14.14) lesen wir ab

$$\int_V dV \left[\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) - \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}) \right] = 0. \quad (14.15)$$

Da diese Aussage für jedes beliebige Volumen V gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (14.16)$$

Wir können demnach festhalten, dass das ersten Grundgesetz der Elektrostatik mit (14.7) ein integrale und mit (14.16) ein differentielle Form besitzt. Beide lassen sich mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß ineinander überführen.

14.4 Zirkulation der elektrischen Feldstärke

Wir kehren wieder zur elektrischen Feldstärke (14.3) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q zurück und berechnen deren Zirkulation entlang einer geschlossenen Kurve C :

$$Z = \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (14.17)$$

Einsetzen von (14.3) in (14.17) führt unter Beachtung von (13.8) auf

$$Z = - \oint_C \operatorname{grad} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \right) \cdot d\vec{r}, \quad (14.18)$$

so dass aufgrund von (13.1) folgt

$$Z = - \oint_C d \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|} \right) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_A|} - \frac{1}{|\vec{r}_B|} \right). \quad (14.19)$$

Da aber die Kurve C geschlossen ist, gilt $\vec{r}_A = \vec{r}_B$ und die Zirkulation verschwindet:

$$Z = 0. \quad (14.20)$$

Dieses Ergebnis lässt sich im Rahmen der Elektrostatik auf eine beliebige Ladungsverteilung verallgemeinern.

14.5 Zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik

Aus dem zweiten Grundgesetz der Elektrostatik (14.17), (14.20) folgt mit Hilfe des Satzes von Stokes (13.46):

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) \, d\vec{F} = 0. \quad (14.21)$$

Da dies für jede beliebige Fläche F gilt, folgt hieraus die zweite Maxwell-Gleichung der Elektrostatik

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (14.22)$$

Damit hat auch das zweite Grundgesetz der Elektrostatik mit (14.17), (14.20) eine integrale und mit (14.22) eine differentielle Form besitzt. Beide lassen sich mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes ineinander überführen. Wir bemerken, dass sich im Falle einer im Ursprung lokalisierten Punktladung Q das Ergebnis (14.22) auch explizit ausrechnen lässt. Aus (13.29) und (14.3) folgt nämlich:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} & \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = \vec{0}. \quad (14.23)$$

14.6 Poisson-Gleichung

Für die elektrische Feldstärke (14.3) einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q gilt, wie schon in (14.17) und (14.18) verwendet:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} \right). \quad (14.24)$$

Aber auch für eine beliebige Ladungsverteilung lässt sich die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ immer als Gradient eines Skalarfeldes $\varphi(\vec{r})$ darstellen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}). \quad (14.25)$$

Dies liegt an der zweiten Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (14.22) und der Identität der Vektoranalysis

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \vec{0}. \quad (14.26)$$

Hierbei folgt (14.26) aus (13.8) und (13.29), sofern $\varphi(\vec{r})$ zwei Mal stetig differenzierbar ist und damit der Satz von Schwarz mit zyklisch vertauschbaren Koordinaten x, y, z gilt:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial y \partial x}. \quad (14.27)$$

Im Falle der Elektrostatik bezeichnet man $\varphi(\vec{r})$ als elektrostatisches Potential. Setzen wir (14.25) in die erste Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (14.16) ein, so erhalten wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}). \quad (14.28)$$

Hierbei bezeichnet Δ nach (13.8) und (13.13) den Laplace-Operator:

$$\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (14.29)$$

Die Poisson-Gleichung (14.28) stellt eine partielle Differentialgleichung dar. Sie gibt an, wie man das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ aus einer gegebenen Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ berechnet. Ist das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ bekannt, so lässt sich durch den Gradienten gemäß (14.25) die entsprechende elektrische Feldstärke berechnen.

14.7 Poisson-Gleichung für Punktladung

Im Falle einer im Ursprung lokalisierten Ladung Q lautet die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = Q\delta(\vec{r}). \quad (14.30)$$

Hierbei bezeichnet $\delta(\vec{r})$ die dreidimensionale Diracsche Delta-Funktion, die als Produkt von drei eindimensionalen Diracsche Delta-Funktionen definiert ist:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (14.31)$$

Deshalb besitzt die dreidimensionale Diracsche Delta-Funktion analog zur Einführung der eindimensionalen Diracsche Delta-Funktion in Abschnitt 5.5 die beiden definierenden Eigenschaften

$$(D1) \quad \delta(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{0}$$

$$(D2) \quad \int_{K(R)} \delta(\vec{r}) dV = 1$$

Hierbei gilt letzteres für jede noch so kleine Kugel $K(R)$ mit Radius R und dem Mittelpunkt im Ursprung. Offensichtlich gilt deshalb für die Ladungsdichte (14.30) mit (D2):

$$\int \rho(\vec{r}) dV = Q. \quad (14.32)$$

Einsetzen von (14.30) in (14.28) führt auf die Poisson-Gleichung für eine Punktladung:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r}). \quad (14.33)$$

Gemäß (14.24) und (14.25) besitzt (14.33) die Lösung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|}. \quad (14.34)$$

Einsetzen von (14.34) in (14.33) führt dann auf die Distributionenidentität

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi\delta(\vec{r}). \quad (14.35)$$

Wir wollen nun aber (14.35) auch direkt beweisen. Es sei zunächst $\vec{r} \neq \vec{0}$. Dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}, \quad (14.36)$$

so dass sich hieraus

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{0} \quad (14.37)$$

in Übereinstimmung mit (D1) und (14.35) ergibt. Nun muss nur noch (D2) überprüft werden. Hierzu betrachten wir das Volumenintegral

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \Delta \frac{1}{|\vec{r}|} dV \quad (14.38)$$

für eine Kugel $K(R)$ mit Radius R mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Aufgrund von (14.29) erhalten wir

$$I = \frac{-1}{4\pi} \int_{K(R)} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \right) dV, \quad (14.39)$$

so dass der Satz von Gauß (13.36) angewandt werden kann

$$I = \frac{-1}{4\pi} \oint_{\partial K(R)} \operatorname{grad} \frac{1}{|\vec{r}|} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial K(R)} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \cdot d\vec{F} \quad (14.40)$$

mit der Oberfläche $\partial K(R)$ der Kugel $K(R)$. Die Berechnung des Oberflächenintegrals erfolgt analog zu (14.5) und ergibt

$$I = 1 \quad (14.41)$$

in Übereinstimmung mit (D2) und (14.35).

14.8 Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

Wir lösen nun formal die Poisson-Gleichung (14.28) für eine beliebige Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$. Hierzu erhalten wir aufgrund von (5.136) und (14.31) zunächst

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') \varphi(\vec{r}') = \int \varphi(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV'. \quad (14.42)$$

Mit Hilfe der Distributionsidentität (14.35) geht (14.42) über in

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int \varphi(\vec{r}') \Delta' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dV'. \quad (14.43)$$

Aufgrund von (14.29) können wir dies nun umschreiben zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \left\{ \int dV' \vec{\nabla}' \cdot \left[\varphi(\vec{r}') \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] - \int dV' \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right\}. \quad (14.44)$$

Beim ersten Volumenintegral in (14.44) lässt sich der Satz von Gauß (13.36) anwenden, wobei das entsprechende Oberflächenintegral im Unendlichen auszuwerten ist. Hierzu nehmen

wir an, dass das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ im Unendlichen schnell genug verschwindet, d.h. dass Dirichletsche Randbedingungen vorliegen. Dann verschwindet das Oberflächenintegral und (14.44) reduziert sich auf

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \vec{\nabla}' \varphi(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (14.45)$$

Wir führen nun analog eine weitere partielle Integration durch, so dass (14.45) übergeht zu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-1}{4\pi} \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Delta' \varphi(\vec{r}'). \quad (14.46)$$

Einsetzen der Poisson-Gleichung (14.28) führt dann auf das Ergebnis

$$\varphi(\vec{r}) = \int dV' G(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}'). \quad (14.47)$$

Es besagt, dass es zwischen dem elektrostatischen Potential $\varphi(\vec{r})$ und der Ladungsdichte $\rho(\vec{r}')$ einen linearen Zusammenhang gibt. Der Integralkern in (14.47) wird als Greensche Funktion bezeichnet und ist gegeben durch:

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (14.48)$$

Das bedeutet, dass die Greensche Funktion dem Coulomb-Potential einer am Orte \vec{r}' sitzenden Einheitsladung $Q = 1$ entspricht. Aus der Lösung (14.48) der Poisson-Gleichung (14.28) lässt sich gemäß (14.25) die elektrische Feldstärke berechnen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (14.49)$$

Demnach sind das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ und die elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{r})$ einer beliebigen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ durch (14.47)–(14.49) definiert. Damit lassen sich alle Phänomene der Elektrostatik beschreiben.

Kapitel 15

Magnetostatik

Analog zur Formulierung der Elektrostatik im vorhergehenden Kapitel verwenden wir erneut die mathematischen Grundlagen von Kapitel 13, um die Grundgesetze der Magnetostatik aufzustellen. Dabei werden wir aus den Integralsätzen von Gauß und Stokes die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik ableiten.

15.1 Zirkulation der magnetischen Flußdichte

Die beiden französischen Mathematiker Jean-Baptiste Biot und Félix Savart formulierten 1820 das Gesetz, dass ein Strom I in einem geraden Draht ein magnetisches Feld erzeugt, dessen Feldlinien konzentrische Kreise um den Draht darstellen. Dabei wird die Richtung des Magnetfeldes von der Rechten-Hand-Regel bestimmt. Umfasst man den Leiter mit der rechten Hand derart, dass der Daumen in die technische Stromrichtung zeigt, so zeigen die Finger die Richtung des zugehörigen magnetischen Feldes an, siehe Abb. 15.1a). Dabei fällt die Stärke des magnetischen Feldes umgekehrt proportional zum Abstand vom Draht ab. Wählen wir den geraden Draht ohne Beschränkung der Allgemeinheit in Richtung der z -Achse, so lautet das Biot-Savart-Gesetz im SI-Einheitensystem

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15.1)$$

wobei die Permeabilitätskonstante im Vakuum gegeben ist durch

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (15.2)$$

Es sei F eine beliebige Fläche, die keinen Punkt der z -Achse enthält, siehe Abb. 15.1b). Wir berechnen mit Hilfe des Satzes von Stokes (13.46) die Zirkulation von $\vec{B}(\vec{r})$ entlang des Randes C der Fläche F :

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_F \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}. \quad (15.3)$$

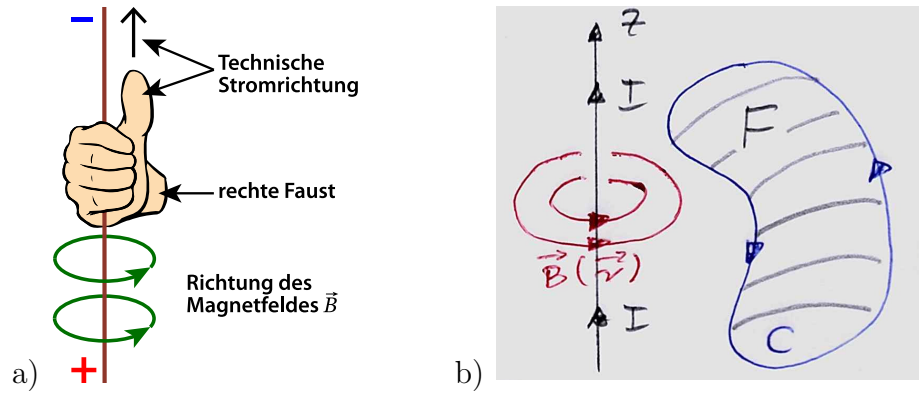


Abbildung 15.1: a) Rechte-Hand-Regel zur Bestimmung der Richtung des magnetischen Feldes eines stromdurchflossenen Leiters; b) Strom I durch einen Leiter mit Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ und Fläche F mit Rand C .

Für die Rotation des Magnetfeldes (15.1) gilt für $\vec{r} \neq \vec{0}$:

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \vec{0}. \quad (15.4)$$

Deshalb erhalten wir für die Zirkulation (15.3):

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (15.5)$$

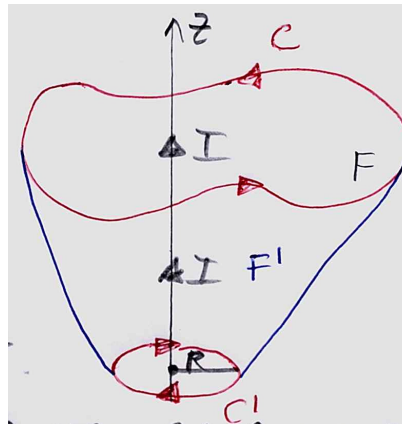
Wir betrachten nun eine geschlossene orientierte Kurve C , die die z -Achse umläuft, siehe Abb. 15.2. Es soll die Zirkulation des magnetischen Feldes (15.1) entlang von C berechnet werden. Betrachten wir C als Rand der Fläche F in der Skizze, so lässt sich der Satz von Stokes nicht anwenden, da F den singulären Punkt $x = y = 0$ von $\vec{B}(\vec{r})$ in (15.1) enthält. Als Ausweg ergänze man C durch C' , der einen Kreis mit Mittelpunkt auf der z -Achse darstellt und entgegengesetzt von C orientiert ist, siehe Abb. 15.2. Dann lässt sich $C + C'$ als Rand der Mantelfläche F' auffassen, die keinen Punkt auf der z -Achse enthält. Aufgrund des Satzes von Stokes (13.46) gilt deshalb mit (15.4):

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{C+C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{F'} \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0. \quad (15.6)$$

Hieraus folgt dann, dass die Zirkulation entlang von C gerade der Zirkulation entlang von $-C'$ entspricht:

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \oint_{C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_{-C'} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (15.7)$$

Im letzten Schritt haben wir dabei die Eigenschaft (3.17) für Kurvenintegrale angewandt. Zur Berechnung der Zirkulation entlang von $-C'$, siehe Abb. 15.2, führen wir die Zylinderkoordinaten (2.71) ein. Mit den entsprechenden Einheitsvektoren (2.74) erhalten wir für das Magnetfeld

Abbildung 15.2: Strom I durch einen Leiter sowie die Kurven C, C' und die Flächen F, F' .

des Biot-Savart-Gesetzes (15.1)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi. \quad (15.8)$$

Die Parametrisierung der Kurve $-C'$ lautet

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad d\vec{r} = R\vec{e}_\varphi d\varphi. \quad (15.9)$$

Damit berechnen wir für die Zirkulation

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi \cdot R\vec{e}_\varphi = \mu_0 I. \quad (15.10)$$

Demnach ist die Zirkulation der magnetischen Flußdichte $\vec{B}(\vec{r})$ entlang der geschlossenen Kurve C proportional zum Strom I , der durch eine Fläche F mit der Randkurve C fließt. Dieses Ergebnis wurde von André-Marie Ampère auf eine beliebige Stromverteilung verallgemeinert und stellt ein Grundgesetz der Magnetostatik dar.

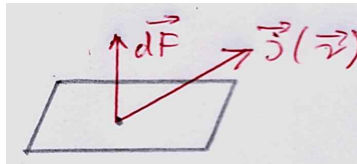
15.2 Erste Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Aus dem Ampèreschen Grundgesetz der Magnetostatik (15.10) folgt einerseits mit dem Satz von Stokes (13.46)

$$Z = \int_F \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}, \quad (15.11)$$

wobei F eine beliebige Fläche mit der Randkurve C ist. Andererseits lässt sich der Strom I durch F mit Hilfe der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ darstellen gemäß

$$I = \int_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}, \quad (15.12)$$

Abbildung 15.3: Flächenelement $d\vec{F}$ mit Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$.

siehe Abb. 15.3. Demnach gibt die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F}$ diejenige Ladung pro Zeiteinheit an, die durch die Fläche mit dem infinitesimalen Flächenelement $d\vec{F}$ fließt. Aus (15.10)–(15.12) folgt dann:

$$\int_F \left[\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) - \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \right] \cdot d\vec{F} = 0. \quad (15.13)$$

Da diese Aussage für jede Fläche F gilt, erhalten wir hieraus die erste Maxwellgleichung der Magnetostatik:

$$\text{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}). \quad (15.14)$$

Wir bemerken, dass (15.14) nicht für jede Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ sinnvoll ist. Berechnen wir die Divergenz der linken Seite von (15.14), so folgt aus (13.14) und (13.29):

$$\begin{aligned} \text{div} \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial z} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial B_z(\vec{r})}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial B_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial B_x(\vec{r})}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (15.15)$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir schließlich eine wichtige Identität der Vektoranalysis

$$\begin{aligned} \text{div} \text{rot} \vec{B}(\vec{r}) &= \left[\frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 B_x(\vec{r})}{\partial z \partial y} \right] \\ &+ \left[\frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 B_y(\vec{r})}{\partial x \partial z} \right] + \left[\frac{\partial^2 B_z(\vec{r})}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 B_z(\vec{r})}{\partial y \partial x} \right] = 0, \end{aligned} \quad (15.16)$$

da die gemischten zweiten partiellen Ableitungen für zwei Mal stetig differenzierbare Funktionen nach dem Satz von Schwarz (14.27) verschwinden. Demnach folgt aus der Divergenz der rechten Seite von (15.14)

$$\text{div} \vec{j}(\vec{r}) = 0. \quad (15.17)$$

Man bezeichnet (15.17) als Kontinuitätsgleichung. Integriert man nämlich die Divergenz der Stromdichte über ein Volumen V , dann ergibt sich aus dem Satz von Gauß (13.36)

$$\int \text{div} \vec{j}(\vec{r}) dV = \oint_F \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0. \quad (15.18)$$

Das bedeutet, dass pro Zeiteinheit genau so viel Ladung in das Volumen V hinein- wie herausfließt. In der Magnetostatik dürfen nur solche Stromdichten $\vec{j}(\vec{r})$ verwendet werden, die dieser Kontinuitätsgleichung (15.17) genügen.

15.3 Zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik

Wir kehren zum Biot-Savart-Gesetz (15.1) zurück und berechnen die Divergenz der magnetischen Flußdichte:

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2 + y^2} + x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0. \quad (15.19)$$

Dieses Ergebnis lässt sich in der Magnetostatik auf ein beliebiges magnetisches Feld verallgemeinern und stellt die zweite Maxwell-Gleichung der Magnetostatik dar. Hätte man eine magnetische Flußdichte mit einer nichtverschwindenden Divergenz, also

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r}), \quad (15.20)$$

dann würde die Funktion $\rho_m(\vec{r})$ in Analogie zu (14.16) die räumliche Verteilung von magnetischen Monopolen beschreiben. Hierbei ist ein magnetischer Monopol ein gedachter Magnet, der nur einen Pol hat, also nur den Nord- oder nur den Süd-Pol. Nach seinen Wirkungen kann man sich einen einzelnen magnetischen Pol wie ein Ende eines langen Stabmagneten vorstellen, wenn dessen anderes Ende so weit entfernt ist, dass die von dort ausgehenden Kräfte vernachlässigbar klein sind. Wenn es ihn als Teilchen gäbe, wäre er Träger einer magnetischen Ladung entsprechend der elektrischen Ladung. Aufgrund von (15.20) wären magnetische Ladungen Quellen und Senken des magnetischen Feldes. Es gibt in verschiedenen Bereichen der theoretischen Physik Überlegungen zu solchen magnetischen Monopolen. In der beobachteten Natur kennt man jedoch bisher nur magnetische Felder mit geschlossenen Feldlinien, die gemäß (15.19) keine Quellen und Senken besitzen. Man kann (15.19) auch in Integralform angeben. Hierzu integriert man $\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r})$ über ein Volumen V und wendet den Satz von Gauß (13.36) an:

$$\oint_F \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{F} = 0. \quad (15.21)$$

Demnach verschwindet der Fluß der magnetischen Feldstärke $\vec{B}(\vec{r})$ durch jede geschlossene Fläche F . Es zeigen im Mittel gleich viele magnetische Feldlinien in F hinein und aus F heraus.

15.4 Vektorpotential

Da die Divergenz der magnetischen Flußdichte $\vec{B}(\vec{r})$ gemäß (15.19) verschwindet, lässt sich wegen der Identität der Vektoranalysis (15.16) ein Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ mit Eigenschaft

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) \quad (15.22)$$

eingeführen. Allerdings ist zu beachten, dass dieses Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ nicht eindeutig ist. Zu einem $\vec{A}(\vec{r})$ kann immer das Gradientenfeld $\operatorname{grad} \Lambda(\vec{r})$ eines beliebigen Skalarfeldes $\Lambda(\mathbf{r})$

addiert werden, ohne dass sich die magnetische Flußdichte verändert. In der Tat führt die Eichtransformation

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad}\Lambda(\vec{r}) \quad (15.23)$$

wegen der Identität von (14.26) der Vektoranalysis auf das Ergebnis

$$\vec{B}'(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}'(\vec{r}) = \text{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}). \quad (15.24)$$

Eine solche Eichtransformation verändert also die mathematische Beschreibung eines Magnetfeldes in Form des Vektorpotentials, ohne aber das Magnetfeld und die damit zusammenhängende Physik zu verändern. Wir verwenden nun die Eichtransformation (15.23), um das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ für eine beliebige Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ zu berechnen.

15.5 Berechnung des Vektorpotentials

Hierzu setzen wir (15.22) in die erste Maxwell Gleichung der Magnetostatik (15.14) ein. Hierbei ist eine weitere Identität der Vektoranalysis zu beachten, die sich aus (13.9), (13.14), (13.28), dem Laplace-Operator (14.29) und der „bac-cab“-Regel für das doppelte Vektorprodukt (1.52) ergibt:

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\vec{A}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})] = \vec{\nabla} [\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r})] - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \text{grad div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (15.25)$$

Damit erhalten wir als Feldgleichung für das Vektorpotential:

$$\text{grad div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0\vec{j}(\vec{r}). \quad (15.26)$$

Hieraus lesen wir ab, dass der erste Term von (15.26) dazu führt, dass die drei partiellen Differentialgleichungen für die Komponenten $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$, $A_z(\vec{r})$ miteinander gekoppelt sind. Man kann nun aber die Eichfreiheit (15.23) im Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ ausnutzen, um diese Feldgleichung für das Vektorpotential zu vereinfachen. Wählt man speziell die Coulomb-Eichung

$$\text{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0, \quad (15.27)$$

dann entfällt der erste Term von (15.26) und diese Feldvergleichung vereinfacht sich zu

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r}). \quad (15.28)$$

Hierbei handelt es sich für jede einzelne Komponente des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r})$ um eine Poisson-Gleichung (14.28). Deshalb können wir unmittelbar die Lösung (14.47), (14.48) der Poisson-Gleichung übernehmen und erhalten als Lösung von (15.28):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (15.29)$$

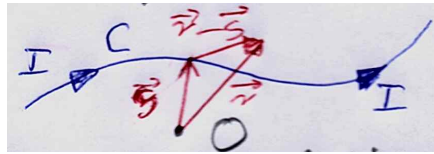


Abbildung 15.4: Strom I durch Kurve C zur Berechnung der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ mit \vec{r} und \vec{s} gemäß (15.33).

Wir überprüfen nun, ob (15.29) tatsächlich der Coulomb-Eichung (15.27) genügt. Zunächst erhalten wir:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (15.30)$$

Eine partielle Integration mit Hilfe des Satzes von Gauß (13.36) analog zu Abschnitt 14.8 führt dann auf:

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (15.31)$$

Demnach garantiert die Kontinuitätsgleichung (15.17) der Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ auf die Coulomb-Eichung (15.27) des Vektorpotentials (15.29). Mit Hilfe von (15.22) und (15.29) lässt sich die magnetische Flußdichte der Magnetostatik berechnen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (15.32)$$

Zusammenfassend stellen wir fest, dass Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ und magnetische Flußdichte $\vec{B}(\vec{r})$ einer beliebigen Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ durch (15.29) und (15.32) definiert sind. Damit lassen sich alle Phänomene der Magnetostatik beschreiben.

15.6 Biot-Savart-Gesetz

Wir betrachten als Beispiel einen Strom I , der durch einen Draht mit der Kurvenform C fließt. In diesem Fall lautet die Stromdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}) = I \oint_C \delta(\vec{r} - \vec{s}) d\vec{s}, \quad (15.33)$$

siehe Abb. 15.4. Zunächst ist zu prüfen, ob diese Stromdichte der Kontinuitätsgleichung (15.17) genügt. Wir erhalten erst

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = -I \oint_C \left[\vec{\nabla}_s \delta(\vec{r} - \vec{s}) \right] \cdot d\vec{s}. \quad (15.34)$$

Darauf wenden wir (13.1) an und erhalten:

$$\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}) = -I \oint_C d\delta(\vec{r} - \vec{s}) = -I \left[\delta(\vec{r} - \vec{s}_A) - \delta(\vec{r} - \vec{s}_E) \right]. \quad (15.35)$$

Hierbei bezeichnen \vec{s}_A und \vec{s}_E Anfangs- und Endpunkt des Drahtes. Wenn jedoch der Draht C geschlossen ist, gilt $\vec{s}_A = \vec{s}_E$ und aus (15.35) folgt die Kontinuitätsgleichung (15.17). Setzen wir die Stromdichte (15.33) in (15.32) ein, so erhalten wir das allgemeine Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3}. \quad (15.36)$$

Wir spezialisieren nun weiter auf einen unendlich langen Draht, der parallel zur z -Achse verläuft. Mit der entsprechenden Parametrisierung von C

$$\vec{s}(z') = z' \vec{e}_z, \quad z' \in (-\infty, +\infty), \quad d\vec{s}(z') = dz' \vec{e}_z \quad (15.37)$$

erhalten wir als Zwischenrechnung

$$d\vec{s}(z') \times [\vec{r} - \vec{s}(z')] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & z' \\ x & y & z - z' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} dz', \quad (15.38)$$

so dass sich (15.36) reduziert auf das Integral

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15.39)$$

Es lässt sich mit Hilfe der Stammfunktion [19, (2.264.5)]

$$\int^z dz' \frac{1}{(a^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{z}{a^2(a^2 + z^2)^{1/2}} \quad (15.40)$$

berechnen und wir erhalten aus (15.39) das zu Beginn angegebene Biot-Savart-Gesetz (15.1) für einen stromdurchflossenen geraden Draht.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Pelster und I. Schneider, *Kompaktkurs in Mathematik*, Technische Universität Kaiserslautern, Vorlesungsmanuskript im Sommersemester 2021,
<https://www-user.rhrk.uni-kl.de/~apelster/Manuscripts/mathe.pdf>
- [2] A. Pelster, *Theoretische Mechanik*, Freie Universität Berlin, Vorlesungsskript in den Wintersemestern 2000/2001 und 2001/2002,
<https://www-user.rhrk.uni-kl.de/~apelster/Manuscripts/mechanik.pdf>
- [3] H.J. Korsch, *Mathematische Grundlagen für Physiker – Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik*, 5. aktualisierte und erweiterte Auflage, Hanser Verlag, 2021
- [4] M. Fleischhauer, *Mathematische Grundlagen der Physik*, Vorlesungsaufschriebe vom Wintersemester 2020/2021 und vom Sommersemester 2021
<https://www.physik.uni-kl.de/agfleischhauer/dokuwiki/doku.php?id=start>
- [5] M. Barthelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan und A. Wipf, *Theoretische Physik*, Springer-Verlag, 2014
- [6] T. Fließbach, *Mechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*, 8. Auflage, Springer-Verlag, 2020
- [7] T. Fließbach, *Elektrodynamik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*, 6. Auflage, Springer-Verlag, 2012
- [8] S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, 10. Auflage, Springer-Verlag, 2012
- [9] W. Greiner, *Klassische Mechanik I: Kinematik und Dynamik der Punktteilchen - Relativitätstheorie*, 8. Auflage, Harri Deutsch Verlag, 2007
- [10] W. Greiner, *Elektrodynamik*, 7. Auflage, Harri Deutsch Verlag, 2008
- [11] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 1 Klassische Mechanik*, 11. Auflage, Springer-Verlag, 2018
- [12] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Band 3 Elektrodynamik*, 10. Auflage, Springer-Verlag, 2013

- [13] P. Reineker, M. Schulz und B. M. Schulz, *Theoretische Physik I - Mechanik*, Wiley-VCH, 2006
- [14] P. Reineker, M. Schulz und B. M. Schulz, *Theoretische Physik I - Elektrodynamik*, Wiley-VCH, 2006
- [15] H. Schulz, *Physik mit Bleistift: Einführung in die Rechenmethoden der Naturwissenschaften*, 2. Auflage, Springer-Verlag, 1993
- [16] https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Geometrie:_Trigonometrie
- [17] W. Greiner und H. Stock, *Hydrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 1991
- [18] M. Bestehorn, *Hydrodynamik und Strukturbildung*, Springer-Verlag, 2006
- [19] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed., Elsevier Verlag, 2007
- [20] V. I. Arnold, *Mathematische Methoden der klassischen Mechanik*, Birkhäuser Verlag, 1988
- [21] <http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/angeo3.htm>
- [22] <https://www.mpe.mpg.de/6590570/Stellar-Orbits>
- [23] R. Ruffini and J. A. Wheeler, *Introducing the Black Hole*, *Physics Today* **24**, 1, 30 (1971)
- [24] <https://www.mpg.de/14675019/sternpraezession-nahe-dem-schwarzen-loch>