

# Vorkurs Mathematik

**Axel Pelster und Imke Schneider**

**Fachbereich Physik, RPTU Kaiserslautern-Landau**

**Vorlesung im Wintersemester 2024/2025**

**Version: Oktober 2024**





# Vorwort

Am Fachbereich Physik der RPTU in Kaiserslautern wird jedes Semester vor Vorlesungsbeginn fakultativ ein zweiwöchiger **Vorkurs Mathematik** angeboten. Er dient dazu, den Schulstoff in Mathematik im Hinblick auf die Anforderungen im ersten und zweiten Semester des Physikstudiums zu wiederholen und aufzufrischen. Es gibt vielerlei Gründe, warum er sich für Studienanfänger lohnt. Zum einen kann es vorkommen, dass sich der Studienbeginn nicht unmittelbar an das Abitur anschließt. Zum Beispiel nehmen in jüngerer Zeit viele Abiturienten die Möglichkeit in Anspruch, nach der Schulzeit zunächst ein freiwilliges soziales Jahr oder einen längeren Auslandsaufenthalt zu absolvieren. Einige schlagen auch zunächst einen Ausbildungsweg ein, bevor sie sich für ein Physik-Studium entscheiden. Zum anderen dient der **Vorkurs Mathematik** aber auch dazu, die diversen Kenntnisse der Schulmathematik zu nivellieren. So haben einige Schüler einen Leistungskurs in Mathematik belegt andere einen Grundkurs. Zudem lässt der Lehrplan in den einzelnen Bundesländern natürlich zu, dass an den jeweiligen Schulen unterschiedliche Akzente bei der Mathematikausbildung in der Oberstufe gesetzt werden.

Unabhängig vom individuellen schulischen Werdegang kann festgehalten werden, dass solide Kenntnisse der Mathematik in jedem Fall ein wichtiges Rüstzeug für ein Studium der Physik darstellen. Die zugrunde liegenden physikalischen Naturgesetze lassen sich immer mit Hilfe von Formeln quantifizieren. Die Mathematik ist aber nicht nur eine „Sprache“, in der man physikalische Gesetzmäßigkeiten präzise formuliert. Umgekehrt kann man sich diese „Sprache“ auch zu Nutze machen, um neue Gesetze der Natur zu postulieren. Auf diese Weise kann man also auch theoretische Zusammenhänge vermuten, auf die man bisher noch gar nicht aufmerksam geworden ist und die noch experimentell zu überprüfen sind. Um an dieser Arbeits- und Denkweise schon zu Studienbeginn adäquat teilhaben zu können, ist es also hilfreich, grundlegende Kenntnisse der Schulmathematik zu besitzen. In diesem Sinne werden im **Vorkurs Mathematik** die folgenden Themen der Schulmathematik wiederholt: Zahlbereiche, Folgen, Reihen, Funktionen, Ableitung, Taylor-Reihe, Integration, komplexe Zahlen, Vektoren, Matrizen, Determinanten und lineare Gleichungssysteme. Das vorliegende Vorlesungsskript behandelt diese Themen mit unterschiedlicher mathematischer Strenge anhand instruktiver Beispiele. Trotzdem wird empfohlen, bei Bedarf auch auf die einschlägige Literatur der Schulmathematik zurückzugreifen. Es bietet sich ebenfalls an, etablierte Bücher von Mathematik-Vorkursen zur Vertiefung einzelner Themen zu Rate zu ziehen:

- H.J. Korsch, *Mathematik-Vorkurs*, Binomi
- F. Osterbrink, S. Molik, und A. Duvenbeck, *Vorkurs Mathematik*, Sierke
- W. Schäfer, K. Georgi, und G. Tipler, *Mathematik-Vorkurs*, Teubner

Außerdem sei an dieser Stelle auf eine wichtige Formelsammlung für die Mathematik der ersten Semester hingewiesen:

- I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol, und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch

Und all denjenigen, die gleich zu Beginn noch breitere und tiefere Mathematik-Kenntnisse für das Physik-Studium erwerben wollen, sei das folgende exzellente Buch zum Selbststudium und als Nachschlagewerk empfohlen:

- S. Großmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*, Springer

Dieses Vorlesungsmanuskript ist ursprünglich aus dem Mathematik-Vorkurs von apl. Prof. Dr. Thomas Markwig vom Fachbereich der Mathematik der Universität Tübingen hervorgegangen und ist dann in den Vorlesungsaufschriften der letzten Jahre verfeinert worden, in denen wir den **Vorkurs Mathematik** an der RPTU Kaiserslautern-Landau durchführten. Wir bedanken uns insbesondere bei Herrn Alexander Guthmann, der die handschriftlichen Notizen im Sommersemester 2021 digitalisierte.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlbereiche</b>	<b>1</b>
1.1	Übersicht . . . . .	1
1.2	Körperaxiome der reellen Zahlen . . . . .	3
1.3	Bemerkungen . . . . .	4
1.4	Ausgewählte Rechenregeln . . . . .	5
1.5	Definition einer Wurzel . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Folgen</b>	<b>7</b>
2.1	Definition . . . . .	7
2.2	Beispiele . . . . .	7
2.3	Konvergenz und Grenzwert . . . . .	8
2.4	Beispiele . . . . .	8
2.5	Grenzwertsätze . . . . .	9
2.6	Einschachtelungssatz . . . . .	10
2.7	Beispiele . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>11</b>
3.1	Definition . . . . .	11
3.2	Geometrische Reihe . . . . .	11
3.3	Harmonische Reihe . . . . .	12
3.4	Beispiele konvergenter Reihen . . . . .	13
<b>4</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen</b>	<b>15</b>
4.1	Definition . . . . .	15
4.2	Exponentialfunktion, Logarithmus . . . . .	15

4.3	Trigonometrische Funktionen . . . . .	16
4.4	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	18
4.5	Beispiele . . . . .	19
4.6	Definition . . . . .	20
4.7	Beispiele . . . . .	20
4.8	Zwischenwertsatz . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Differenzierbarkeit und Ableitung von Funktionen</b>	<b>23</b>
5.1	Sekante . . . . .	23
5.2	Definition . . . . .	23
5.3	Beispiele . . . . .	24
5.4	Wichtige Ableitungen . . . . .	26
5.5	Rechenregeln . . . . .	26
5.6	Beispiele . . . . .	27
5.7	Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	27
5.8	Beispiele . . . . .	28
5.9	Höhere Ableitungen . . . . .	28
5.10	Kritische Punkte und Extremwerte . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Taylor-Reihe</b>	<b>31</b>
6.1	Tangente . . . . .	31
6.2	Herleitung . . . . .	31
6.3	Exponentialfunktion . . . . .	33
6.4	Geometrische Reihe . . . . .	33
6.5	Regel von de l'Hôpital . . . . .	34
6.6	Identitätssatz für Potenz-Reihen . . . . .	35
6.7	Anwendung für Potenz-Reihen . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>39</b>
7.1	Integrierbarkeit und Integral . . . . .	39
7.2	Beispiel . . . . .	40
7.3	Integrationsregeln . . . . .	43

7.4	Stammfunktion . . . . .	44
7.5	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	44
7.6	Bezeichnungen und Tabelle von Stammfunktionen . . . . .	45
7.7	Partialbruchmethode . . . . .	46
7.8	Partielle Integration . . . . .	47
7.9	Beispiele . . . . .	48
7.10	Substitutionsregel . . . . .	48
7.11	Beispiele . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>51</b>
8.1	Definition komplexer Zahlen . . . . .	51
8.2	Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	52
8.2.1	Addition und Subtraktion . . . . .	52
8.2.2	Multiplikation . . . . .	53
8.2.3	Konjugiert komplexe Zahl . . . . .	53
8.2.4	Division . . . . .	54
8.2.5	Folgerungen . . . . .	55
8.2.6	Bemerkung . . . . .	55
8.3	Euler-Formel . . . . .	55
8.3.1	Herleitung über Taylor-Reihen . . . . .	56
8.3.2	Additionstheoreme . . . . .	56
8.4	Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	57
8.4.1	Argument und Phasenfaktor . . . . .	57
8.4.2	Multiplikation und Division . . . . .	58
8.4.3	Folgerungen . . . . .	58
8.5	Hyperbelfunktionen . . . . .	59
8.6	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Vektorrechnung</b>	<b>63</b>
9.1	Rechenregeln mit Vektoren . . . . .	63
9.2	Komponentendarstellung von Vektoren . . . . .	64

9.3	Skalarprodukt zweier Vektoren . . . . .	65
9.4	Vektorprodukt zweier Vektoren . . . . .	67
9.5	Spatprodukt dreier Vektoren . . . . .	68
9.6	Zweifaches Vektorprodukt . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Matrizen</b>	<b>71</b>
10.1	Definitionen . . . . .	71
10.2	Addition und Subtraktion von Matrizen . . . . .	72
10.3	Multiplikation mit Skalar . . . . .	73
10.4	Multiplikation zweier Matrizen . . . . .	74
10.5	Koordinaten-Transformation . . . . .	75
10.6	Inverse Matrizen . . . . .	77
<b>11</b>	<b>Determinanten</b>	<b>79</b>
11.1	Definitionen . . . . .	79
11.2	Laplacescher Entwicklungssatz . . . . .	80
11.3	Eigenschaften . . . . .	82
11.4	Inverse Matrix . . . . .	84
<b>12</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>87</b>
12.1	Definition . . . . .	87
12.2	Matrixform . . . . .	87
12.3	Lösbarkeit . . . . .	88
12.4	Gauß-Verfahren . . . . .	88
12.5	Gauß-Jordan-Verfahren . . . . .	89
12.6	Beispiel für eindeutige Lösung . . . . .	90
12.7	Weiteres Beispiel . . . . .	91

# Kapitel 1

## Zahlbereiche

In diesem Kapitel werden wir die aus der Schule bekannten Zahlbereiche der natürlichen, der ganzen, der rationalen und der irrationalen Zahlen von einem etwas höheren Standpunkt aus betrachten. Dabei werden viele Eigenschaften und Rechenregeln, die uns alle wohl vertraut sind, nochmals systematisch zusammengestellt und näher beleuchtet.

### 1.1 Übersicht

Wir werden zunächst die aus der Schule bekannten Zahlbereiche in Erinnerung rufen. Hierzu setzen wir die folgenden Zahlbereiche als bekannt voraus:

1. Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \quad (1.1)$$

heißt die Menge der natürlichen Zahlen. Nimmt man die Null hinzu, gilt

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} . \quad (1.2)$$

2. Die Menge

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (1.3)$$

stellt die Menge der ganzen Zahlen dar.

3. Die Menge

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\} \quad (1.4)$$

heißt die Menge der rationalen Zahlen.

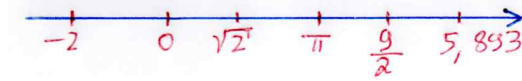


Abbildung 1.1: Darstellung reeller Zahlen auf einer Zahlengeraden.

#### 4. Die Menge aller Dezimalzahlen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \left\{ \pm a_{-n} a_{-n+1} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}; i, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=-n}^{\infty} \pm a_i \cdot 10^{-i} \mid a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}; i, n \in \mathbb{N}_0 \right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

heißt die Menge der reellen Zahlen.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die reelle Zahl

$$178,576 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}, \quad (1.6)$$

die durch die folgenden Koeffizienten charakterisiert wird:

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 7, \quad a_0 = 8, \quad a_{-1} = 5, \quad a_{-2} = 7, \quad a_{-3} = 6. \quad (1.7)$$

Für reelle Zahlen machen wir die folgenden nützlichen Bemerkungen:

1. Alle reellen Zahlen lassen sich auf einer Zahlengeraden darstellen, siehe Fig. 1.1.
2. Außerdem ist zu beachten, dass die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch nicht eindeutig ist. Zwei Brüche  $a/b$  und  $c/d$  sind z.B. genau dann gleich, falls  $ad = bc$  gilt. So gilt beispielsweise:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-8}. \quad (1.8)$$

Die Darstellung  $a/b$  einer reellen Zahl ist eindeutig, falls man fordert, dass  $a$  und  $b$  teilerfremd sind und dass  $b$  positiv ist.

3. Jede rationale Zahl kann als Bruch oder als Dezimalzahl

(a) mit endlich vielen Nachkommastellen, z.B.

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad (1.9)$$

(b) oder als periodische Dezimalzahl, z.B.

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overline{3} \quad (1.10)$$

geschrieben werden. Umgekehrt kann man aber auch

(c) jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen als Bruch schreiben, z.B.

$$0,xyz = \frac{xyz}{1000}; \quad 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}. \quad (1.11)$$

(d) jede periodische Dezimalzahl als Bruch schreiben, z.B.

$$0,\overline{xyz} = \frac{xyz}{999}; \quad 0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}. \quad (1.12)$$

## 1.2 Körperaxiome der reellen Zahlen

Von der Schule her kennen wir für die reellen Zahlen vier Grundrechenarten: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. In der Mathematik hat es sich aber als sinnvoll erwiesen, nur die beiden Operationen Addition und Multiplikation als eigenständige Operationen zu betrachten, und die anderen beiden als Addition und Multiplikation mit geeigneten Zahlen aufzufassen. Dadurch reduziert sich die Anzahl an Rechenregeln, die man sich merken muss, erheblich.

Auf der Menge der reellen Zahlen sind zwei Operationen definiert, die Addition „+“ und die Multiplikation „·“. Für die Addition gelten die folgenden Axiome:

(A1) Assoziativgesetz: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x + y) + z = x + (y + z). \quad (1.13)$$

(A2) Kommutativgesetz; für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x + y = y + x. \quad (1.14)$$

(A3) Neutrales Element 0: für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x + 0 = 0 + x = x. \quad (1.15)$$

(A4) Negatives Element: zu jeder Zahl  $x \in \mathbb{R}$  gibt es ihr Negatives  $-x \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$x + (-x) = (-x) + x = 0. \quad (1.16)$$

Für die Multiplikation dagegen gelten die Axiome:

(M1) Assoziativgesetz: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z). \quad (1.17)$$

(M2) Kommutativgesetz: für jedes  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x \cdot y = y \cdot x. \quad (1.18)$$

(M3) Neutrales Element 1: für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x. \quad (1.19)$$

(M4) Inverses Element: zu jeder Zahl  $0 \neq x \in \mathbb{R}$  gibt es ein Inverses  $x^{-1} = 1/x \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft:

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1. \quad (1.20)$$

Zusätzlich gelten für die Addition und die Multiplikation die Distributivgesetze: für alle  $x, y, z \in \mathbb{R}$  gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (1.21)$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x. \quad (1.22)$$

Eine Menge mit zwei Operationen, für die die obigen Axiome gelten, nennt man in der Mathematik einen Körper. Beispiele für Körper sind die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  und die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ .

### 1.3 Bemerkungen

- Assoziativgesetze: Wir dürfen beim Addieren bzw. beim Multiplizieren Klammern setzen oder auch einfach weglassen.
- Kommutativgesetze: Wir dürfen beim Addieren bzw. beim Multiplizieren die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen.
- Distributivgesetze: Sie regeln, was beim Auflösen von Klammern passiert.
- Das Axiom (A4) dient dazu, die Subtraktion einer Zahl  $y$  einzuführen als Addition mit einer geeigneten anderen Zahl  $y$ , ihrem Negativen. Wir verwenden die Notation

$$x + (-y) = x - y. \quad (1.23)$$

- Das Axiom (M4) dient dazu, die Division einer Zahl  $y$  einzuführen als Multiplikation mit einer geeigneten Zahl  $y^{-1}$ , ihrem Inversen. Wir verwenden die Notation

$$x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}. \quad (1.24)$$

- Aufgrund von (M2) führen wir die folgende abkürzende Schreibweise ein

$$x \cdot y = xy. \quad (1.25)$$

- Wir führen für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und eine reelle Zahl  $x \in \mathbb{R}$  die Potenzschreibweise

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ mal}} \quad (1.26)$$

ein und ergänzen diese um die Festlegung

$$x^0 = 1, \quad (1.27)$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ mal}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.28)$$

## 1.4 Ausgewählte Rechenregeln

Wir sammeln nun einige Rechenregeln, die in jedem Körper und damit auch in den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gelten. Es seien  $x, y, z \in \mathbb{R}; u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n, m \in \mathbb{Z}$

- Kürzungsregel der Addition:

$$x + y = x + z \quad \implies \quad y = z \quad (1.29)$$

- Kürzungsregel der Multiplikation:

$$x \cdot y = x \cdot z, \quad x \neq 0 \quad \implies \quad y = z \quad (1.30)$$

- Minus mal Minus gleich Plus:

$$-(-x) = x, \quad (-x)(-y) = xy \quad (1.31)$$

- Null bei Multiplikation:

$$x \cdot y = 0 \quad \iff \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0 \quad (1.32)$$

- Multiplikation mit Null:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (1.33)$$

- Doppeltes Invertieren verändert nichts:

$$(x^{-1})^{-1} = x, \quad x \neq 0 \quad (1.34)$$

- Addition von Brüchen:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{xv + yu}{uv} \quad (1.35)$$

- Multiplikation von Brüchen:

$$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{xy}{uv} \quad (1.36)$$

- Potenzgesetze:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad (1.37)$$

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad (1.38)$$

$$x^n \cdot y^n = (xy)^n \quad (1.39)$$

## 1.5 Definition einer Wurzel

Zu jeder reellen Zahl  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq 0$  und jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gibt es genau eine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a \geq 0$  und  $a^n = x$ . Wir nennen die Zahl  $a$  die  $n$ -te Wurzel aus  $x$  und schreiben  $a = \sqrt[n]{x}$  oder  $a = x^{1/n}$ .

Es ist zu beachten, dass die Potenzgesetze (1.37)–(1.39) auch für rationale Exponenten gelten, sofern die Basis nicht negativ ist. Beispielsweise erhalten wir

$$2^{1/3} \cdot 3^{1/3} = 6^{1/3}. \quad (1.40)$$

# Kapitel 2

## Folgen

Folgen sind auf den ersten Blick einfache mathematische Objekte, die für den Naturwissenschaftler aber auch z.B. für den Bankkaufmann sehr nützlich sind. Es handelt sich hierbei um eine Menge von Zahlen, die aufeinander folgen. Man kann sie nummerieren, sie sind also abzählbar, und man kennzeichnet sie daher zweckmäßig durch einen Index  $n$ , der die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  durchläuft.

### 2.1 Definition

Eine Folge in  $\mathbb{R}$  ist eine Vorschrift, bei der jeder natürlichen Zahl  $n = 1, 2, 3, \dots$  eine Zahl  $a_n \in \mathbb{R}$  wie folgt zugeordnet wird:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots). \quad (2.1)$$

### 2.2 Beispiele

Betrachten wir drei konkrete Beispiele:

- Konstante Folge mit  $c \in \mathbb{R}$ , siehe Abb. 2.1a):

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_{n \in \mathbb{N}} = (c, c, c, \dots) \quad (2.2)$$

- Harmonische Folge, siehe Abb. 2.1b):

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right) \quad (2.3)$$

- Geometrische Folge mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $|x| < 1$ , siehe Abb. 2.1c):

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x^n)_{n \in \mathbb{N}} = (x, x^2, x^3, x^4, \dots) \quad (2.4)$$

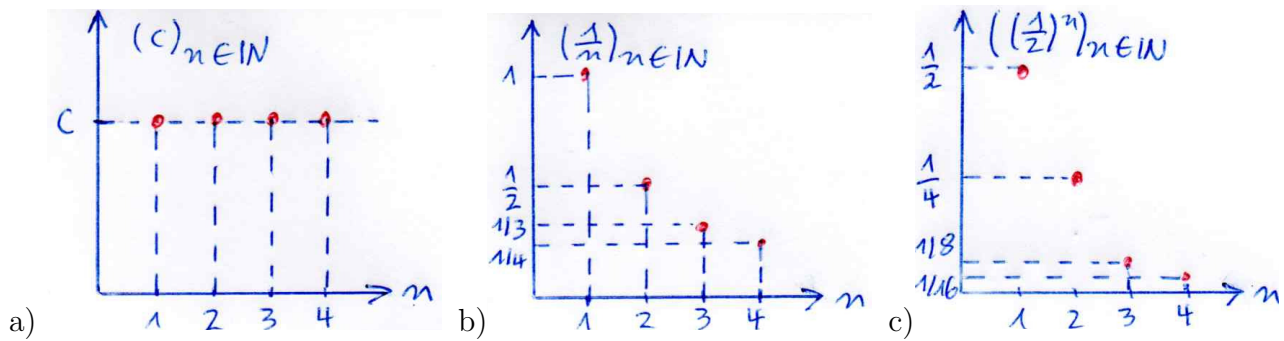


Abbildung 2.1: Illustration der drei Folgen (2.2)–(2.4).

## 2.3 Konvergenz und Grenzwert

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ . Wir nennen  $a$  einen Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\epsilon. \quad (2.5)$$

Als Notation verwenden wir dann:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a. \quad (2.6)$$

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert. Andernfalls nennen wir  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergent. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge, falls  $a_n \rightarrow 0$ . Man kann nun das Folgende zeigen: Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  konvergent, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

## 2.4 Beispiele

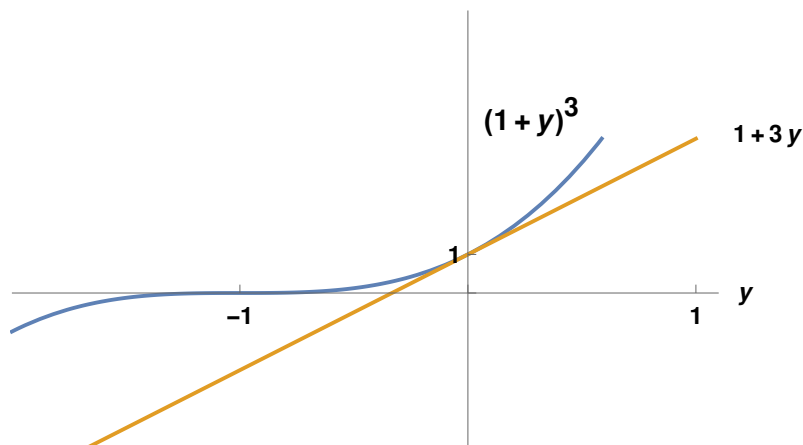
Wir betrachten nun die oben genannten Beispiele von Folgen und untersuchen sie dahingehend, ob sie konvergent oder divergent sind.

- Die konstante Folge (2.2), siehe Abb. 2.1a), ist konvergent:  
Wähle für jedes  $\epsilon > 0$ :  $N_\epsilon = 1$ . Dann gilt für alle  $n \geq N_\epsilon = 1$ :

$$|a_n - c| = 0 < \epsilon. \quad (2.7)$$

- Wir zeigen, dass die harmonische Folge (2.3), siehe Abb. 2.1b), eine Nullfolge ist:  
Es sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $N_\epsilon$  so, dass  $0 < 1/N_\epsilon < \epsilon$ . Dann gilt für alle  $n \geq N_\epsilon$ :

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\epsilon} < \epsilon. \quad (2.8)$$

Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Bernoulli-Ungleichung (2.10) für  $n = 3$ .

- Die geometrische Folge (2.4), siehe Abb. 2.1c), ist für  $|x| < 1$  eine Nullfolge:  
Es sei  $x \neq 0$  und  $\epsilon > 0$ . Dann gilt zunächst  $1/|x| > 1$ , d.h. es gibt ein  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y > 0$ , sodass  $y = 1/|x| - 1$ . Wähle nun  $N_\epsilon$  so, dass  $1/N_\epsilon < y\epsilon$ . Dann gilt für alle  $n \geq N_\epsilon$ :

$$|a_n - 0| = |x^n| = |x|^n = \frac{1}{(1+y)^n}. \quad (2.9)$$

Hier kann man nun die Bernoulli-Ungleichung verwenden. Diese sagt aus, dass für jede reelle Zahl  $y \geq -1$  und jede ganze Zahl  $n \geq 0$  gilt:

$$(1+y)^n \geq 1+ny. \quad (2.10)$$

Diese Ungleichung lässt sich z.B. graphisch wie in Abb. 2.2 beweisen. Demnach besagt (2.10), dass die Funktion  $f(y) = (1+y)^n$  immer oberhalb der Tangente  $g(y) = 1+ny$  am Punkt  $(0, 1)$  verläuft. Mit Hilfe von (2.10) folgt nun aus (2.9) schließlich

$$\frac{1}{(1+y)^n} \leq \frac{1}{1+ny} < \frac{1}{ny} < \frac{1}{n} \epsilon N_\epsilon < \epsilon. \quad (2.11)$$

Man muss aber nicht immer solch eingehende Konvergenzüberlegungen entsprechend zu Abschnitt 2.3 vornehmen. Stattdessen lassen sich Konvergenzbeweise auch mit Hilfe von Grenzwertsätzen oder dem Einschachtelungssatz durchführen, die wir nun vorstellen.

## 2.5 Grenzwertsätze

Wir erwähnen nun ohne Beweis die folgenden Grenzwertsätze. Hierzu seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$ . Es gilt dann:

$$a_n + b_n \rightarrow a + b, \quad (2.12)$$

$$a_n - b_n \rightarrow a - b, \quad (2.13)$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b, \quad (2.14)$$

$$|a_n| \rightarrow |a|. \quad (2.15)$$

Ist zudem  $b \neq 0$ , so gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $b_n \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$  und die Folge  $(a_n/b_n)_{n \geq n_0}$  ist konvergent mit

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}. \quad (2.16)$$

## 2.6 Einschachtelungssatz

Ferner erwähnen wir ohne Beweis den Einschachtelungssatz, der für Konvergenzbeweise äußerst nützlich ist. Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$  und es sei  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für alle  $n \geq n_0$ , so gilt auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

## 2.7 Beispiele

Wir demonstrieren nun die Anwendung des Einschachtelungssatzes anhand von drei aufeinander aufbauender Beispiele.

- Die verallgemeinerte harmonische Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  lässt sich nach unten durch die konstante Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$  und nach oben durch die harmonische Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/n)_{n \in \mathbb{N}}$  abschätzen, wobei letztere, wie oben gezeigt, eine Nullfolge darstellt:

$$a_n = 0 \leq c_n = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} = b_n. \quad (2.17)$$

Mit dem Einschachtelungssatz folgt daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0. \quad (2.18)$$

- Die Folge  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/(4n^2 + 3n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$  lässt sich nach unten durch die konstante Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$  und nach oben durch die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/4n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  abschätzen, wobei letztere nach (2.18) eine Nullfolge ist:

$$a_n = 0 \leq c_n = \frac{1}{4n^2 + 3n + 1} \leq \frac{1}{4n^2} = b_n. \quad (2.19)$$

Auch hier erhalten wir mit dem Einschachtelungssatz eine Nullfolge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n^2 + 3n + 1} = 0. \quad (2.20)$$

- Unter Verwendung der obigen Resultate, dass harmonische Folge  $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$  und verallgemeinerte harmonische Folge  $(1/n^2)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen sind, sowie (2.20) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{4n^2 + 3n + 1} &= \frac{3n^2}{4n^2 + 3n + 1} + \frac{1}{4n^2 + 3n + 1} \\ &\rightarrow \frac{3}{4 + 3/n + 1/n^2} + 0 \rightarrow \frac{3}{4 + 0 + 0} = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

# Kapitel 3

## Reihen

Oft ist man daran interessiert, alle Glieder einer Folge zu summieren. Das führt dann zu einer unendlichen Summe, die man auch als Reihe bezeichnet. Aber Vorsicht ist angesagt, da eine solche unendliche Summe nicht unbedingt existieren muss. Beispielsweise führt eine konstante Folge, mit einem von Null verschiedenen Wert, durch Aufsummieren zu einer divergenten Reihe.

### 3.1 Definition

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann heißt

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (3.1)$$

eine Partialsumme, die natürlich existiert, da sie endlich ist. Konvergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen, dann ist der Grenzwert

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad (3.2)$$

der Wert der Reihe und wir schreiben

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \quad (3.3)$$

### 3.2 Geometrische Reihe

Wir betrachten die geometrische Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k, \quad |x| < 1. \quad (3.4)$$

Sie läßt sich dadurch explizit berechnen, dass man

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \quad (3.5)$$

kombiniert mit

$$x \cdot s_n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n, \quad (3.6)$$

was schließlich auf

$$(1-x)s_n = 1 - x^n \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1-x^n}{1-x} \quad (3.7)$$

führt. Da  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  für  $|x| < 1$  als geometrische Folge eine Nullfolge ist, siehe Kapitel 2, konvergiert die Folge  $s_n$  der geometrischen Partialsummen in (3.7) zur geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \quad (3.8)$$

Als konkretes Beispiel betrachten wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1-1/2} = 2. \quad (3.9)$$

### 3.3 Harmonische Reihe

Auch die harmonische Folge  $(1/k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge, siehe Kapitel 2. Wir betrachten daher nun die harmonische Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (3.10)$$

und zeigen, dass ihre Folge divergiert. Hierzu betrachten wir die harmonische Partialsumme (3.10) mit  $n = 2^m$  für  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{\underbrace{2^{m-1}+2^{m-1}}_{=1/2^m}} \right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die harmonische Partialsumme (3.11) läßt sich nun wie folgt nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} s_{2^m} &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m} \right)}_{2^{m-1} \text{ Summanden}} = 1 + m \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Damit wird  $s_{2^m}$  für wachsendes  $m$  beliebig groß und die Folge harmonischer Partialsummen divergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{divergent}. \quad (3.13)$$

## 3.4 Beispiele konvergenter Reihen

Wir nutzen aus, dass man den Grenzwert von konvergenten Reihen als Definition von Funktionen verwenden kann. Hierzu betrachten wir drei Beispiele für konvergente Reihen. Für eine beliebige Zahl  $x \in \mathbb{R}$  gilt mit der Fakultät  $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ :

- Exponentialfunktion:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad (3.14)$$

- Kosinusfunktion:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad (3.15)$$

- Sinusfunktion:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (3.16)$$



# Kapitel 4

## Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Funktionen sind für den Naturwissenschaftler von grundlegender Bedeutung. Hier wollen wir uns auf „brave“ Funktionen beschränken, die stetig sind. Dies bedeutet anschaulich, dass diese Funktionen keine Sprünge machen. Man kann den Graphen der Funktion also zeichnen, ohne den Stift absetzen zu müssen.

### 4.1 Definition

Eine Funktion  $f$  ist eine Vorschrift, die jedem Element  $x$  aus dem Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$  genau ein Element  $f(x) \in \mathbb{R}$  zuordnet:

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Eine Funktion  $g: S \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Umkehrfunktion der Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y \quad (4.2)$$

für alle  $x \in D$  und  $y \in S$  gilt. Wir schreiben:  $f^{-1} = g$ . Anschaulich erhält man die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$ , indem man die Funktion  $f(x)$  an der ersten Winkelhalbierenden  $y = x$  spiegelt, siehe Abb. 4.1a).

### 4.2 Exponentialfunktion, Logarithmus

Eine wichtige Rechenregel für die Exponentialfunktion lautet:

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}. \quad (4.3)$$

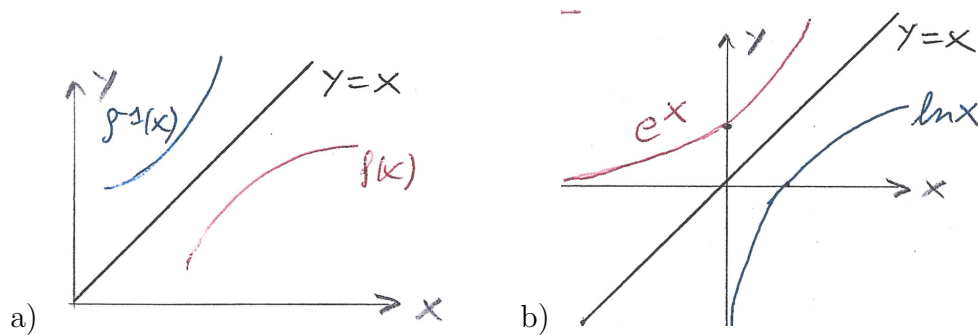


Abbildung 4.1: a) Graphische Konstruktion einer Umkehrfunktion  $f^{-1}(x)$  durch Spiegelung der Funktion  $f(x)$  an der ersten Winkelhalbierenden  $y = x$ . b) Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Hierbei bezeichnet  $e = 2,718\dots$  die Eulersche Konstante. Sie stellt eine irrationale Zahl dar, die in verschiedenen Teilbereichen der Mathematik eine zentrale Rolle spielt. Da  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, ist  $\ln x$  nur für  $x > 0$  definiert:

$$\ln e^x = x, \quad e^{\ln x} = x. \quad (4.4)$$

Damit ist der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, siehe Abb. 4.1b). Zwei nützliche Rechenregeln für den Logarithmus lauten:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad (4.5)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y. \quad (4.6)$$

Durch Anwendung von (4.6) erhalten wir beispielsweise:

$$\ln 1 = \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln x - \ln x = 0. \quad (4.7)$$

### 4.3 Trigonometrische Funktionen

Wir führen die trigonometrischen Funktionen entsprechend Abb. 4.2a) an einem rechtwinkligen Dreieck ein. Dabei gelten für die Koordinaten eines Punktes  $P(x, y)$  auf einem Kreis mit Radius  $r$  der Satz von Pythagoras:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (4.8)$$

Mit Hilfe des Winkels  $\alpha$  zwischen der  $x$ -Achse und dem Fahrstrahl zum Punkt  $P(x, y)$  ist dann der Sinus definiert durch

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{r}. \quad (4.9)$$

Entsprechend gilt für den Kosinus:

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{r}. \quad (4.10)$$

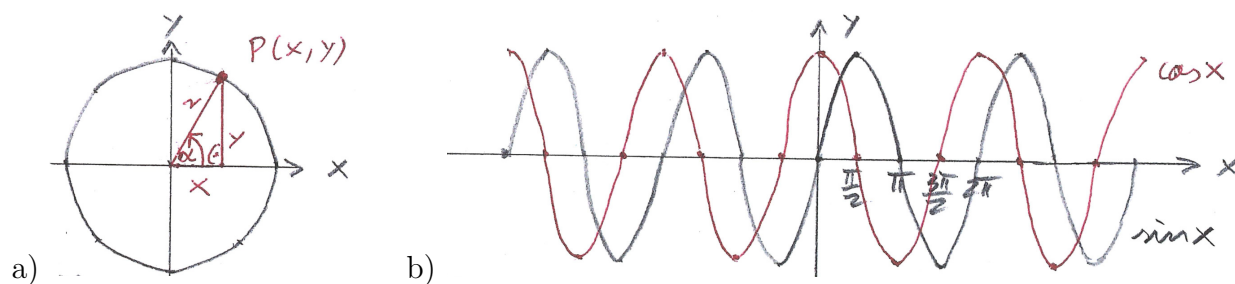


Abbildung 4.2: Trigonometrische Funktionen: a) Definitionen am Kreis. b) Verlauf der Sinus- und der Kosinusfunktion.

$\alpha$ im Gradmaß	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$ im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabelle 4.1: Spezielle Werte trigonometrischer Funktionen.

Die trigonometrischen Funktionen haben spezielle Werte, die in der Tab. 4.1 angegeben sind. Hieraus ergeben sich die Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion, die in Abb. 4.2b) dargestellt sind. Ferner lesen wir hieraus die folgenden wichtigen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ab:

- Die Sinusfunktion ist ungerade:

$$\sin(-x) = -\sin x. \quad (4.11)$$

- Die Kosinusfunktion ist gerade:

$$\cos(-x) = \cos(x). \quad (4.12)$$

- Der trigonometrische Pythagoras lautet:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (4.13)$$

- Sinus- und Kosinusfunktionen genügen trigonometrischen Additionstheoremen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (4.14)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.15)$$

- Als Anwendung des trigonometrischen Additionstheorems (4.14) betrachten wir:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha. \quad (4.16)$$

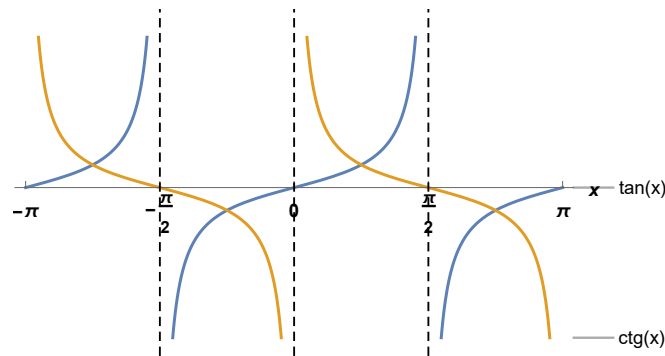


Abbildung 4.3: Verlauf der Tangens- und der Kotangensfunktion.

Verschiebt man also die Sinusfunktion um  $\pi/2$  nach links, so erhält man die Kosinusfunktion. Umgekehrt gilt entsprechend mit Hilfe des trigonometrischen Additionstheorems (4.15):

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha. \quad (4.17)$$

Verschiebt man also die Kosinusfunktion um  $\pi/2$  nach rechts, so erhält man die Sinusfunktion.

- Kombiniert man den trigonometrischen Pythagoras (4.13) mit  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ , was aus dem trigonometrischen Additionstheoreme (4.15) folgt, so erhalten wir:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (4.18)$$

- Außerdem lassen sich weitere trigonometrische Funktionen einführen:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{ctg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}. \quad (4.19)$$

Der resultierende Verlauf der Tangens- und der Kotangensfunktion ist in Abb. 4.3 zu sehen.

- Die entsprechenden Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen lauten:

$$\arcsin x, \quad \arccos x, \quad \arctan x, \quad \text{arctg } x. \quad (4.20)$$

Für die Graphen und Eigenschaften der trigonometrischen Umkehrfunktionen verweisen wir auf die einschlägige Literatur.

## 4.4 Grenzwerte von Funktionen

Wir wollen nun die Fragestellung untersuchen, wie sich die Funktionswerte  $f(x)$  einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  verhalten, wenn sich das Argument  $x$  einem fest vorgegebenen Wert  $a$  im Definitionsbereich  $D$  annähert. Hierbei kann der Definitionsbereich  $D$  wie folgt vorliegen:

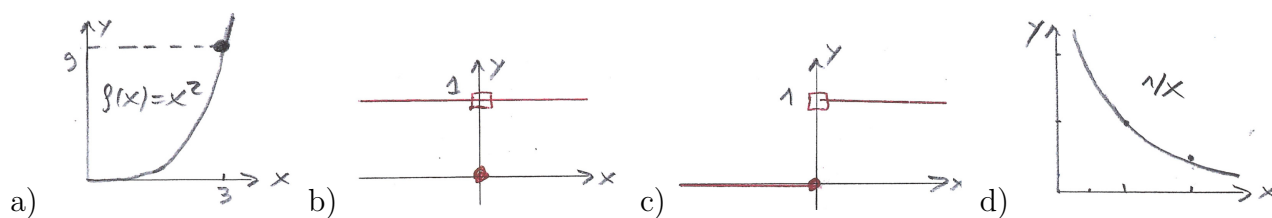


Abbildung 4.4: Funktionsverläufe zu den Grenzwertbetrachtungen der vier Beispiele von Abschnitt 4.5.

- offen, z.B.  $(a, b)$
- halboffen, z.B.  $(a, b]$
- abgeschlossen, z.B.  $[a, b]$

Wir bezeichnen mit  $\bar{D}$  den Abschluss von  $D$ . Es sei nun  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in \bar{D}$ . Wir nennen  $y \in \mathbb{R}$  einen Grenzwert der Funktion  $f$  in  $a$ , wenn für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$  mit  $a_n \neq a$  und  $a_n \rightarrow a$  auch  $f(a_n) \rightarrow y$  gilt. Hierbei verwenden wir die Schreibweise:

$$y = \lim_{x \rightarrow a} f(x). \quad (4.21)$$

Hierbei ist zu beachten, dass auch  $y = \pm\infty$  als uneigentliche Grenzwerte erlaubt sind.

## 4.5 Beispiele

Zur Vertiefung betrachten wir die folgenden vier Beispiele:

- a) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x^2$  und  $a = 3$ , wie in Abb. 4.4a) dargestellt. Für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow 3$  gilt

$$f(a_n) = a_n^2 \rightarrow 3^2 = 9, \quad (4.22)$$

somit erhalten wir das Ergebnis:

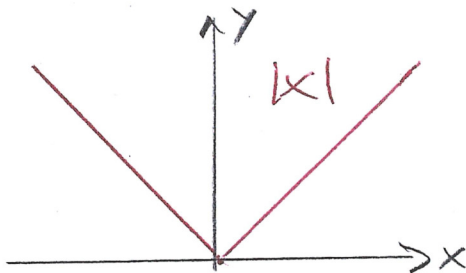
$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9. \quad (4.23)$$

- b) Es sei nun  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der abschnittsweisen Definition:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

und  $a = 0$ , siehe Abb. 4.4b). Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, also  $a_n \rightarrow 0$ , mit  $a_n \neq 0$ . Dann gilt  $f(a_n) = 1 \rightarrow 1$  und damit  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ . Daher gilt hier

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0 = f(0). \quad (4.25)$$

Abbildung 4.5: Verlauf der Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ .

c) Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der abschnittsweise Definition

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

und  $a = 0$  wie in Abb. 4.4c) dargestellt. Für die Nullfolge  $a_n = -1/n \rightarrow 0$  gilt dann  $f(a_n) = 0 \rightarrow 0$ , während für die Nullfolge  $a_n = 1/n \rightarrow 0$  gilt  $f(a_n) = 1 \rightarrow 1 \neq 0$ . Daher existiert kein eindeutiger Grenzwert von  $f(x)$  im Punkte  $a = 0$ .

d) Es sei  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1/x$ . Dann folgt aus dem Graphen von Abb. 4.4d) unmittelbar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0. \quad (4.27)$$

## 4.6 Definition

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $a \in D$ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (4.28)$$

Demnach muss der Grenzwert der Funktion  $f(x)$  im Limes  $x \rightarrow a$  existieren und mit dem Funktionswert  $f(a)$  übereinstimmen.  $f$  heißt stetig auf  $D$ , wenn sie in jedem Punkt in  $D$  stetig ist.

## 4.7 Beispiele

Zur Illustration betrachten wir verschiedene Beispiele:

a) Jede Polynomfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (4.29)$$

ist stetig.

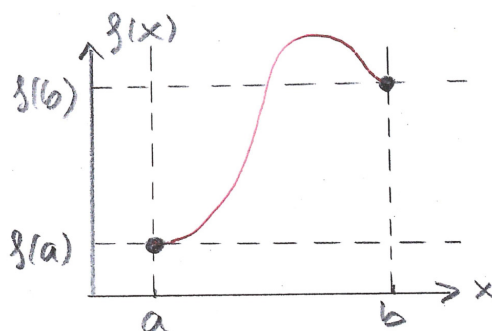


Abbildung 4.6: Graphische Illustration des Zwischenwertsatzes.

b) Jede rationale Funktion

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.30)$$

ist stetig, wobei  $f, g$  Polynomfunktionen sind.

c) Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit (4.24) ist nicht stetig, da  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$  ist, siehe Abb. 4.4b).

d) Die Betragsfunktion  $f(x) = |x|$ , deren Verlauf in Abb. 4.5 dargestellt wird, ist für  $x \neq 0$  stetig. Es stellt sich die Frage, ob  $f(x)$  auch in  $x = 0$  stetig ist. Dies ist der Fall, da für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow 0$  gilt: Aufgrund der Grenzwertsätze für Folgen, siehe Abschnitt 2.5 muß dann auch  $|a_n| \rightarrow |0| = 0$ . Somit erhalten wir das Ergebnis:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ .

e) Die Exponentialfunktion, die Sinus- und die Kosinusfunktion sind stetig. Im allgemeinen sind alle Funktionen stetig, wenn diese wie in Abschnitt 3.4 durch Reihen definiert werden.

## 4.8 Zwischenwertsatz

Eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  an. Dieser Zwischenwertsatz wird anhand von Abb. 4.6 verdeutlicht.



# Kapitel 5

## Differenzierbarkeit und Ableitung von Funktionen

Von ganz besonderer Bedeutung in der Physik sind die Ableitungen einer Funktion. Das wird schon deutlich bei einem so elementaren Begriff wie der Geschwindigkeit, die die zeitliche Ableitung des Ortes darstellt.

### 5.1 Sekante

Wir betrachten die Sekante  $S_{a,x}$  von  $f$  durch die beiden Punkte  $(a, f(a))$  und  $(x, f(x))$ , siehe Abb. 5.1. Sie besitzt als Steigung den Differenzenquotienten:

$$\phi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Diese Steigung ist ein Maß für das Wachstum der Funktionswerte von  $f$  auf dem Weg von  $a$  nach  $x$ .

### 5.2 Definition

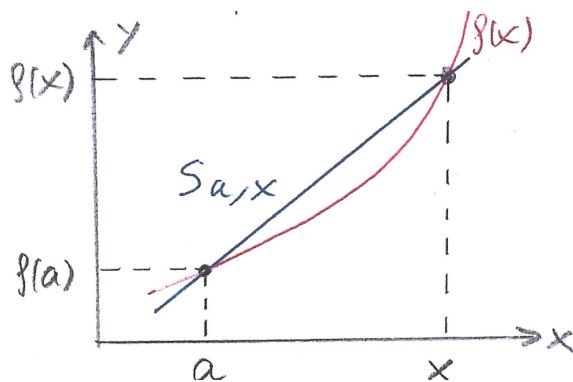
Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in D$ . Die Funktion  $f$  heißt stetig differenzierbar in  $a$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi_a(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (5.2)$$

existiert. In diesem Fall nennen wir den Grenzwert die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$ :

$$f'_a(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (5.3)$$

Wir nennen die Funktion  $f$  differenzierbar auf  $D$ , wenn sie in jedem Punkt von  $D$  differenzierbar ist.

Abbildung 5.1: Sekante  $S_{a,x}$  durch zwei Punkte der Funktion  $f(x)$ .

### 5.3 Beispiele

a) Es sei  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Die Sekantensteigung lautet dann

$$\phi_a(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}. \quad (5.4)$$

Wie berechnet man von ihr den Grenzwert  $x \rightarrow a$ ? Hierzu lässt sich die Polynomdivision anwenden, bei der man das Polynom  $x^n - a^n$  explizit durch das Polynom  $x - a$  dividiert:

$$\begin{aligned} (x^n - a^n) : (x - a) &= x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1} \\ \underline{x^n - ax^{n-1}} & \\ ax^{n-1} - a^n & \\ \underline{ax^{n-1} - a^2x^{n-2}} & \\ a^2x^{n-2} - a^n & \\ \underline{a^2x^{n-2} - a^3x^{n-3}} & \\ a^3x^{n-3} - a^n & \\ & \vdots \\ a^{n-1}x - a^n & \\ \underline{a^{n-1}x - a^n} & \\ 0 & \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zur Kontrolle machen wir noch die Probe:

$$\begin{aligned} &(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-1}) \cdot (x - a) \\ &= x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x \\ &\quad - ax^{n-1} - a^2x^{n-2} - \dots - a^{n-1}x - a^n \\ &= x^n - a^n \end{aligned} \quad (5.6)$$

Für die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $a$  ergibt sich damit

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}) = na^{n-1}. \quad (5.7)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Tabelle 5.1: Tabelle von Ableitungen wichtiger Funktionen, die sich mit den Rechenregeln von Abschnitt 5.5 herleiten lassen.

- b) Für die Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$  mit  $a > 0$  erhalten wir entsprechend die Sekantensteigung

$$\phi_a(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \quad (5.8)$$

und damit die Ableitung

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \quad (5.9)$$

- c) Als Verallgemeinerung von a) und b) betrachten wir nun die Potenzfunktion  $f(x) = x^\alpha$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  und erhalten für deren Ableitung:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \quad (5.10)$$

- d) Und schließlich bilden wir noch die Ableitung eines Polynoms

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad (5.11)$$

was zum Ergebnis

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) a_{l+1} x^l \quad (5.12)$$

führt. Hierbei haben wir im letzten Schritt noch die Resummation  $l = k - 1$  durchgeführt.

## 5.4 Wichtige Ableitungen

Wir fassen nun die Ableitungen wichtiger Funktionen in der Tabelle 5.1 zusammen. Beispielsweise ergibt sich die Ableitung der Exponentialfunktion über deren Darstellung als Reihe, siehe Abschnitt 3.4:

$$(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^x. \quad (5.13)$$

Hier wurde im letzten Schritt die Resummation  $m = n - 1$  vorgenommen. Analog geht man bei der Ableitung von  $\cos x$  und  $\sin x$  vor, siehe Abschnitt 3.4. Weitere Ableitungen von Funktionen in der Tabelle 5.1 lassen sich mit Hilfe von Rechenregeln berechnen, auf die wir im folgenden Abschnitt eingehen.

## 5.5 Rechenregeln

Es seien  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Dann gelten für die Berechnung der Ableitung die folgenden Rechenregeln:

a) Summenregel:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad (5.14)$$

b) Faktorregel:

$$(cf)'(a) = cf'(a), \quad c \in \mathbb{R} \quad (5.15)$$

c) Produktregel:

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad (5.16)$$

d) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}, \quad g(a) \neq 0 \quad (5.17)$$

e) Kettenregel:

$$f(g(a))' = f'(g(a))g'(a) \quad (5.18)$$

Wir wenden diese Rechenregeln nun bei einigen Beispielen an.

## 5.6 Beispiele

a) Für die Funktion

$$f(x) = 3 \tan x + x^3 = 3 \frac{\sin x}{\cos x} + x^3 \quad (5.19)$$

muss man zur Ableitung die Summen-, die Faktor- und die Quotientenregel anwenden:

$$f'(x) = 3 \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} + 3x^2 = 3 \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} + 3x^2 = 3 \frac{1}{\cos^2 x} + 3x^2. \quad (5.20)$$

Hier wurde der trigonometrische Pythagoras angewandt:  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ . Als Ergebnis erhalten wir unter anderem

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (5.21)$$

was wir schon in Tabelle 5.1 vorweggenommen hatten.

b) Zur Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2} \quad (5.22)$$

ist die Kettenregel anzuwenden:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad (5.23)$$

## 5.7 Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und es sei  $f^{-1}: S \rightarrow D$  deren Umkehrfunktion. Dann gilt nach Abschnitt 4.6

$$f^{-1}(f(a)) = a, \quad a \in D. \quad (5.24)$$

Die Differentiation der beiden Seiten ergibt mit Hilfe der Kettenregel:

$$f^{-1'}(f(a)) \cdot f'(a) = 1. \quad (5.25)$$

Löst man nach der Ableitung der Umkehrfunktion auf

$$f^{-1'}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}, \quad (5.26)$$

so folgt mit der Substitution  $b = f(a)$  bzw.  $a = f^{-1}(b)$  schließlich

$$f^{-1'}(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad (5.27)$$

Das bedeutet, dass die Ableitung der Umkehrfunktion durch das Reziproke der Ableitung der Funktion gegeben ist.

## 5.8 Beispiele

Wir betrachten nun zwei konkrete Beispiele für die Ableitung der Umkehrfunktion.

a) Zunächst berechnen wir die Ableitung des Logarithmus und verwenden hierbei (5.13):

$$\begin{array}{ccc}
 y = f(x) = e^x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & x = f^{-1}(y) = \ln y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f'(x) = e^x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}
 \end{array}$$

Das Ergebnis  $(\ln y)' = 1/y$  hatten wir schon in Tabelle 5.1 vorweggenommen.

b) Anschließend wenden wir uns der Ableitung der Arkustangensfunktion zu und verwenden dabei (5.21):

$$\begin{array}{ccc}
 y = f(x) = \tan x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & x = f^{-1}(y) = \arctan x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + y^2}
 \end{array}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile benutzt:

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} \quad \Rightarrow \quad (1 + \tan^2 y) \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

Auch dieses Ergebnis wurde schon in der Tabelle 5.1 aufgelistet.

## 5.9 Höhere Ableitungen

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Intervall  $D$  differenzierbar. Ist die Funktion  $f'$  in  $a \in D$  selbst differenzierbar, so bezeichnen wir ihre Ableitung an der Stelle  $a$  mit  $f''(a)$ . Existiert  $f''(x)$  für jedes  $x \in D$ , so wird die Funktion  $f''(x)$  als zweite Ableitung von  $f$  auf  $D$  bezeichnet. Im allgemeinen Fall wird die  $n$ -te Ableitung mit  $f^{(n)}(x)$  bezeichnet.

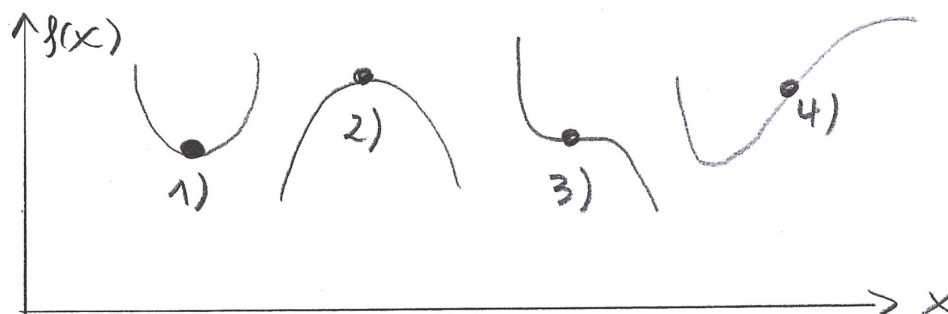


Abbildung 5.2: Illustration verschiedener kritischer Punkte.

## 5.10 Kritische Punkte und Extremwerte

Die Ableitung einer Funktion  $f(x)$  hat die Bedeutung der Steigung der Tangente im Punkt  $x$ . Ein kritischer Punkt einer Funktion ist ein Punkt mit horizontaler Tangente:

$$f'(x_0) = 0 \quad \iff \quad x_0 \text{ ist kritischer Punkt} \quad (5.28)$$

Kritische Punkte lassen sich wie folgt klassifizieren:

- 1)  $f''(x_0) > 0$ : Minimum
- 2)  $f''(x_0) < 0$ : Maximum
- 3)  $f''(x_0) = 0$  und  $f'''(x_0) \neq 0$ : Sattelpunkt

Darüber hinaus ist für eine Kurvendiskussion noch wichtig:

- 4)  $f'(x_0) \neq 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ : Wendepunkt

All diese Fälle sind in Abb. 5.2 graphisch illustriert.



# Kapitel 6

## Taylor-Reihe

Sehr oft möchte man den Wert einer gegebenen Funktion  $y = f(x)$  in der Umgebung um  $x_0$  gar nicht ganz genau wissen, sondern ist schon mit einer ungefähren Angaben zufrieden. Wenn die Funktion  $y = f(x)$  am Punkt  $x_0$  mehrfach stetig differenzierbar ist, dann kann man sie mit wenig Aufwand in der Umgebung um  $x_0$  systematisch immer besser nähern. Hierzu bedient man sich der sogenannten Taylor-Reihe.

### 6.1 Tangente

Ist  $f(x)$  stetig differenzierbar, so ist die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkte  $(x_0, f(x_0))$  durch das folgende Polynom erster Ordnung gegeben:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (6.1)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Approximation der Funktion  $f$  in der unmittelbaren Umgebung um  $x_0$ , siehe Abb. 6.1a). Im folgenden zeigen wir, wie man durch Hinzunahme weiterer Ableitungen von  $f$  an der Stelle  $x_0$  die Funktion  $f$  noch besser in der Umgebung um  $x_0$  annähern kann.

### 6.2 Herleitung

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -fach stetig differenzierbar, d.h. dass auch noch die  $n$ -te Ableitung stetig ist. Wir nähern nun  $f$  durch ein Polynom  $n$ -ter Ordnung an:

$$f(x) \approx P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (6.2)$$

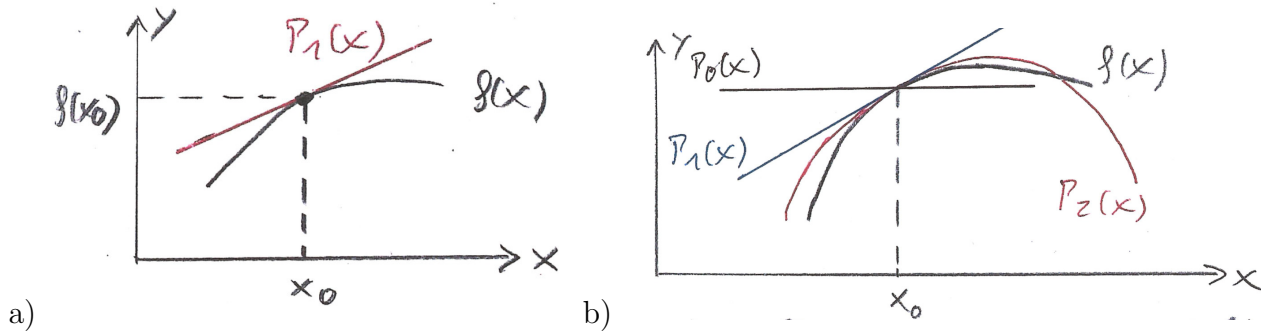


Abbildung 6.1: Approximation einer Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  durch a) eine Tangente (6.1) und Polynome verschiedener Ordnung (6.2).

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $a_n \in \mathbb{R}$ . Wir berechnen die jeweiligen Ableitungen

$$f'(x) \approx P'_n(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad (6.3)$$

$$f''(x) \approx P''_n(x) = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \quad (6.4)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) \approx P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot \dots \cdot 2a_n. \quad (6.5)$$

Dabei fordern wir, dass das Polynom  $P_n(x)$  die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  bestmöglich annähert. Daher setzen wir nun  $x = x_0$ :

$$f(x_0) \approx P_n(x_0) = a_0 \quad (6.6)$$

$$f'(x_0) \approx P'_n(x_0) = a_1 \quad (6.7)$$

$$f''(x_0) \approx P''_n(x_0) = 2a_2 \quad (6.8)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (6.9)$$

$$f^{(n)}(x_0) \approx P_n^{(n)}(x_0) = n! a_n. \quad (6.10)$$

Demnach lautet das gesuchte Polynom

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (6.11)$$

Je größer  $n$  wird, um so genauer approximiert das Polynom  $P_n(x)$  die Funktion  $f(x)$  in der Umgebung von  $x = x_0$ , siehe Abb. 6.1b). Bildet man den Limes  $n \rightarrow \infty$ , so folgt hieraus die Taylor-Reihe von  $f$  mit dem Entwicklungspunkt  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (6.12)$$

Man beachte, dass die Taylor-Reihe nicht immer konvergiert. Und falls die Taylor-Reihe von  $f$  konvergiert, dann konvergiert sie nicht notwendig gegen  $f$ .

## 6.3 Exponentialfunktion

Für die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  und den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  erhalten wir die folgenden Werte für die einzelnen Ableitungen:

$$f(x) = e^x \quad f(0) = 1, \quad (6.13)$$

$$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1, \quad (6.14)$$

$$f''(x) = e^x \quad f''(0) = 1, \quad (6.15)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1. \quad (6.16)$$

Die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion lautet daher:

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (6.17)$$

Sie wurde schon in Abschnitt 3.4 eingeführt. Entsprechend lässt sich zeigen, dass auch die im Abschnitt 3.4 genannten Reihen für  $\sin x$  und  $\cos x$  deren Taylor-Reihen sind.

## 6.4 Geometrische Reihe

Wir betrachten entsprechend die Funktion  $f(x) = 1/(1-x)$  und den Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad f(0) = 1, \quad (6.18)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad f'(0) = 1, \quad (6.19)$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad f''(0) = 2, \quad (6.20)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (6.21)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \quad f^{(n)}(0) = n!. \quad (6.22)$$

Demnach erhalten wir für die entsprechende Taylor-Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (6.23)$$

Es handelt sich hierbei um die geometrische Reihe, die schon in Abschnitt 3.2 behandelt wurde. Sie konvergiert für  $|x| < 1$ , divergiert aber für  $|x| > 1$ .

## 6.5 Regel von de l'Hôpital

Manchmal hat man mit Funktionen von der Form

$$\frac{\sin x}{x} \quad (6.24)$$

zu tun. Diese Funktion ist an der Stelle  $x = 0$  nicht definiert, da sowohl der Zähler als auch der Nenner im Limes  $x \rightarrow 0$  verschwindet und unklar ist, welchen Wert man dem resultierenden Ausdruck „0/0“ zuweisen soll. Falls es möglich sein sollte, möchte man daher diese Funktion an der Stelle  $x = 0$  durch den Wert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (6.25)$$

stetig ergänzen. Hierzu kann man die Regel von de l'Hôpital verwenden:

Die Funktionen  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf demselben Bereich  $D$  definiert und es gelte  $f(a) = g(a) = 0$  für  $a \in D$ . Wenn beide Funktionen im Punkte  $a \in D$  differenzierbar sind mit  $g'(a) \neq 0$ , dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}, \quad (6.26)$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Zum Beweis der Regel von de l'Hôpital kann man die Taylor-Reihen der beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  verwenden, falls diese existieren:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots}{g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \dots}{g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + \dots} = \frac{f'(a)}{g'(a)}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Aus diesem Beweis der Regel von de l'Hôpital mit der Taylor-Reihe geht hervor, dass auch die folgende Verallgemeinerung gilt:

Es seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $D$  definierte Funktionen mit der Eigenschaft

$$f(a) = g(a) = 0, \quad (6.28)$$

$$f'(a) = g'(a) = 0, \quad (6.29)$$

⋮

$$f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0. \quad (6.30)$$

Wenn beide Funktionen im Punkt  $a \in D$   $n$ -fach stetig differenzierbar sind und  $g^{(n)}(a) \neq 0$  ist, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}, \quad (6.31)$$

falls der letzte Grenzwert existiert.

Für das oben genannte Beispiel gilt also  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = x$  mit  $f'(x) = \cos x$  und  $g'(x) = 1$ . Mit  $f(0) = g(0) = 0$  und  $g'(0) \neq 1$  sind die Voraussetzungen für die Regel von de l'Hôpital erfüllt und es folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \quad (6.32)$$

Ein Beispiel für die verallgemeinerte Regel von de l'Hôpital lautet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)''}{(x^2)''} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \sin x \cos x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{2} = 1. \quad (6.33)$$

## 6.6 Identitätssatz für Potenz-Reihen

Hat man ein- und dieselbe Funktion in zwei Potenz-Reihen vorliegen, gilt also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x - x_0)^n, \quad (6.34)$$

so folgt hieraus, dass die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten übereinstimmen:

$$\alpha_n = \beta_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.35)$$

## 6.7 Anwendung für Potenz-Reihen

Im folgenden Beispiel lernen wir einen natürlichen Zugang zur Taylor-Reihe der Exponentialfunktion kennen. Hierzu betrachten wir ein naives Wachstumsproblem in Form eines Anfangswertproblems, das aus der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = c x(t), \quad c \in \mathbb{R} \quad (6.36)$$

und aus der Anfangsbedingung

$$x(0) = x_0 \quad (6.37)$$

besteht. Zur Lösung des Anfangswertproblems machen wir einen Ansatz in Form einer Potenz-Reihe

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n. \quad (6.38)$$

Für die Ableitung folgt dann

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n t^{n-1} = \sum_{n'=0}^{\infty} (n'+1) \alpha_{n'+1} t^{n'}, \quad (6.39)$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitution  $n' = n - 1$  durchführen. Einsetzen von (6.38) und (6.39) in die Differentialgleichung (6.36) führt auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c\alpha_n t^n. \quad (6.40)$$

Aufgrund des Identitätssatzes für Potenz-Reihen von Abschnitt 6.6 können wir die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten auf der linken und der rechten Seite gleich setzen:

$$(n+1)\alpha_{n+1} = c\alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.41)$$

Wir erhalten damit für die Entwicklungskoeffizienten die Rekursionsbeziehung

$$\alpha_{n+1} = \frac{c}{n+1} \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (6.42)$$

Setzen wir hierin sukzessive  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  ein, erhalten wir unmittelbar

$$\alpha_1 = c\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{c}{2}\alpha_0, \quad \alpha_3 = \frac{c}{6}\alpha_0, \quad \alpha_4 = \frac{c}{24}\alpha_0. \quad (6.43)$$

Durch explizites Auswerten von (6.42) kann man also nur endlich viele Koeffizienten  $\alpha_n$  bestimmen. Andererseits benötigt man zur Auswertung der Potenzreihe (6.38) unendlich viele Koeffizienten  $\alpha_n$ . Dieses Problem lässt sich mit Hilfe der vollständigen Induktion lösen. Es handelt sich hierbei um eine mathematische Beweismethode, nach der eine Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen wird, die größer oder gleich einem bestimmten Startwert sind. Ausgangspunkt für einen Beweis mit vollständiger Induktion ist die Induktionsaussage. Motiviert durch (6.43) formulieren wir die folgende Induktionsaussage:

$$\alpha_n = \frac{c^n}{n!} \alpha_0. \quad (6.44)$$

Im Induktionsanfang ist zu zeigen, dass die Aussage für die kleinst mögliche Zahl gilt. Wir bemerken hierzu in unserem Fall, dass (6.44) in der Tat für die kleinst mögliche Zahl  $n = 0$  eine wahre Aussage darstellt. Im Induktionsschritt zeigen wir nun, dass aus der Induktionsaussage für  $n$  die entsprechende Induktionsaussage für  $n + 1$  folgt. Hierzu setzen wir die Induktionsaussage für  $n$  aus (6.44) in die Rekursionsbeziehung (6.42) ein und erhalten:

$$\alpha_{n+1} = \frac{c}{n+1} \frac{c^n}{n!} \alpha_0 = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \alpha_0. \quad (6.45)$$

In der Tat entspricht (6.45) der Induktionsaussage (6.44), wenn man  $n$  durch  $n + 1$  ersetzt. Damit ist die vollständige Induktion abgeschlossen und die Induktionsaussage (6.44) ist für alle natürliche Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$  gezeigt. Aufgrund von (6.38) und (6.44) ist die Lösung der Differentialgleichung (6.36) von der Form

$$x(t) = \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} t^n. \quad (6.46)$$

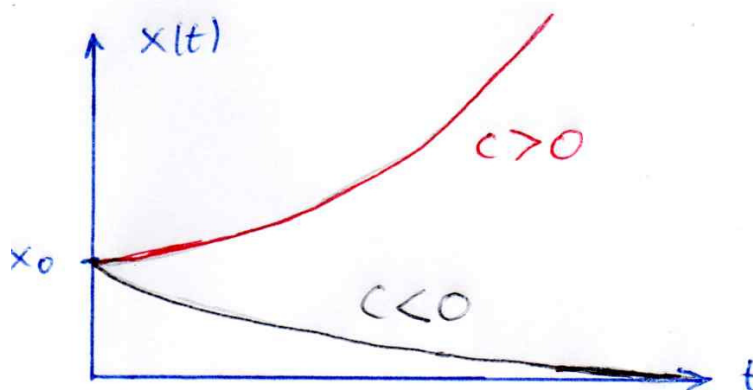


Abbildung 6.2: Die Infektionszahlen mit dem Coronavirus (6.49) nehmen für positiven (negativen) Wachstumsfaktor  $c$  exponentiell zu (ab).

Den noch unbekanntem Koeffizienten  $\alpha_0$  in (6.46) können wir schließlich durch die Anfangsbedingung (6.37) festlegen:

$$x(0) = \alpha_0 = x_0. \quad (6.47)$$

Nach (6.46) und (6.47) erhalten wir als Lösung des Anfangswertproblems (6.36), (6.37):

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!}, \quad (6.48)$$

was aufgrund der Taylor-Reihe (6.17) auf eine Exponentialfunktion führt:

$$x(t) = x_0 e^{ct}. \quad (6.49)$$

In der Tat löst dieses Ergebnis die Differentialgleichung (6.36) und erfüllt die Anfangsbedingung (6.37).

Das hier diskutierte Wachstumsproblem lässt sich wie folgt auf die Infektionszahlen mit dem Coronavirus anwenden. Hierzu ist die Zahl der Neuinfektionen zum Zeitpunkt  $t$  mit der Größe  $x(t)$  zu identifizieren. Es hängt dann vom Wachstumsfaktor  $c$  ab, wie sich die Infektionszahlen  $x(t)$  im Laufe der Zeit verhalten. Im Falle von  $c > 0$  ( $c < 0$ ) nehmen die Infektionszahlen (6.49) im Laufe der Zeit exponentiell zu (ab), siehe Fig. 6.2. Allerdings wird im hier diskutierten Wachstumsproblem angenommen, dass der Wachstumsfaktor  $c$  zeitlich konstant ist und sich daher nicht mit der Zeit  $t$  ändert. Dies ist eine sehr grobe Vereinfachung. In Wirklichkeit stellt sich heraus, dass der Wachstumsfaktor  $c$  eine komplizierte Dynamik aufweist, die zum Teil empirisch bestimmt werden muss. Dies erschwert dann natürlich die Lösung des zu (6.36), (6.37) analogen Anfangswertproblems und ist Gegenstand der aktuellen Forschung.



# Kapitel 7

## Integralrechnung

Wir werden nun die Integration als Umkehroperation der Differentiation kennenlernen. Es zeigt sich, dass man hierzu vom Flächeninhalt unterhalb einer Funktion auszugehen hat. Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Das Ziel besteht nun darin, den Flächeninhalt  $I$  zu berechnen, den der Graph von  $f$  mit der  $x$ -Achse einschließt, siehe Abb. 7.1.

### 7.1 Integrierbarkeit und Integral

Hierzu zerlegen wir zunächst das Intervall  $[a, b]$ . Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann heißt  $Z = (x_0, \dots, x_n)$  mit  $n \geq 1$  eine Zerlegung des Intervalls, falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (7.1)$$

Dann lässt sich der gesuchte Flächeninhalt durch eine Obersumme nach oben und durch eine Untersumme nach unten abschätzen, siehe Abb. 7.2.

Hierzu müssen wir aber zunächst einige Begrifflichkeiten klären. Es sei  $M$  eine nichtleere Menge in  $\mathbb{R}$ , also  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ . Dann ist  $S \in \mathbb{R}$  obere (untere) Schranke von  $M$ , falls  $x \leq S$  ( $x \geq S$ ) für alle  $x \in M$ . Beachte hierzu, dass  $S$  nicht unbedingt Element der Menge  $M$  sein muss. Offenbar ist  $S$  nicht eindeutig. Als Beispiel betrachten wir das Intervall  $[1, 2]$ . Alle  $S \leq 1$  sind eine untere Schranke, während alle  $S \geq 2$  eine obere Schranke sind. Um nun den Begriff einer oberen (unteren) Schranke eindeutig zu machen, führt man ein:

- Kleinste obere Schranke von  $M$  (supremum):  $\sup\{M\}$ ,
- Größte untere Schranke von  $M$  (infimum):  $\inf\{M\}$ .

Beispielsweise gilt  $\sup\{[1, 2]\} = 2$  und  $\inf\{[1, 2]\} = 1$ .

Mit diesen Begrifflichkeiten lässt sich nun die Obersumme (Untersumme) von  $f$  bezüglich einer

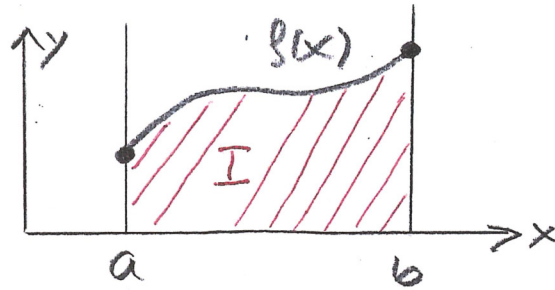


Abbildung 7.1: Flächeninhalt  $I$  zwischen dem Graphen  $f$  und der  $x$ -Achse.

Zerlegung  $Z$  wie folgt definieren:

$$\bar{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad (7.2)$$

$$\underline{S}(f, Z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \quad (7.3)$$

Der konkrete Wert für diese Obersumme (Untersumme) hängt dann aber noch von der gewählten Zerlegung  $Z$  ab. Daher definiert man nun das Oberintegral  $\bar{I}(f)$  bzw. das Unterintegral  $\underline{I}(f)$  dadurch, dass man eine Zerlegung  $Z$  findet, bei der die Obersumme  $\bar{S}(f, Z)$  bzw. die Untersumme  $\underline{S}(f, Z)$  möglichst klein bzw. groß ist:

$$\bar{I}(f) = \inf \{ \bar{S}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}, \quad (7.4)$$

$$\underline{I}(f) = \sup \{ \underline{S}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \}. \quad (7.5)$$

Demnach ist  $\bar{I}$  bzw.  $\underline{I}$  das Infimum bzw. Supremum aller Obersummen bzw. Untersummen. Und es gilt offenbar

$$\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f). \quad (7.6)$$

Daher definiert man nun das Integral wie folgt:  $f$  ist integrierbar auf  $[a, b]$ , falls

$$\underline{I}(f) = \bar{I}(f). \quad (7.7)$$

Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{I}(f) = \underline{I}(f) \in \mathbb{R} \quad (7.8)$$

das Integral von  $f$  auf dem Intervall  $[a, b]$ .

## 7.2 Beispiel

Es sei  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$ . Wir betrachten nun eine äquidistante Zerlegung von  $[0, 1]$ :

$$Z_n = (x_0, x_1, \dots, x_n) = \left( 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right) \quad (7.9)$$

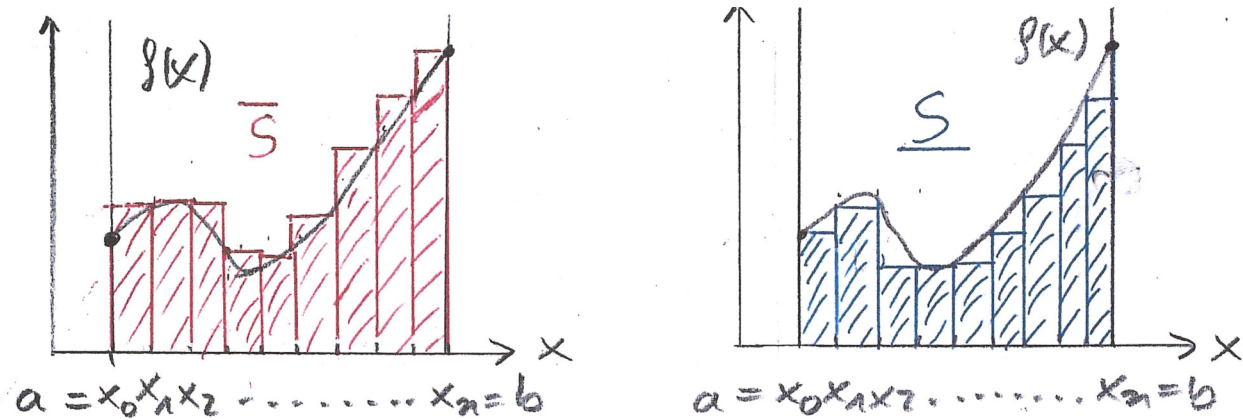


Abbildung 7.2: Obersumme  $\bar{S}$  und Untersumme  $\underline{S}$  zur Abschätzung des Flächeninhalts  $I$ .

mit  $n$  äquidistanten Teilintervallen  $[x_{i-1}, x_i] = [(i-1)/n, i/n]$  mit  $i = 1, \dots, n$ , siehe Abb.7.3. Da die Funktion  $f(x)$  monoton wachsend ist, gilt

$$\inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}, \quad (7.10)$$

$$\sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_i = \frac{i}{n}. \quad (7.11)$$

Demnach erhalten wir für die Untersumme:

$$\underline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1). \quad (7.12)$$

Zur weiteren Auswertung wird die Gaußsche Summe benötigt:

$$S_n = \sum_{i=1}^n i. \quad (7.13)$$

Für deren Berechnung betrachten wir die erzeugende Funktion

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n i x^{i-1}, \quad (7.14)$$

da deren Auswertung an der Stelle  $x = 1$  die gesuchte Gaußsche Summe ergibt:

$$S_n = S_n(1). \quad (7.15)$$

Die Funktion (7.14) lässt sich nun als Ableitung der geometrischen Partialsumme (3.4) darstellen:

$$S_n(x) = \left( \sum_{i=1}^n x^i \right)' = \left( x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)'. \quad (7.16)$$

Hierbei wurde der Summationsindex gemäß  $k = i - 1$  verschoben. Daher erhalten wir aus (3.7) und (7.16)

$$S_n(x) = \left( x \frac{1-x^n}{1-x} \right)'. \quad (7.17)$$

Die Anwendung der Produkt- und Quotientenregel der Differentiation gemäß (5.16) und (5.17) führt dann auf

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} + x \frac{1-nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}. \quad (7.18)$$

Die aufgrund von (7.15) notwendige Auswertung von (7.18) an der Stelle  $x = 1$  führt auf den Fall „0/0“ und erfordert daher die Anwendung der Regel von de l'Hôpital (6.26):

$$S_n = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(1-x^n)'}{(1-x)'} + x \frac{[1-nx^{n-1} + (n-1)x^n]'}{[(1-x)^2]'} \right\}, \quad (7.19)$$

was schließlich mit (7.13) auf die Gaußsche Summenformel führt:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2}(n+1). \quad (7.20)$$

Damit ergibt sich die Untersumme (7.12) zu

$$\underline{S}(f, Z_n) = \frac{1}{n^2} \left[ \frac{n}{2}(n+1) - n \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \quad (7.21)$$

Entsprechend ergibt sich die Obersumme zu

$$\overline{S}(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \quad (7.22)$$

Auch hier wurde wieder die Gaußsche Summenformel (7.20) verwendet. Es gilt demnach offenbar:

$$\underline{S}(f, Z_n) \leq \overline{S}(f, Z_n). \quad (7.23)$$

Andererseits gilt aber auch nach (7.4)–(7.6)

$$\underline{S}(f, Z_n) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{S}(f, Z_n). \quad (7.24)$$

Nun beachten wir (7.21), (7.22) und führen den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durch:

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, Z_n) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(f, Z_n) = \frac{1}{2}. \quad (7.25)$$

Aufgrund des Einschachtelungssatzes für Folgen von Abschnitt 2.6 folgt dann

$$\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{2}. \quad (7.26)$$

Damit haben wir das folgende Ergebnis erzielt:

$$\int_0^1 x \, dx = \underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \frac{1}{2}. \quad (7.27)$$

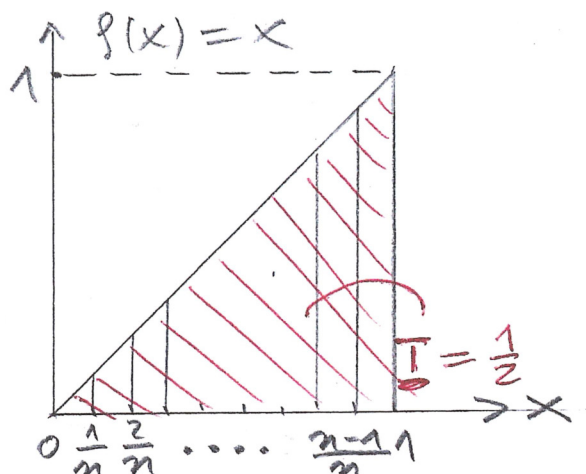


Abbildung 7.3: Berechnung des Flächeninhalts unterhalb der Funktion  $f(x) = x$  mit Hilfe einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls  $[0, 1]$ .

## 7.3 Integrationsregeln

Es seien  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei integrierbare Funktionen sowie  $c, d \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Funktionen  $cf + dg$  integrierbar und es gelten

a) Linearität:

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)] dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx. \quad (7.28)$$

b) Additivität:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7.29)$$

Betrachten wir als Beispiel das folgende konkrete Integral:

$$I = \int_{-3}^4 |x| dx = \int_{-3}^0 (-x) dx + \int_0^4 x dx, \quad (7.30)$$

so können wir das Ergebnis von Abschnitt 7.2 einsetzen:

$$I = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}. \quad (7.31)$$

c) Richtungsänderung:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (7.32)$$

Auch hierfür erwähnen wir ein illustratives Beispiel:

$$\int_a^a f(x) dx = - \int_a^a f(x) dx = 0. \quad (7.33)$$

Ferner bemerken wir, dass stetige Funktionen integrierbar sind.

## 7.4 Stammfunktion

Es sei  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ferner sei  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft  $F' = f$ . Dann heißt  $F$  Stammfunktion von  $f$ . Beispielsweise gilt:

$$f(x) = x^2, \quad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C. \quad (7.34)$$

Beachte, dass die Integrationskonstante  $C$  essentieller Bestandteil der Stammfunktion ist und nicht weggelassen werden darf.

## 7.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Es sei  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx. \quad (7.35)$$

Dann ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ .

- b) Je zwei Stammfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  von  $f$  unterscheiden sich nur um eine Konstante.  
c) Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ , so gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (7.36)$$

Wir beweisen nun diese Aussagen im Einzelnen.

Ad a) Gemäß der Definition einer Stammfunktion in Abschnitt 7.4 ist zu zeigen, dass  $F'(y) = f(y)$  gilt. Es stellt sich daher die Frage, wie man die Ableitung  $F'(y)$  berechnet. Hierzu wenden wir zunächst die Definition der Ableitung (5.3) auf die Funktion (7.35) an:

$$F'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left\{ \int_a^{y+\Delta y} f(x)dx - \int_a^y f(x)dx \right\}. \quad (7.37)$$

Anschließend verwenden wir die Additivität der Integration (7.29) sowie Abb. 7.4 und erhalten:

$$F'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} f(x)dx = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} f(y)\Delta y = f(y). \quad (7.38)$$

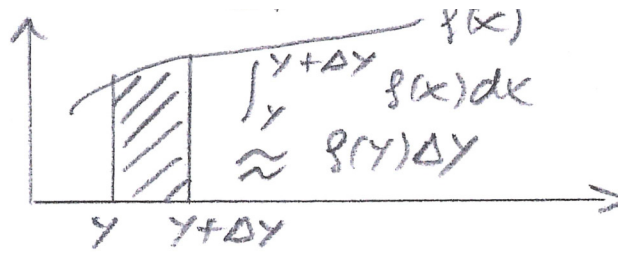


Abbildung 7.4: Illustration der Approximation  $\int_y^{y+\Delta y} f(x)dx \approx f(y)\Delta y$ .

Ad b) Wenn  $F_1$  und  $F_2$  Stammfunktionen von  $f$  sind, so gilt

$$F_1' = f, \quad F_2' = f. \quad (7.39)$$

Demnach folgt dann für die Differenz  $F_1 - F_2$  die Eigenschaft

$$(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0, \quad (7.40)$$

d.h. die Ableitung von  $(F_1 - F_2)(x)$  verschwindet für alle  $x \in [a, b]$ . Demnach muss gelten:

$$(F_1 - F_2)(x) = \text{konst.} \quad (7.41)$$

Ad c) Aus a) wissen wir, dass  $F_1(y) = \int_a^y f(x)dx$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Aus b) folgt, dass jede beliebige Stammfunktion zu  $f$  gegeben ist durch

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx + C. \quad (7.42)$$

Werten wir  $F(y)$  für  $y = a$  aus, so folgt aufgrund von (7.33)

$$F(a) = C, \quad (7.43)$$

während die Auswertung für  $y = b$  ergibt:

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx + C, \quad (7.44)$$

so dass insgesamt folgt:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (7.45)$$

## 7.6 Bezeichnungen und Tabelle von Stammfunktionen

Wir führen nun die folgenden nützlichen Bezeichnungen ein. Es sei  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$  mit der Eigenschaft

$$\left[ F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \quad (7.46)$$

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x) = \int^x f(y)dy$
$x^\alpha$	$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$
$e^x$	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln  x  + C$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x + C$

Tabelle 7.1: Tabelle von Integralen wichtiger Funktionen.

Dann heißt  $\int^y f(x)dx$  unbestimmtes Integral, während man  $\int_a^b f(x)dx$  als bestimmtes Integral bezeichnet. Eine Reihe von wichtigen Stammfunktionen ist in Tabelle 7.1 aufgelistet, vgl. die entsprechende Tabelle 5.1 von Ableitungen wichtiger Funktionen. Sie lassen sich mit Hilfe von nützlichen Integrationsmethoden herleiten, die im Folgenden zusammengestellt werden.

## 7.7 Partialbruchmethode

Oft trifft man auf Integrale über den Quotienten von Polynomen. Dann kann man sich mit einer Partialbruchzerlegung weiterhelfen. Der Einfachheit halber erläutern wir diese Methode beispielhaft anhand des unbestimmten Integrals

$$\int^y \frac{7x + 1}{x^2 - x - 2} dx. \quad (7.47)$$

Hierzu zerlegen wir den Quotienten von Polynomen in eine Summe einfacher Brüche

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots, \quad (7.48)$$

die man auch als Partialbrüche bezeichnet. Bildet man auf der rechten Seite den Hauptnenner, so müssen offenbar die Zahlen  $a, b, c, \dots$  mit den Nullstellen des Nennerpolynoms  $Q(x)$  übereinstimmen. In unserem Beispiel gibt es wegen  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$  die beiden Nullstellen  $a = 2$  und  $b = -1$ :

$$\frac{7x + 1}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}. \quad (7.49)$$

Bringen wir die beiden Partialbrüche auf den Hauptnenner, so folgt

$$7x + 1 = A(x + 1) + B(x - 2) = (A + B)x + A - 2B. \quad (7.50)$$

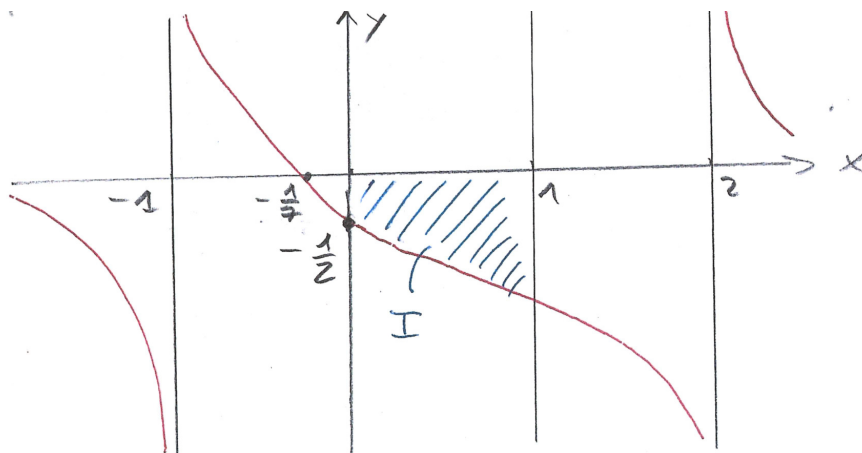


Abbildung 7.5: Illustration des in (7.55) berechneten Integrals als Flächeninhalts.

Durch Koeffizientenvergleich folgen die beiden Gleichungen

$$A + B = 7, \quad (7.51)$$

$$A - 2B = 1, \quad (7.52)$$

die die eindeutige Lösung  $A = 5$  und  $B = 2$  besitzen. Es folgt daher:

$$\int^y \frac{7x+1}{x^2-x-2} dx = 5 \int^y \frac{1}{x-2} dx + 2 \int^y \frac{1}{x+1} dx. \quad (7.53)$$

Die einzelnen Partialbrüche lassen sich problemlos integrieren und führen auf die Stammfunktion

$$\int^y \frac{7x+1}{x^2-x-2} dx = 5 \ln |y-2| + 2 \ln |y+1| + C. \quad (7.54)$$

Zur Illustration berechnen wir noch mit Hilfe von (7.54) ein bestimmtes Integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{7x+1}{x^2-x-2} dx &= \left[ 5 \ln |y-2| + 2 \ln |y+1| \right]_0^1 \\ &= 5 (\ln 1 - \ln 2) + 2 (\ln 2 - \ln 1) = -3 \ln 2. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Hierbei wurde (4.7) verwendet. Am negativen Resultat (7.55) lesen wir ab, dass Flächenstücke unterhalb der  $x$ -Achse negativ zählen. Man spricht deshalb vom orientierten bzw. gerichteten Flächeninhalt.

## 7.8 Partielle Integration

Es seien  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[ u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx. \quad (7.56)$$

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung der Produktregel der Differentiation (5.16):

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \quad (7.57)$$

## 7.9 Beispiele

- a) Wir berechnen zunächst das bestimmte Integral  $I = \int_0^\pi x \cos x \, dx$ . Hierbei identifizieren wir  $u(x) = x$  und  $v'(x) = \cos x$ , so dass  $u'(x) = 1$  und  $v(x) = \sin x$  folgt. Die Anwendung der partiellen Integrationsregel (7.56) ergibt dann

$$I = \left[ x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx = \left[ x \sin x + \cos x \right]_0^\pi = -1 - 1 = -2. \quad (7.58)$$

- b) Nun bestimmen wir das unbestimmte Integral  $I(x) = \int^x y^2 \ln y \, dy$ . Mit der Wahl von  $u(y) = \ln y$  und  $v'(y) = y^2$  erhalten wir  $u'(y) = 1/y$  und  $v(y) = y^3/3$ . Daher gilt:

$$I(x) = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int^x \frac{1}{3} y^2 \, dy = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C. \quad (7.59)$$

## 7.10 Substitutionsregel

Es seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $g: [a, b] \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $S \subseteq D$ . Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy. \quad (7.60)$$

Es handelt sich hierbei um die Umkehrung der Kettenregel der Differentiation. Differenzieren wir die rechte Seite nach  $b$ , so folgt aufgrund der Kettenregel der Differentiation (5.18) und der Identität (5.25) für die Ableitung der Umkehrfunktion gemäß Abschnitt 5.7:

$$\left( \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \, dy \right)' = f(g(b))g'(b) = \left( \int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx \right)'. \quad (7.61)$$

## 7.11 Beispiele

Wir üben nun die Substitutionsregel anhand von drei Beispielen.

- a) Als erstes berechnen wir das bestimmte Integral  $I = \int_0^2 x e^{x^2} \, dx$ . Hierzu bietet es sich an,  $y(x) = x^2$  mit  $y(0) = 0$  und  $y(2) = 4$  sowie  $x(y) = \sqrt{y}$  einzuführen. Für das Differential ergibt sich dann

$$dy = y'(x)dx = 2x dx = 2\sqrt{y} dx \quad \iff \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy. \quad (7.62)$$

Damit erhalten wir

$$I = \int_0^4 \sqrt{y} e^y \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^4 e^y dy = \frac{1}{2} [e^y]_0^4 = \frac{1}{2} (e^4 - 1). \quad (7.63)$$

b) Anschließend betrachten wir das bestimmte Integral  $I = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$ , so dass die Identifikation  $y(x) = 1 - x^2$  mit  $y(0) = 1$  und  $y(1) = 0$  sowie  $x(y) = \sqrt{1-y}$  naheliegt. Somit erhalten wir für die Transformation des Differentials

$$dy = y'(x)dx = -2x dx = -2\sqrt{1-y} dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = -\frac{1}{2\sqrt{1-y}} \quad (7.64)$$

und damit für die Berechnung des Integrals

$$I(z) = \int_1^0 \sqrt{1-y} \sqrt{y} \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \quad (7.65)$$

c) Aufbauend auf b) berechnen wir als letztes Beispiel schließlich noch das bestimmte Integral  $I(z) = \int^z x \sqrt{1-x^2} dx$ :

$$I = -\frac{1}{2} \int^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{y} dy = -\frac{1}{3} (1-z^2)^{\frac{3}{2}} + C. \quad (7.66)$$



# Kapitel 8

## Komplexe Zahlen

Um alle quadratischen Gleichungen lösen zu können, muss man die reellen auf die komplexen Zahlen erweitern.

### 8.1 Definition komplexer Zahlen

Die Einführung komplexer Zahlen lässt sich durch die Beobachtung motivieren, dass manche quadratischen Gleichungen keine reellen Lösungen besitzen. Wir betrachten als Beispiel die quadratische Gleichung

$$x^2 - 4x + 13 = 0, \quad (8.1)$$

die auf folgende Lösung führt:

$$x_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3\sqrt{-1}. \quad (8.2)$$

Die beiden Ausdrücke (8.2) sind offenbar keine reellen Zahlen, sie werden aber trotzdem als gewisse mathematische Objekte akzeptiert. Hierzu kürzt man  $\sqrt{-1}$  durch die imaginäre Einheit  $i$  ab und betrachtet die Menge  $\mathbb{C}$  aller Ausdrücke der Form

$$z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (8.3)$$

Diese Ausdrücke bilden komplexen Zahlen, wobei man noch verabredet, dass

$$i^2 = -1 \quad (8.4)$$

gilt. Man bezeichnet  $x = \operatorname{Re}(z)$  als Realteil von  $z$  und  $y = \operatorname{Im}(z)$  als Imaginärteil von  $z$ . Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und in Imaginärteil übereinstimmen:

$$z_1 = z_2 \quad \iff \quad x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2. \quad (8.5)$$

Eine komplexe Gleichung umfasst damit zwei reelle Gleichungen. Eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  wird als ein Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt, siehe Abb. 8.1 Dabei bezeichnet

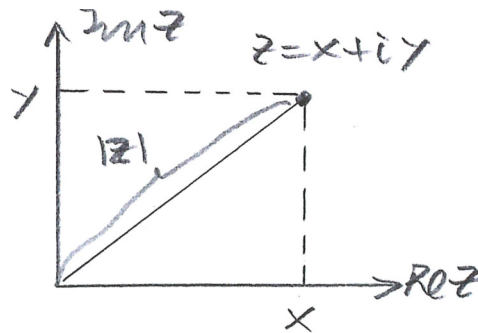


Abbildung 8.1: Darstellung einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  mit dem Realteil  $x$  und dem Imaginärteil  $y$  in einer Gaußschen Zahlenebene.

man die  $x$ -Achse als reelle Achse und die  $y$ -Achse als imaginäre Achse. Den Abstand von  $z$  vom Ursprung bezeichnet man als Betrag  $|z|$  von  $z$ . Offenbar gilt aufgrund des Satzes von Pythagoras

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8.6)$$

Beispielsweise erhalten wir für  $z = 2 + i$  den Betrag  $|z| = \sqrt{5}$ .

## 8.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

Wir zeigen nun, wie man die Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf komplexe Zahlen anwendet.

### 8.2.1 Addition und Subtraktion

Es seien  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$  zwei komplexe Zahlen. Aus den Gesetzen der Arithmetik folgt dann

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (8.7)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (8.8)$$

Hierbei haben wir das Assoziativgesetz der Addition verwendet, wonach man die Klammern beliebig setzen darf. Beispielsweise erhalten wir für  $z_1 = 2 + i$  und  $z_2 = 1 + 3i$ :

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i, \quad z_1 - z_2 = (2 + i) - (1 + 3i) = 1 - 2i. \quad (8.9)$$

Die Addition bzw. Subtraktion komplexer Zahlen lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene dadurch veranschaulichen, dass sie sich wie zweikomponentige Vektoren komponentenweise addieren bzw. subtrahieren, siehe Abb. 8.2.

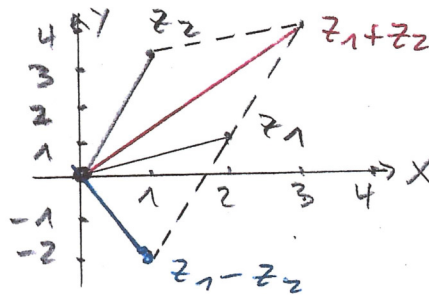


Abbildung 8.2: Graphische Darstellung der Addition und der Subtraktion zweier komplexer Zahlen am Beispiel (8.9).

### 8.2.2 Multiplikation

Zwei komplexe Zahlen  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$  lassen sich auch multiplizieren, wenn man das Distributivgesetz und die Verabredung (8.4) beachtet:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2). \end{aligned} \quad (8.10)$$

In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(1 + 3i) = 2 + i + 6i + 3i^2 = -1 + 7i. \quad (8.11)$$

Wir berechnen noch das Betragsquadrat von (8.11):

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2 \\ &= x_1^2x_2^2 - \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + \cancel{2x_1x_2y_1y_2} + x_1^2y_2^2 \\ &= x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dieses Ergebnis lässt sich gemäß (8.11) folgendermaßen zusammenfassen:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \quad (8.13)$$

Für unser Zahlenbeispiel heißt dies:

$$|(2 + i)(1 + 3i)| = |2 + i| \cdot |1 + 3i| = \sqrt{5}\sqrt{10} = 5\sqrt{2}. \quad (8.14)$$

### 8.2.3 Konjugiert komplexe Zahl

Zu jeder komplexen Zahl  $z = x + iy$  lässt sich eine konjugiert komplexe Zahl

$$z^* = x - iy \quad (8.15)$$

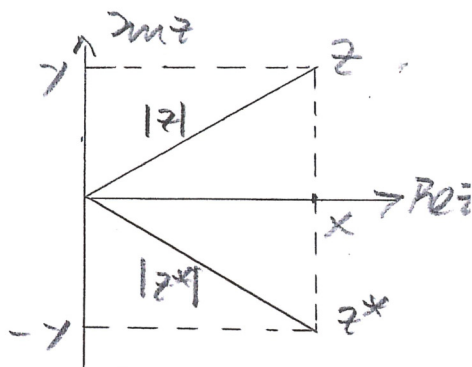


Abbildung 8.3: Graphische Darstellung einer zu  $z = x + iy$  konjugiert komplexen Zahl  $z^* = x - iy$  durch Spiegelung an der reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene.

eingeführen. In der Gaußschen  $xy$ -Zahlenebene entspricht dies einer Spiegelung an der reellen Achse, siehe Abb. 8.3. Wir folgern hieraus:

- a) Addition und Subtraktion von  $z$  und  $z^*$  führen auf den Real- und Imaginärteil:

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad (8.16)$$

$$y = \frac{1}{2i}(z - z^*). \quad (8.17)$$

Hierbei ist die Verabredung (8.4) zu beachten:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i. \quad (8.18)$$

- b) Durch Multiplikation von  $z$  und  $z^*$  folgt der Betrag von  $z$  bzw.  $z^*$ :

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^*|^2. \quad (8.19)$$

- c) Eine doppelte Konjugation ändert nichts:

$$(z^*) = [(x + iy)^*]^* = (x - iy)^* = x + iy = z. \quad (8.20)$$

### 8.2.4 Division

Wir berechnen den Quotienten  $z_1/z_2$  zweier komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2 \neq 0$ , indem wir unter Verwendung von (8.19) mit  $z_2^*$  erweitern:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^*. \quad (8.21)$$

Nun ist der Nenner reell, so dass die komplexe Division auf eine komplexe Multiplikation zurückgeführt ist. Das Zahlenbeispiel lautet hier:

$$\frac{2 + i}{1 + 3i} = \frac{(2 + i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{1}{10} (2 + i - 6i + 3) = \frac{5 - 5i}{10} = \frac{1}{2} (1 - i). \quad (8.22)$$

Für den Betrag von Gleichung (8.21) folgt mit Hilfe von (8.13):

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 z_2^*| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad (8.23)$$

### 8.2.5 Folgerungen

Bei der komplexen Konjugation von zusammengesetzten Ausdrücken braucht man nur jede einzelne komplexe Zahl durch ihre konjugiert komplexe Zahl zu ersetzen:

- a) Mit Hilfe von (8.7) und (8.15) erhalten wir für die komplexe Konjugation bei der Addition zweier komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)^* &= [(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)]^* = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + iy_1)^* + (x_2 + iy_2)^* = z_1^* + z_2^*. \end{aligned} \quad (8.24)$$

- b) Ein entsprechendes Resultat erhalten wir mit Hilfe von (8.24) dann auch für die Subtraktion zweier komplexer Zahlen:

$$z_1^* = [(z_1 - z_2) + z_2]^* = (z_1 - z_2)^* + z_2^* \quad \implies \quad (z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*. \quad (8.25)$$

- c) Für die komplexe Konjugation eines Produktes zweier komplexer Zahlen gilt dann aufgrund von (8.10) und (8.15):

$$(z_1 \cdot z_2)^* = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_2 y_1 + x_1 y_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = z_1^* z_2^*. \quad (8.26)$$

- d) Und für die komplexe Konjugation eines Quotienten zweier komplexer Zahlen folgt dann mit (8.15), (8.19)–(8.21) und (8.26):

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^* = \frac{1}{|z_2|^2} (z_1 z_2^*)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}. \quad (8.27)$$

Mit (8.19) und (8.26) lässt sich (8.10) auch direkt beweisen:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(z_1 z_2)^* = z_1 z_1^* \cdot z_2 z_2^* = |z_1|^2 |z_2|^2. \quad (8.28)$$

### 8.2.6 Bemerkung

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bildet im Sinne der Axiome von Abschnitt 1.2 bezüglich der Addition und Multiplikation einen Körper.

## 8.3 Euler-Formel

Die Euler-Formel ermöglicht es, eine Verbindung zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen im Rahmen der komplexen Zahlen herzustellen.

### 8.3.1 Herleitung über Taylor-Reihen

Nach Abschnitt 3.4 und Abschnitt 6.3 wurde die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion eingeführt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8.29)$$

Wir untersuchen nun die analytische Fortsetzung

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (8.30)$$

Aufgrund der Vereinbarung (8.4) betrachten wir die geraden und die ungeraden Reihenglieder separat:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (8.31)$$

Mit  $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$  und  $i^{2n+1} = i^{2n} \cdot i = (-1)^n i$  folgt:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (8.32)$$

Der Vergleich mit Abschnitt 3.4 zeigt, dass die geraden (ungeraden) Reihenglieder auf die Taylor-Reihe des Kosinus (Sinus) und damit auf die Euler-Formel führen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (8.33)$$

### 8.3.2 Additionstheoreme

Wir behandeln nun eine wichtige Anwendung der Euler-Formel. Aus (8.33) und dem Potenzgesetz

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \quad (8.34)$$

folgt nämlich:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta). \end{aligned} \quad (8.35)$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteile separat, so erhält man daraus die trigonometrischen Additionstheoreme:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (8.36)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (8.37)$$

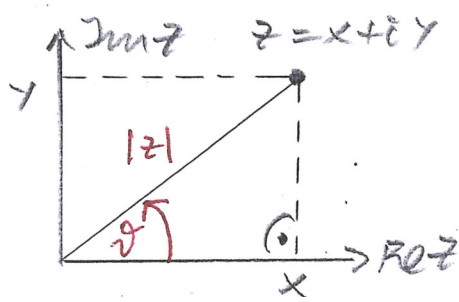


Abbildung 8.4: Polarkoordinaten-Darstellung einer komplexen Zahl  $z = |z| e^{i\vartheta}$  mit dem Betrag  $|z|$  und dem Winkel  $\vartheta$  zur  $x$ -Achse.

## 8.4 Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen

Bisher haben wir komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene durch deren kartesische Koordinaten, also deren Real- und Imaginärteil, charakterisiert. Nun wollen wir die dazu äquivalente Polarkoordinaten-Darstellung einführen. Hierzu wird die Euler-Formel von grundlegender Bedeutung sein.

### 8.4.1 Argument und Phasenfaktor

In der Gaußschen Zahlenebene lassen sich wie folgt Polarkoordinaten einführen, siehe Abb. 8.4. Der Abstand  $\rho$  zum Ursprung ist gerade der Betrag der komplexen Zahl:

$$\rho = |z|. \quad (8.38)$$

Und der Winkel  $\vartheta$  wird als Argument der komplexen Zahl bezeichnet:

$$\vartheta = \arg(z). \quad (8.39)$$

Sind Real- und Imaginärteil  $x$  und  $y$  bekannt, so folgt

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (8.40)$$

$$\vartheta = \arctan \frac{y}{x}. \quad (8.41)$$

Umgekehrt lässt sich die komplexe Zahl auch durch Polarkoordinaten ausdrücken. Aufgrund von  $x = \rho \cos \vartheta$  und  $y = \rho \sin \vartheta$  folgt aus (8.3):

$$z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta). \quad (8.42)$$

Aufgrund der Euler-Formel (8.33) vereinfacht sich (8.42) zu

$$z = \rho e^{i\vartheta}. \quad (8.43)$$

Man bezeichnet  $e^{i\vartheta}$  als Phasenfaktor von  $z$ . Aufgrund des trigonometrischen Pythagoras (4.13) gilt

$$|e^{i\vartheta}| = |\cos \vartheta + i \sin \vartheta| = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 1, \quad (8.44)$$

d.h. der Phasefaktor liegt auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Wir bemerken ferner, dass die konjugiert komplexe Zahl (8.15) aufgrund von (8.43) die folgende Polarkoordinaten-Darstellung besitzt:

$$z^* = \rho e^{-i\vartheta}. \quad (8.45)$$

### 8.4.2 Multiplikation und Division

Es seien  $\vartheta_1 = \arg(z_1)$  und  $\vartheta_2 = \arg(z_2)$  die Argumente zweier komplexer Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  sowie  $\rho_1$  und  $\rho_2$  deren entsprechende Beträge. Dann gilt aufgrund von (8.34) und (8.43) und für die Multiplikation der beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}. \quad (8.46)$$

Es multiplizieren sich demnach die Beträge gemäß (8.13) und es addieren sich die Argumente:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \quad (8.47)$$

Entsprechend folgt mit (8.21) für die Division zweier komplexer Zahlen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 z_2^* = \frac{1}{\rho_2^2} \rho_1 e^{i\vartheta_1} \rho_2 e^{-i\vartheta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)}. \quad (8.48)$$

Also werden die Beträge gemäß (8.23) dividiert und die Argumente werden subtrahiert:

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2). \quad (8.49)$$

### 8.4.3 Folgerungen

Mit den genannten Rechenregeln für die Polarkoordinaten-Darstellung komplexer Zahlen lassen sich nun einige nützliche Folgerungen ableiten.

a) Spezialisiert man (8.46) auf  $z_1 = z_2 = e^{i\vartheta}$ , so folgt

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta} = e^{2i\vartheta}. \quad (8.50)$$

Einsetzen der Euler-Formel (8.33) führt auf

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^2 = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta + 2i \sin \vartheta \cos \vartheta = \cos(2\vartheta) + i \sin(2\vartheta). \quad (8.51)$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile führt dann auf

$$\cos(2\vartheta) = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta, \quad (8.52)$$

$$\sin(2\vartheta) = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (8.53)$$

Es handelt sich hierbei um Spezialfälle der trigonometrischen Additionstheoreme (8.36) und (8.37).

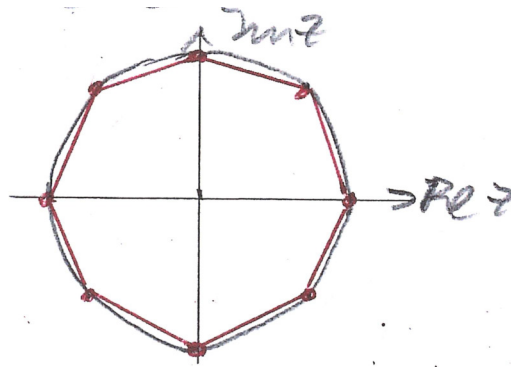


Abbildung 8.5: Die acht Einheitswurzeln  $e^{i\vartheta_k}$  mit  $\vartheta_k = k \cdot 2\pi/8$  für  $k = 0, 1, \dots, 7$  bilden ein dem Einheitskreis eingeschriebenes Achteck.

b) Durch Iteration folgt dann

$$e^{i\vartheta} \cdot e^{2i\vartheta} = e^{3i\vartheta}. \quad (8.54)$$

Einsetzen der Euler-Formel (8.33), Zerlegung in Real- und Imaginärteil und Beachtung von (8.52), (8.53) führt auf die Moivre-Formeln:

$$\cos(3\vartheta) = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, \quad (8.55)$$

$$\sin(3\vartheta) = 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta. \quad (8.56)$$

c) Durch weitere Iteration erhalten wir

$$(e^{i\vartheta})^n = e^{in\vartheta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8.57)$$

was mit der Euler-Formel (8.33) auf

$$(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n = e^{in\vartheta}. \quad (8.58)$$

führt. Setzen wir nun  $\vartheta_k = k \cdot 2\pi/n$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , so folgt

$$(\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k)^n = e^{in\vartheta_k} = e^{2\pi i k} = 1. \quad (8.59)$$

Demnach stellen  $e^{i\vartheta_k}$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln dar. Sie bilden ein dem Einheitskreis eingeschriebenes  $n$ -Eck, siehe das Beispiel  $n = 8$  in Abb. 8.5.

## 8.5 Hyperbelfunktionen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion lassen sich Hyperbelfunktionen definieren:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad (8.60)$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad (8.61)$$

die in Abb. 8.6 graphisch dargestellt sind. Die Hyperbelfunktionen besitzen ähnliche Eigenschaften wie die trigonometrischen Funktionen. Wir listen diese nun ohne Beweis auf:

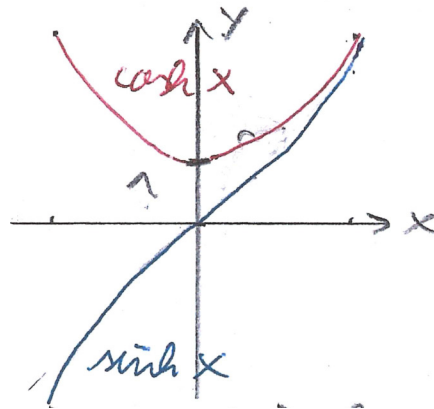


Abbildung 8.6: Schaubilder der Hyperbelfunktionen (8.60) und (8.61).

a) Symmetrie:

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad (8.62)$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x). \quad (8.63)$$

b) Taylor-Reihen:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots, \quad (8.64)$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots. \quad (8.65)$$

c) Hyperbolischer Pythagoras:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \quad (8.66)$$

d) Additionstheoreme:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad (8.67)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y. \quad (8.68)$$

e) Differentiation:

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (8.69)$$

$$(\cosh x)' = \sinh x. \quad (8.70)$$

f) Integration:

$$\int^x \sinh(y) dy = \cosh x + C, \quad (8.71)$$

$$\int^x \cosh(y) dy = \sinh x + C. \quad (8.72)$$

Woher kommt die Ähnlichkeit zwischen Hyperbelfunktionen und trigonometrischen Funktionen? Hierzu betrachten wir die Euler-Formel (8.33):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) , \quad (8.73)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) . \quad (8.74)$$

Wir führen nun eine analytische Fortsetzung dieser Umkehrung der Euler-Formel durch, d.h. wir substituieren  $x \rightarrow ix$ . Zunächst erhalten wir aus (8.61) und (8.73)

$$\cos(ix) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \cosh x . \quad (8.75)$$

Analog folgt aus (8.60) und (8.74):

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = i \sinh x . \quad (8.76)$$

Demnach erhält man durch analytische Fortsetzung der trigonometrischen Funktionen gerade die Hyperbelfunktionen. Aufgrund von (8.60), (8.61), (8.73) und (8.74) gilt entsprechendes auch umgekehrt:

$$\cosh(ix) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x , \quad (8.77)$$

$$\sinh(ix) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) = i \sin x . \quad (8.78)$$

## 8.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom  $n$ -ten Grades

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad (8.79)$$

mit komplexen Koeffizienten, d.h.  $a_k \in \mathbb{C}$ , besitzt nach Gauß genau  $n$  komplexe Nullstellen  $z_1, z_2, \dots, z_n$  mit der Eigenschaft

$$P_n(z) = a_n (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n) . \quad (8.80)$$

Hierbei dürfen Nullstellen mehrfach vorkommen und werden dann entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt. Als Beispiel betrachten wir nochmals das Polynom zweiter Ordnung (8.1) mit der Lösung (8.2). Mit Hilfe der komplexen Zahlen lauten die beiden Lösungen

$$x_{\pm} = 2 \pm 3i . \quad (8.81)$$

Zur Probe überprüfen wir

$$(x - x_+)(x - x_-) = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) = x^2 - 4x + 13 . \quad (8.82)$$



# Kapitel 9

## Vektorrechnung

In der Physik hat man es häufig mit Größen zu tun, die eine Richtung besitzen. Wichtige Beispiele hierfür sind der Ort eines Teilchens, seine Geschwindigkeit oder die Kraft, die auf das Teilchen wirkt. Solche gerichteten Größen bezeichnet man als Vektoren.

### 9.1 Rechenregeln mit Vektoren

Ein Vektor  $\vec{a}$  ist eine gerichtete Größe, die durch einen Pfeil mit dem Betrag  $|\vec{a}|$  und die Richtung  $\vec{a}/|\vec{a}|$  definiert wird, siehe Abb. 9.1a). Die beiden grundlegenden Operationen von Vektoren sind die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Vektoren mit einer reellen Zahl, die graphisch wie in Abb. 9.1b) eingeführt werden. Multipliziert man einen Vektor  $\vec{a}$  mit einer reellen Zahl  $\lambda$ , so führt dies auf den Vektor  $\lambda\vec{a}$ , der in Richtung von  $\vec{a}$  zeigt und den Betrag  $\lambda|\vec{a}|$  besitzt, siehe Abb. 9.1c). Für diese beiden Operationen mit Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad (9.1)$$

$$\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda. \quad (9.2)$$

b) Assoziativität:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}), \quad (9.3)$$

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}. \quad (9.4)$$

c) Distributivität:

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}, \quad (9.5)$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}. \quad (9.6)$$

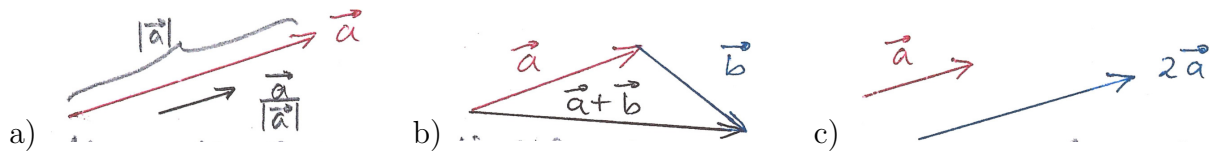


Abbildung 9.1: Graphische Darstellung von a) einem Vektor, b) der Addition zweier Vektoren und c) der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl.

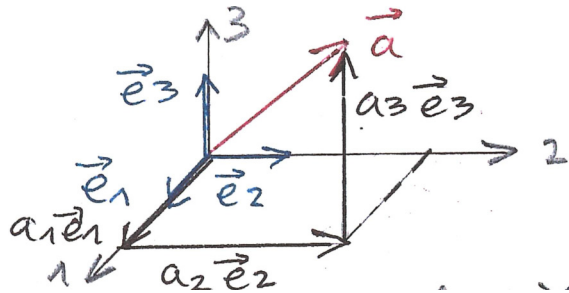


Abbildung 9.2: Zerlegung eines Vektors  $\vec{a}$  in die Projektionen auf die drei Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  entsprechend (9.7).

## 9.2 Komponentendarstellung von Vektoren

Zu einem Vektor  $\vec{a}$  mit dem Betrag  $|\vec{a}|$  lässt sich ein Einheitsvektor  $\vec{e} = \vec{a}/|\vec{a}|$  konstruieren, der in Richtung von  $\vec{a}$  zeigt und den Betrag  $|\vec{e}| = 1$  hat. Ein Koordinatensystem wird durch drei Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  definiert, die jeweils paarweise senkrecht aufeinander stehen. Projiziert man einen Vektor  $\vec{a}$  auf diese Einheitsvektoren, so ergeben sich die Vektoren  $a_1\vec{e}_1, a_2\vec{e}_2, a_3\vec{e}_3$ , deren Addition wieder auf den Vektor  $\vec{a}$  führt, siehe Abb. 9.2:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \quad (9.7)$$

Aufgrund dieser Komponentendarstellung schreibt man den Vektor  $\vec{a}$  durch das Tripel der Projektionslängen  $a_1, a_2, a_3$ :

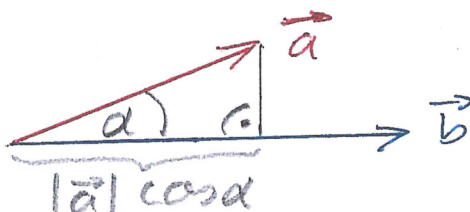
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

Die drei Einheitsvektoren entsprechen dann den Tripeln:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Der Betrag des Vektors  $\vec{a}$  ergibt sich aus dem räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}. \quad (9.10)$$

Abbildung 9.3: Projektion des Vektors  $\vec{a}$  in Richtung von  $\vec{b}$ .

Die Addition zweier Vektoren und die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl sind dann komponentenweise definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

### 9.3 Skalarprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wird mit Hilfe eines Skalarproduktes ein Skalar zugeordnet, indem das Produkt der Beträge der beiden Vektoren mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels  $\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  multipliziert wird:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha. \quad (9.12)$$

Anschaulich entspricht das Skalarprodukt der Länge der Projektion von  $\vec{a}$  in Richtung von  $\vec{b}$  multipliziert mit  $|\vec{b}|$ , siehe Abb. 9.3. Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  genügt den folgenden Axiomen:

a) Kommutativität:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (9.13)$$

b) Distributivität:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad (9.14)$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}). \quad (9.15)$$

Es gibt zwei wichtige Spezialfälle des Skalarproduktes:

1.) Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  parallel zueinander, ist also  $\alpha = 0$ , so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \quad \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (9.16)$$

Insbesondere gilt dann für  $\vec{b} = \vec{a}$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (9.17)$$

2.) Sind  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht zueinander, ist also  $\alpha = \pi/2$ , so folgt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (9.18)$$

Demnach gilt für das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_j$  eines Koordinatensystems mit zueinander orthogonalen Koordinaten

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad (9.19)$$

wobei das Kronecker-Symbol definiert ist durch:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (9.20)$$

Es seien nun zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  in der jeweiligen Komponentendarstellung (9.7) gegeben:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j. \quad (9.21)$$

Dann läßt sich mit Hilfe von (9.19) und (9.20) das Skalarprodukt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  durch die Komponenten der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \left( \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Hieraus lassen sich die folgenden Konsequenzen ablesen:

- 1) Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors  $\vec{a}$  mit einem Einheitsvektor  $\vec{e}_i$ , so folgt unmittelbar aus (9.22)

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i. \quad (9.23)$$

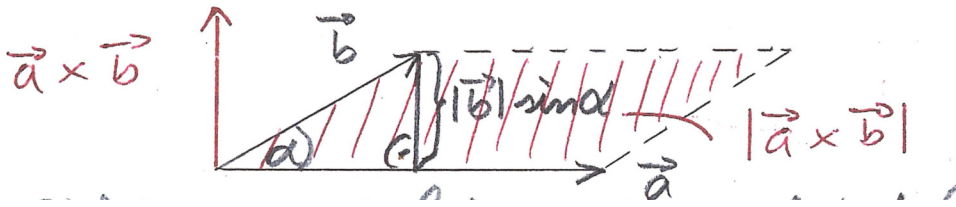
Demnach ist die Projektion  $a_i$  des Vektors  $\vec{a}$  auf die  $i$ te Koordinatenachse durch das Skalarprodukt von  $\vec{a}$  mit  $\vec{e}_i$  gegeben.

- 2) Das Skalarprodukt eines Vektors  $\vec{a}$  mit sich selbst führt gemäß (9.17) und (9.22) auf den räumlichen Pythagoras:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}. \quad (9.24)$$

- 3) Den Winkel  $\alpha \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  lässt sich nach (9.12), (9.22) und (9.24) mit deren Komponenten berechnen:

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}. \quad (9.25)$$

Abbildung 9.4: Zur Definition des Vektorproduktes  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

## 9.4 Vektorprodukt zweier Vektoren

Einem Paar von Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  wird mit Hilfe des Vektorproduktes  $\vec{a} \times \vec{b}$  ein Vektor zugeordnet. Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht dabei zu dem von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramm senkrecht, so dass  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{a} \times \vec{b}$  ein Rechtssystem bilden, siehe Abb. 9.4. Der Betrag des Vektorproduktes entspricht dabei der Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \underbrace{|\vec{a}|}_{\text{Grundlänge}} \cdot \underbrace{|\vec{b}| \sin \alpha}_{\text{Höhe}}, \quad \alpha \angle (\vec{a}, \vec{b}). \quad (9.26)$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  genügt den folgenden Axiomen:

a) Antikommutativität:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}. \quad (9.27)$$

b) Distributivität:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (9.28)$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}). \quad (9.29)$$

Wir betrachten nun das Vektorprodukt zweier Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_j$ . Für  $i = j$  folgt aus der Antikommutativität (9.27) der Nullvektor:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}. \quad (9.30)$$

Im Falle  $i \neq j$  ergibt aber  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$  einen Vektor vom Betrag Eins. Ferner steht der Vektor  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$  senkrecht auf  $\vec{e}_i$  und  $\vec{e}_j$ , so dass  $\vec{e}_i$ ,  $\vec{e}_j$  und  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$  ein Rechtssystem bilden:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2. \quad (9.31)$$

Mit der Komponentendarstellung der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  folgt nun das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  zu

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_1}_{=\vec{0}} + a_1b_2 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}_{=\vec{e}_3} + a_1b_3 \underbrace{\vec{e}_1 \times \vec{e}_3}_{=-\vec{e}_2} \\ &\quad + a_2b_1 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_1}_{=-\vec{e}_3} + a_2b_2 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_2}_{=\vec{0}} + a_2b_3 \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}_{=\vec{e}_1} \\ &\quad + a_3b_1 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}_{=\vec{e}_2} + a_3b_2 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_2}_{=-\vec{e}_1} + a_3b_3 \underbrace{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3}_{=\vec{0}} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Dies lässt sich wie folgt kompakt zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (9.33)$$

Wir können nun anhand der Komponentendarstellung zeigen, dass das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  senkrecht auf  $\vec{a}$  steht:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Analog folgt aus Antikommutativität (9.27) und (9.34):

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = 0. \quad (9.35)$$

Außerdem folgt aus der Komponentendarstellung des Skalarproduktes und des Vektorproduktes der räumliche Pythagoras:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= \dots = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Daraus folgt dann mit Hilfe von (9.12):

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha), \quad (9.37)$$

so dass sich aufgrund des trigonometrischen Pythagoras (4.13) das Resultat (9.26) ergibt.

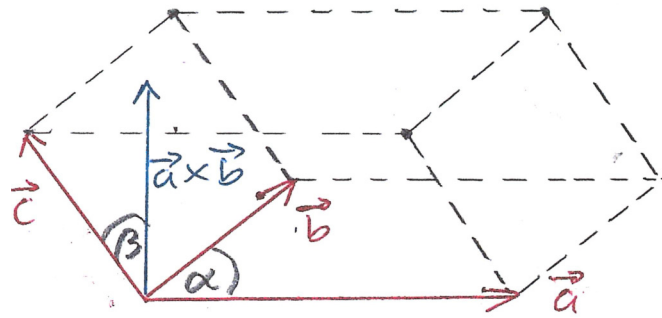
## 9.5 Spatprodukt dreier Vektoren

Das Spatprodukt dreier Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  wird so definiert, dass es gerade mit dem Volumen  $V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  des Parallelepipeds übereinstimmt, das von den drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  aufgespannt wird, siehe Abb. 9.5. Mit der Grundfläche des Parallelepipeds  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$  und dessen Höhe  $|\vec{c}| \cos \beta$  folgt dann

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \beta. \quad (9.38)$$

Für die Komponentendarstellung gilt dann:

$$\begin{aligned} V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Abbildung 9.5: Zur Definition des  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

Hieraus folgt, dass man innerhalb des Spatproduktes die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  zyklisch vertauschen kann:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = V(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = V(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}). \quad (9.40)$$

Bilden die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ein Rechtssystem, so wird das Volumen des Parallelepipeds positiv gerechnet, im Falle eines Linkssystems entsprechend negativ.

## 9.6 Zweifaches Vektorprodukt

Das zweifache Vektorprodukt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  dreier Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ist im Unterschied zum Spatprodukt wiederum ein Vektor. Da ein Vektorprodukt senkrecht auf seinen Faktoren steht, ist das zweifache Vektorprodukt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  orthogonal zu  $\vec{a}$  und  $\vec{b} \times \vec{c}$ :

- Das Vektorprodukt  $\vec{b} \times \vec{c}$  wiederum ist senkrecht zu der von  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Ebene. Deshalb muss das zweifache Vektorprodukt  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  in der von  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  aufgespannten Ebene liegen:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \quad (9.41)$$

- Aus der Orthogonalität von  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  zu  $\vec{a}$  folgt dann:

$$\vec{a} \cdot [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})] = 0 = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{c}), \quad (9.42)$$

so dass gilt:

$$\beta = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{c}), \quad \gamma = -\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (9.43)$$

Einsetzen von (9.43) in (9.41) führt zum Zwischenergebnis

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})]. \quad (9.44)$$

Um den noch offenen Faktor  $\alpha$  zu bestimmen, gehen wir in (9.44) zur Komponentenschreibweise über. Für die linke Seite erhalten wir

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

während sich die rechte Seite ergibt zu

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}. \quad (9.46)$$

Der Vergleich von (9.44)–(9.46) führt auf  $\alpha = 1$  und wir erhalten die „bac–cab“-Regel:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (9.47)$$

# Kapitel 10

## Matrizen

Wir lernen jetzt Matrizen kennen, die sich vielfältig in der Physik anwenden lassen. So lassen sich mit ihrer Hilfe Koordinatentransformationen wie eine Rotation beschreiben. Und es lassen sich lineare Gleichungssysteme mit Matrizen kompakt formulieren und effizient lösen.

### 10.1 Definitionen

Es seien  $m, n$  natürliche Zahlen. Eine  $m \times n$ -Matrix über  $\mathbb{R}$  ist ein rechteckiges Schema  $A = (a_{ij})$  mit Einträgen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  sowie  $i = 1, \dots, m$  und  $j = 1, \dots, n$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (10.1)$$

Eine  $m \times n$ -Matrix besitzt also  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten. Ein Beispiel für eine  $2 \times 3$ -Matrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Die Menge aller  $m \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$  wird mit

$$\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R}) \quad (10.3)$$

bezeichnet. Falls  $m = n$  vorliegt, wird für die Menge aller quadratischen  $n \times n$ -Matrizen die Bezeichnung

$$\text{Mat}(n, \mathbb{R}) = \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \quad (10.4)$$

verwendet. Ein Beispiel für eine  $2 \times 2$ -Matrix ist:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Ist  $A = (a_{ij})$  eine  $m \times n$ -Matrix, dann bezeichnen wir

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \quad (10.6)$$

als  $i$ -ten Zeilenvektor von  $A$  und entsprechend

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

als  $j$ -ten Spaltenvektor von  $A$ . Ist ferner  $A = (a_{ij})$  eine  $m \times n$ -Matrix, so bezeichnet  $A^T = (a_{ij}^T)$  mit den Einträgen  $a_{ij}^T = a_{ji}$  eine  $n \times m$ -Matrix, die man als transponierte Matrix bezeichnet:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

So gilt für die schon eingeführten beispielhaften Matrizen

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Durch Transposition wird ein Zeilenvektor zu einem Spaltenvektor und umgekehrt:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})^T = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}^T = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}). \quad (10.10)$$

## 10.2 Addition und Subtraktion von Matrizen

Es seien  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ . Dann werden sie dadurch addiert bzw. subtrahiert, dass ihre entsprechenden Einträge addiert bzw. subtrahiert werden:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \quad (10.11)$$

So erhalten wir für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.12)$$

als Summe und Differenz

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 11 & 6 \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Bei der Addition und damit auch der Subtraktion von Matrizen gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Kommutativität:

$$A \pm B = B \pm A. \quad (10.14)$$

b) Assoziativität:

$$A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C. \quad (10.15)$$

c) Linearität der Transposition:

$$(A \pm B)^T = A^T \pm B^T. \quad (10.16)$$

### 10.3 Multiplikation mit Skalar

Auch die Multiplikation einer Matrix  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$  mit einem Skalar  $k \in \mathbb{R}$  ist komponentenweise definiert:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

So gilt beispielsweise:

$$2 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

a) Assoziativität:

$$k(lA) = (kl)A. \quad (10.19)$$

b) Distributivität:

$$k(A + B) = kA + kB, \quad (k + l)A = kA + lA. \quad (10.20)$$

## 10.4 Multiplikation zweier Matrizen

Es seien  $A \in \text{Mat}(m \times p, \mathbb{R})$  und  $B \in \text{Mat}(p \times n, \mathbb{R})$  zwei Matrizen. Wichtig ist dabei, dass die Spaltenzahl von  $A$  mit der Zeilenzahl von  $B$  übereinstimmt. Dann ist das Produkt  $C = A \cdot B \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$  der beiden Matrizen  $A$  und  $B$  definiert durch die Komponenten

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}. \quad (10.21)$$

Das bedeutet, dass sich das Element  $c_{ij}$  als Skalarprodukt des  $i$ -ten Zeilenvektors von  $A$  und des  $j$ -ten Spaltenvektors von  $B$  ergibt. Als Beispiel betrachten wir die Multiplikation einer Matrix  $A \in \text{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$  mit einer Matrix  $B \in \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$ , was auf die Matrix  $A \cdot B = C \in \text{Mat}(4 \times 2, \mathbb{R})$  führt:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 5 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 0 \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 37 \\ 19 & 10 \\ 21 & 12 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.22)$$

Bei der Multiplikation zweier Matrizen ist das Folgende zu beachten:

- Das Produkt  $B \cdot A$  im obigen Beispiel ist nicht definiert, da die Zahl der Spalten von  $B$ , also 2, nicht mit der Zahl der Zeilen von  $A$ , also 4, übereinstimmt.
- Im Allgemeinen gilt für das Produkt von Matrizen, dass es nicht kommutativ ist:

$$A \cdot B \neq B \cdot A. \quad (10.23)$$

- Es ist  $A \cdot B = 0$  auch mit  $A, B \neq 0$  möglich. Ein Beispiel hierfür ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

- Mit der Matrizen-Multiplikation lässt sich das Skalarprodukt zweier Vektoren definieren:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \cdot \vec{b} = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (10.25)$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

- Assoziativität:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \quad (kA) \cdot B = A \cdot (kB) = k(A \cdot B). \quad (10.26)$$

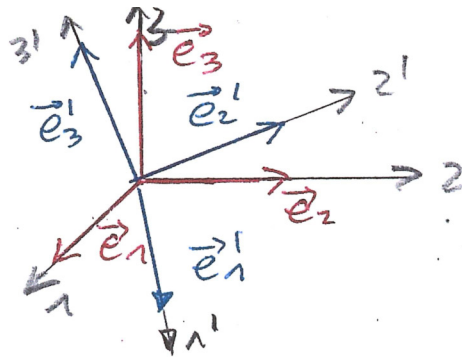


Abbildung 10.1: Einheitsvektoren zweier Koordinatensysteme.

b) Distributivität:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C. \quad (10.27)$$

c) Transposition:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \quad (10.28)$$

Die Gültigkeit dieser Rechenregel beweist man mit Hilfe der Komponentenschreibweise:

$$\left( \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \right)^T = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^p b_{ik}^T a_{kj}^T. \quad (10.29)$$

## 10.5 Koordinaten-Transformation

Die Komponenten-Darstellung eines Vektors hat einerseits den Vorteil, dass sie anschaulich ist, andererseits ist sie jedoch von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Wir behandeln nun eine Transformation der Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  des ursprünglichen Koordinatensystems in die Einheitsvektoren  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  des transformierten Koordinatensystems, siehe Fig. 10.1. Ein Vektor  $\vec{x}$  kann nun sowohl nach den Einheitsvektoren des alten und des neuen Koordinatensystems entwickelt werden:

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3. \quad (10.30)$$

Die jeweiligen Entwicklungskoeffizienten  $x_1, x_2, x_3$  bzw.  $x'_1, x'_2, x'_3$  ergeben sich dann nach Abschnitt 9.3 durch Projektion des Vektors  $\vec{x}$  auf die jeweiligen Einheitsvektoren:

$$x_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}_1, \quad x_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}_2, \quad x_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}_3, \quad (10.31)$$

$$x'_1 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_1, \quad x'_2 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_2, \quad x'_3 = \vec{x} \cdot \vec{e}'_3. \quad (10.32)$$

Ganz entsprechend lassen sich auch die neuen Einheitsvektoren  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  nach den alten Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  entwickeln:

$$\vec{e}'_1 = R_{11}\vec{e}_1 + R_{12}\vec{e}_2 + R_{13}\vec{e}_3, \quad (10.33)$$

$$\vec{e}'_2 = R_{21}\vec{e}_1 + R_{22}\vec{e}_2 + R_{23}\vec{e}_3, \quad (10.34)$$

$$\vec{e}'_3 = R_{31}\vec{e}_1 + R_{32}\vec{e}_2 + R_{33}\vec{e}_3. \quad (10.35)$$

In kompakter Schreibweise lautet dieser Zusammenhang:

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}\vec{e}_j. \quad (10.36)$$

Die dabei auftretenden Matrixelemente  $R_{ij}$  sind durch die Skalarprodukte und damit durch die Winkel zwischen den Einheitsvektoren  $\vec{e}'_i$  und  $\vec{e}_j$  bestimmt:

$$\cos \sphericalangle(\vec{e}'_i, \vec{e}_j) = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 R_{ik}\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 R_{ik}\delta_{kj} = R_{ij}. \quad (10.37)$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die alten Einheitsvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  gemäß (9.19) orthonormal zueinander sind. Fordert man nun, dass auch die neuen Einheitsvektoren  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$  orthonormal zueinander sind, so gilt analog zu (9.19)

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}. \quad (10.38)$$

Aus (9.19) und (10.38) folgt dann eine Einschränkung an die Matrix  $R$ :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_k \cdot \vec{e}'_l &= \sum_{i=1}^3 R_{ki}\vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 R_{lj}\vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ki}R_{lj}\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 R_{ki}R_{lj}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 R_{ki}R_{li} = \sum_{i=1}^3 R_{li}R_{ik}^T = \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Diese Bedingung besagt, dass die Matrix  $R$  orthonormal ist, d.h. dass die jeweiligen Zeilen bzw. Spalten orthonormal zueinander sind:

$$RR^T = R^T R = E. \quad (10.40)$$

Hier bezeichnet  $E = (\delta_{ij})$  die Einheitsmatrix. Aus dem Transformationsgesetz für die Einheitsvektoren folgt nun aber auch ein entsprechendes Transformationsgesetz für die Komponenten eines Vektors  $\vec{x}$ :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x'_i \vec{e}'_i = \sum_{i=1}^3 x'_i \sum_{j=1}^3 R_{ij}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 x'_i R_{ij} \right) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j. \quad (10.41)$$

Hieraus folgt

$$x_j = \sum_{i=1}^3 x'_i R_{ij} = \sum_{i=1}^3 R_{ji}^T x'_i, \quad (10.42)$$

was in Vektorschreibweise heißt:

$$\vec{x} = R^T \vec{x}' \quad \iff \quad \vec{x}' = R\vec{x}. \quad (10.43)$$

Diese Ergebnis wird zur strengen mathematischen Definition eines Vektors herangezogen. Ein System von drei Elementen  $x_1, x_2, x_3$  ist genau dann ein Vektor, wenn es sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem genau so transformiert. Demnach stellen z.B. die Masse, die Zeit und die  $x$ -Koordinate nicht die Komponenten eines Vektors dar.

## 10.6 Inverse Matrizen

Für Matrizen ist eine Division nicht erklärt. Die Gleichung

$$A \cdot X = B \quad (10.44)$$

lässt sich nicht ohne weiteres nach  $X$  auflösen. Für die Teilmenge quadratischer Matrizen kann man aber inverse Matrizen bezüglich der Matrizen-Multiplikation finden. Hierzu sei  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  eine quadratische Matrix. Dann heißt eine ebenfalls quadratische Matrix  $A^{-1} \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$  die zu  $A$  inverse Matrix, falls gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (10.45)$$

Als konkretes Zahlenbeispiel für  $A, A^{-1} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$  betrachten wir:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (10.46)$$

Für allgemeine Matrizen  $A, A^{-1} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$  gilt dann:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (10.47)$$

Falls  $A$  eine Inverse  $A^{-1}$  besitzt, so ist diese dann eindeutig. Zum Beweis nehmen wir an: Gäbe es mit  $A^{-1}$  und  $A_{-1}$  zwei Inverse von  $A$ , gälte also

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E, \quad A_{-1}A = AA_{-1} = E, \quad (10.48)$$

dann folgt:

$$A_{-1} = A_{-1}E = A_{-1}(AA^{-1}) = (A_{-1}A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}. \quad (10.49)$$

Der Vollständigkeit halber listen wir noch die folgenden Rechenregeln für inverse Matrizen auf:

a) Das doppelt Inverse einer Matrix entspricht der Identität:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \quad (10.50)$$

b) Transposition und Invertierung einer Matrix kommutieren:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \quad (10.51)$$

c) Für die Invertierung einer Matrix  $A$  mit einer reellen Zahl  $c \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}. \quad (10.52)$$

d) Das Inverse eines Produktes von Matrizen ist durch das Produkt der inversen Matrizen mit umgekehrter Reihenfolge gegeben:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}. \quad (10.53)$$

Dies lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1} &= B^{-1}A^{-1}E = B^{-1}A^{-1}AB \cdot (AB)^{-1} = B^{-1}(A^{-1}A)B(AB)^{-1} \\ &= B^{-1}B \cdot (AB)^{-1} = (AB)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.54)$$

e) Das Inverse einer orthonormalen Matrix  $R$  ist aufgrund von (10.40) durch die transponierte Matrix gegeben:

$$R^T = R^{-1}. \quad (10.55)$$

# Kapitel 11

## Determinanten

Jeder quadratischen Matrix kann man eine Zahl zuordnen, die man als Determinante bezeichnet. Mit ihr kann man überprüfen, ob eine quadratische Matrix ein Inverses besitzt. Falls die inverse Matrix existiert, kann man sie mit Hilfe von geeigneten Determinanten berechnen.

### 11.1 Definitionen

Es sei  $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$  die Menge aller quadratischen Matrizen auf  $\mathbb{R}$ . Dann bezeichnet die Determinante die Abbildung

$$\det : \quad \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (11.1)$$

Im Falle  $n = 2$  ist die Determinante einer  $2 \times 2$ -Matrix definiert durch

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (11.2)$$

Entsprechend gilt im Falle  $n = 3$  für die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix die Regel von Sarrus, die auch als Jägerzaun-Regel bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Die Bezeichnung Jägerzaun-Regel ist auf folgendes Merkschema zur Berechnung der Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix zurückzuführen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & + & & + & & + & \\
 a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
 a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
 a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \\
 & - & & - & & - & & & 
 \end{array}$$

Als Beispiel berechnen wir mit Hilfe von (11.3) die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0) \\
 &= 1 + 6 - 4 = 3.
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

Die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix (11.3) lässt sich z.B. bei der Berechnung des Vektorprodukts verwenden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_1) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_2) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3, \tag{11.5}$$

was gerade der Komponentenschreibweise (9.33) entspricht. Die Regel von Sarrus (11.3) tritt aber auch beim Spatprodukt auf:

$$\begin{aligned}
 V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
 &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_3 b_2 c_1 + a_1 b_3 c_2 + a_2 b_1 c_3),
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

was gerade mit (9.39) übereinstimmt.

## 11.2 Laplacescher Entwicklungssatz

Im allgemeinen Falle einer  $n \times n$ -Matrix mit  $n \geq 3$  wendet man den Laplaceschen Entwicklungssatz an, um eine Determinante zu berechnen. Es sei  $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ . Dann bezeichnet  $A_{ij} \in \text{Mat}(n-1, \mathbb{R})$  diejenige Untermatrix, die man durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte aus  $A$  erhält:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{11.7}$$

+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+
-	+	-	+	-
+	-	+	-	+

Abbildung 11.1: Die Vorzeichen beim Laplaceschen Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) weisen ein Schachbrettmuster auf.

Dann besagt der Laplacesche Entwicklungssatz, dass man die Determinante einer Matrix  $A$  mit Hilfe der Determinanten von Untermatrizen berechnen kann. Hierzu gilt für jede Zeile  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$ :

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det A_{in}. \quad (11.8)$$

Entsprechendes gilt aber auch für jede Spalte  $j$  mit  $1 \leq j \leq n$ :

$$\det A = (-1)^{j+1}a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{j+2}a_{2j} \det A_{2j} + \dots + (-1)^{j+n}a_{nj} \det A_{nj}. \quad (11.9)$$

Als Beispiel betrachten wir dieselbe  $3 \times 3$ -Matrix wie im Beispiel (11.4). Aber jetzt berechnen wir deren Determinanten durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes auf zweierlei Weisen. Zum einen entwickeln wir nach der ersten Zeile, d.h. wir wenden (11.8) mit  $i = 1$  an:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2(3 - 2) = 1 + 2 = 3. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Zum anderen entwickeln wir nach der zweiten Spalte, d.h. wir wenden (11.9) mit  $j = 2$  an, was natürlich auf dasselbe Ergebnis führt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-6) = 1 - 4 + 6 = 3. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Auf der Grundlage dieser Beispiele bemerken wir:

- Es ist also sinnvoll, nach einer Zeile bzw. Spalte zu entwickeln, die möglichst viele Nullen enthält.
- Die Vorzeichenverteilung im Laplaceschen Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) kann man sich dabei als „Schachbrettmuster“ vorstellen, wobei die Hauptdiagonale nur aus Pluszeichen besteht, siehe Fig. 11.1.

### 11.3 Eigenschaften

Wir stellen nun einige nützliche Eigenschaften zusammen, die beim Berechnen von Determinanten zu beachten sind.

- a) Bei einer Diagonalmatrix ist die Determinante durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathcal{O} \\ & \ddots & \\ \mathcal{O} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (11.12)$$

- b) Hat die Zeile einer Matrix einen gemeinsamen Faktor  $\lambda$ , so gilt für deren Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}. \quad (11.13)$$

- c) Hat die Spalte einer Matrix einen gemeinsamen Faktor  $\lambda$ , so gilt für deren Determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \dots & \lambda a_{1j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \lambda a_{nj} & \dots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

- d) Vertauscht man zwei Zeilen oder zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

- e) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zur  $i$ -ten Zeile das  $\lambda$ -Fache der  $k$ -ten Zeile hinzuaddiert:

$$\det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}. \quad (11.15)$$

- f) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zur  $j$ -ten Spalte das  $\lambda$ -Fache der  $l$ -ten Spalte hinzuaddiert:

$$\det \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & a_{nj} & \dots & a_{nl} & \dots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \dots & a_{1j} + \lambda a_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & a_{nj} + \lambda a_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots \end{pmatrix}. \quad (11.16)$$

g) Matrix  $A$  und transponierte Matrix  $A^T$  haben dieselbe Determinante:

$$\det A = \det A^T. \quad (11.17)$$

h) Aus  $\det A = 0$  folgt, dass  $A$  nicht invertierbar ist, da die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Eine Veranschaulichung hiervon ist z.B. durch das Spatprodukt (11.6) der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren gegeben. Sobald die drei Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear abhängig sind, verschwindet mit dem Spatprodukt das von ihnen aufgespannte Volumen und damit die Determinante der von ihnen gebildeten Matrix.

i) Der Produktsatz besagt, dass die Determinante des Produktes zweier Matrizen durch das Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen gegeben ist:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B). \quad (11.18)$$

Als Spezialfall wenden wir den Produktsatz auf Matrix  $A$  und inverse Matrix  $A^{-1}$  an, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E. \quad (11.19)$$

Bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so kann man auf der linken Seite den Produktsatz (11.18) und auf der rechten Seite a) verwenden:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = (\det A) \cdot (\det A^{-1}) = \det E = 1. \quad (11.20)$$

Damit erhalten wir das Ergebnis, dass die Determinante der inversen Matrix  $A^{-1}$  durch das Inverse der Determinante der Matrix  $A$  gegeben ist:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \quad (11.21)$$

Ist also  $\det A = 0$ , dann existiert  $A^{-1}$  nicht, siehe h).

j) Für eine orthonormale Matrix  $R$ , die die Eigenschaft (10.40) erfüllt, gilt:

$$\frac{1}{\det R} = \det R^{-1} = \det R^T = \det R. \quad (11.22)$$

Im ersten Schritt wurde (11.21) verwendet, im zweiten Schritt wurde (10.55) beachtet und schließlich konnte (11.17) angewandt werden. Aus (11.22) ergibt sich dann:

$$\det R = \pm 1. \quad (11.23)$$

Man wählt üblicherweise eine orthonormale Matrix mit der Eigenschaft  $\det R = 1$ , da dann ein Rechtssystem wieder in ein Rechtssystem abgebildet wird.

Wir wenden nun diese Determinanten-Eigenschaften an, um die Determinante der obigen  $3 \times 3$ -Matrix (11.4) erneut zu berechnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot (-1) = 3. \quad (11.24)$$

Im ersten Schritt wurde mit Hilfe von d) die erste und zweite Spalte vertauscht. Anschließend wurde im zweiten Schritt e) dadurch angewandt, dass von der dritten Spalte das  $1/3$ -Fache der ersten Spalte subtrahiert wurde. Im dritten Schritt wurde nochmals e) verwendet, nun wurde aber von der dritten Spalte das  $1/3$ -Fache der zweiten Spalte subtrahiert. Und schließlich führte der Laplacesche Entwicklungssatz (11.8) bzw. (11.9) dazu, dass sich die Determinante aus dem Produkt der Diagonalelemente unmittelbar berechnen lässt.

## 11.4 Inverse Matrix

Mit Hilfe der Cramerschen Regel lässt sich das Inverse einer Matrix  $A$ , sofern dieses existiert, mit Hilfe von Determinanten wie folgt berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A. \quad (11.25)$$

Hierbei bezeichnet

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji} \quad (11.26)$$

die Adjunkte der Matrix  $A$ . Sie wird aus den Determinanten aller Untermatrizen  $A_{ji}$  gebildet.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine allgemeine  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (11.27)$$

deren Determinante schon in (11.2) berechnet wurde. Gemäß (11.26) lautet deren Adjunkte

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} a_{22} & (-1)^{1+2} a_{21} \\ (-1)^{2+1} a_{12} & (-1)^{2+2} a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (11.28)$$

Damit ergibt sich die zu  $A$  inverse Matrix mit Hilfe von (11.25) zu

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \quad (11.29)$$

Dieses Ergebnis hatten wir schon in (10.47) erwähnt.

Nun betrachten wir noch als zweites Beispiel die  $3 \times 3$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (11.30)$$

mit der Determinante

$$\det A = 8 + 0 + 0 - (2 + 2 + 0) = 4. \quad (11.31)$$

Da  $\det A \neq 0$  ist, existiert die zu  $A$  inverse Matrix  $A^{-1}$ , die nun mit der Cramerschen Regel berechnet wird. Die Adjunkte von  $A$  ist nun aufgrund von (11.26) eine  $3 \times 3$ -Matrix mit Determinanten von  $2 \times 2$ -Matrizen als Einträgen:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T. \quad (11.32)$$

Hieraus folgt dann mit (11.25) die zu  $A$  inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (11.33)$$

Zur Probe berechnen wir noch:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \quad (11.34)$$



# Kapitel 12

## Lineare Gleichungssysteme

Bei vielen praktischen Fragestellungen treten lineare Gleichungssysteme auf. Es handelt sich hierbei um lineare Gleichungssysteme mit einer oder mehreren Unbekannten, die alle gleichzeitig erfüllt sein sollen.

### 12.1 Definition

Allgemein lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten immer auf die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12.1}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n. \tag{12.2}$$

Lineare Gleichungssysteme, bei denen alle  $b_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  gleich Null sind, werden homogen genannt, andernfalls nennt man sie inhomogen. Homogene Gleichungssysteme besitzen stets mindestens die sogenannte triviale Lösung, bei der alle Unbekannten gleich Null sind. Bei inhomogenen Gleichungssystemen kann dagegen der Fall eintreten, dass überhaupt keine Lösung existiert.

### 12.2 Matrixform

Für die Behandlung linearer Gleichungssysteme ist es nützlich, alle Koeffizienten  $a_{ij}$  zu einer Matrix  $A$ , der sogenannten Koeffizientenmatrix, zusammenzufassen. Entsprechend lassen sich auch alle Unbekannten und die rechte Seite des Gleichungssystems zu Vektoren, also einspaltigen

Matrizen, zusammenfassen:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

Damit schreibt sich ein lineares Gleichungssystem unter Benutzung der Matrix-Multiplikation kurz

$$A\vec{x} = \vec{b}. \quad (12.4)$$

## 12.3 Lösbarkeit

Ein Vektor  $\vec{x}$  ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn  $A\vec{x} = \vec{b}$  gilt. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems bezeichnet man als:

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x} \mid A\vec{x} = \vec{b} \}. \quad (12.5)$$

Ob und wie viele Lösungen ein lineares Gleichungssystem besitzt, ist unterschiedlich. Es können die folgenden Fälle auftreten:

- a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, d.h. die Lösungsmenge ist die leere Menge  $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$ .
- b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung, d.h. die Lösungsmenge enthält genau ein Element.
- c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge enthält also dann unendlich viele  $n$ -Tupel, die alle Gleichungen des Systems lösen.

## 12.4 Gauß-Verfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems lässt sich grundsätzlich mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix bestimmen. Hierzu fügt man an die Koeffizientenmatrix  $A$  eine Spalte mit dem Inhomogenitätenvektor  $\vec{b}$  hinzu:

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right). \quad (12.6)$$

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems verändert sich nicht, wenn eine der drei elementaren Zeilenumformungen vorgenommen wird:

- a) Vertauschung zweier Zeilen.
- b) Multiplizieren einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl.
- c) Addieren einer Zeile oder des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Im Rahmen des Gauß-Verfahrens wendet man diese drei elementaren Zeilenumformungen iterativ an, um die erweiterte Koeffizientenmatrix in die sogenannte Stufenform zu überführen:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1k} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{kk} & \dots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array} \right). \quad (12.7)$$

Um immer genau diese Form zu erhalten, muss man manchmal auch Spaltenvertauschungen vornehmen. Die ändern dann die Reihenfolge der Variablen, was man am Ende berücksichtigen muss. Außerdem nehmen wir bei der obigen Stufenform an, dass  $a'_{jj} \neq 0$  für  $j = 1, \dots, k$ . Die Anzahl der Lösungen lässt sich dann an den Koeffizienten  $b'_i$  mit  $i = 1, \dots, m$  ablesen:

- a) Ist mindestens ein  $b'_i$  mit  $i = k + 1, \dots, m$  von Null verschieden, so gibt es keine Lösung.
- b) Sind alle  $b'_{k+1}, \dots, b'_m$  gleich Null oder gilt  $k = m$ , so gilt
  - i) ist  $k = n$ , so ist das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar.
  - ii) ist  $k < n$ , so gibt es unendlich viele Lösungen. Der Lösungsraum hat dann die Dimension  $n - k$ .

## 12.5 Gauß-Jordan-Verfahren

Durch weitere elementare Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix von der Stufenform auf die reduzierte Stufenform bringen:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a''_{1k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a''_{2k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a''_{kk+1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_m \end{array} \right). \quad (12.8)$$

Sofern es eine Lösung gibt, falls also  $b''_{k+1} = \dots = b''_m = 0$  gilt oder  $k = m$ , dann lautet die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ \vdots \\ b''_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a''_{1k+1} & -a''_{1k+2} & \cdots & -a''_{1n} \\ -a''_{2k+1} & -a''_{2k+2} & \cdots & -a''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a''_{kk+1} & -a''_{kk+2} & \cdots & -a''_{kn} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k} \right\}. \quad (12.9)$$

## 12.6 Beispiel für eindeutige Lösung

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1. \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad (12.10)$$

Es besitzt die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right). \quad (12.11)$$

Wir wenden nun elementare Zeilenumformungen an:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) & \textcircled{2} \quad & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \\ \textcircled{3} \quad & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right) & \textcircled{4} \quad & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Hierbei wurde im Schritt ① das Zweifache der ersten Zeile von der zweiten Zeile abgezogen. Beim Schritt ② wird zum einen die zweite Zeile in ihr Negatives überführt, zum anderen wird zur dritten Zeile die zweite Zeile hinzuaddiert. Schließlich wird im Schritt ③ die dritte Zeile mit  $(-1/3)$  multipliziert, während von der ersten Zeile das Zweifache der zweiten Zeile subtrahiert wird. Im letzten Schritt ④ wird dann zur ersten Zeile das Dreifache der dritten Zeile addiert und von der zweiten Zeile das Zweifache der dritten Zeile abgezogen. Am Ende lesen wir aus (12.12) ab, dass es eine eindeutige Lösung gibt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}. \quad (12.13)$$

Zur Probe berechnen wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (12.14)$$

Diese eindeutige Lösung folgt auch durch Invertierung der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12.15)$$

die die Determinante

$$\det A = -3 + 2 - (-4) = 3 \quad (12.16)$$

besitzt. Da  $\det A = 3 \neq 0$  ist, existiert die Inverse zu  $A$ . Bilden wir die Adjunkte zu  $A$  gemäß (11.26)

$$\operatorname{adj}A = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T, \quad (12.17)$$

so folgt die Inverse  $A^{-1}$  aus (11.25):

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}A}{\det A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.18)$$

Der eindeutige Lösungsvektor ergibt sich damit zu

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

## 12.7 Weiteres Beispiel

Als letztes Beispiel sei das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned} \quad (12.20)$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet hier

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right). \quad (12.21)$$

Elementare Zeilenumformungen ergeben zunächst

$$\textcircled{1} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \right), \quad (12.22)$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad (12.23)$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (12.24)$$

Im Schritt  $\textcircled{1}$  wird die zweite von der ersten Zeile abgezogen. Außerdem wird von der dritten Zeile das Dreifache der ersten Zeile abgezogen. Ferner wird im Schritt  $\textcircled{2}$  von der ersten Zeile die Hälfte der zweiten Zeile abgezogen, die Einträge der zweiten Zeile werden halbiert und zur dritten Zeile wird die zweite Zeile hinzuaddiert. Um die reduzierte Stufenform zu erhalten, müssen im Schritt  $\textcircled{3}$  schließlich noch zweite und dritte Spalte vertauscht werden. Der zu (12.24) gehörende Lösungsvektor lautet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}. \quad (12.25)$$

Wegen der Vertauschung der zweiten und der dritten Spalte müssen aber noch die zweite und die dritte Komponente des Lösungsvektors vertauscht werden, so dass wir erhalten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s + t \\ s \\ 1 + t \\ t \end{pmatrix}. \quad (12.26)$$

Und schließlich machen wir noch die Probe:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= -s + t + s + 1 + t - 2t = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -s + t + s - 1 - t = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3s + 3t + 3s + 1 + t - 4t = 1. \end{aligned} \quad (12.27)$$