



GYMNASIUM WEIERHOF AM DONNERSBERG

FACHARBEIT

Bose-Einstein-Kondensate

Florian Grulich

Betreuende Lehrkraft:
Frau Nicole HAUPT

12. Mai 2020

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich in Besonderem Maße bei Herrn Priv.-Doz. Dr. Pelster von der Technischen Universität Kaiserslautern bedanken. Er hat mir das komplexe und für mich anfangs völlig neue Thema verständlich näher gebracht und mich bei der Erstellung dieser Arbeit die ganze Zeit mit viel Engagement, Sorgfalt und Herzlichkeit unterstützt. Auch hat er mir hierbei die Grenzen meines Wissens aufgezeigt und mir geholfen, diese zu überwinden. Des Weiteren möchte ich mich bei meiner betreuenden Lehrerin Frau Haupt und allen anderen bedanken, die mich bei der Erstellung der Arbeit unterstützt haben.

Abstract

Diese Arbeit setzt sich mit der Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten auseinander. Hierbei wird erörtert, was ein Bose-Einstein-Kondensat ist, unter welchen Bedingungen es existiert, welche Eigenschaften es hat und wie sich ein Bose-Einstein-Kondensat experimentell umsetzen lässt. Ein Schwerpunkt liegt hierbei auf der Betrachtung eindimensionaler wechselwirkungsfreier Bose-Einstein-Kondensate in harmonischen Fallen. Dabei werden zunächst allgemeine theoretische Grundlagen von Bose-Einstein-Kondensaten erläutert und speziell auf eindimensionale Bose-Einstein-Kondensate in harmonischen Fallen ausgeweitet. Des Weiteren werden gängige Formen der experimentellen Umsetzung von Bose-Einstein-Kondensaten dargelegt und aufbauend auf den gewonnenen Erkenntnissen werden numerisch die Abhängigkeiten einzelner Parameter eindimensionaler wechselwirkungsfreier Bose-Gase in harmonischen Fallen mittels eigens angefertigter Graphen untersucht. Die Analyse ergab, dass es sich bei Bose-Einstein-Kondensaten um eine makroskopische Besetzung des Grundzustandes durch ununterscheidbare Bosonen handelt. Ferner verhält sich dieses wie ein einziges makroskopisches Quantenobjekt und lässt sich durch eine einzige Wellenfunktion beschreiben. Eindimensionale wechselwirkungsfreie Bose-Gase in harmonischen Fallen sind durch die Eindimensionalität, das begrenzende Potenzial und die Vernachlässigung der Wechselwirkung vereinfacht beschreibbar, existieren aber nur unter speziellen Umständen, zum Beispiel einer maximalen Teilchenzahl. Die numerische Untersuchung von eindimensionalen wechselwirkungsfreien Bose-Einstein-Kondensaten stellt fest, dass das chemische Potenzial von der Teilchenzahl und der Temperatur abhängt, wobei dieses sich beim Erreichen der kritischen Temperatur der Grundzustandsenergie annähert. Zur experimentellen Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten muss ein Bose-Gas gängiger Weise in einer Atomfalle gefangen und bis zum Erreichen der kritischen Temperatur abgekühlt werden. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchung stimmen qualitativ mit der zugrundeliegenden Theorie überein, sind jedoch nicht quantitativ aussagekräftig.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Hauptteil	2
2.1	Theoretische Grundlagen	2
2.1.1	Bose-Einstein-Verteilung	2
2.1.2	Bose-Einstein-Kondensation	4
2.2	Eindimensionale BECs in harmonischen Potenzialen	6
2.3	Experimentelle Umsetzung	8
2.3.1	Erzeugung	8
2.3.1.1	Magneto-optische Falle	9
2.3.1.2	Kühlungsverfahren	10
2.3.2	Nachweis	10
2.4	Rechenbeispiele	12
3	Fazit und Ausblick	16
4	Anhang	18
4.1	Verwendete Programme	18
4.2	Quellcodes	19
	Literaturquellen	21
	Abbildungsquellen	22

Teil 1

Einleitung

Außerhalb wissenschaftlicher Kreise dürfte es nur wenige Zeitgenossen geben, die mit dem Begriff Bose-Einstein-Kondensation etwas anfangen können. Und dies obwohl Bose-Einstein-Kondensate schon heute, aber vor allem in der Zukunft eine entscheidende Rolle in der Physik und vielleicht sogar in unserem alltäglichen Leben spielen werden. Bei Bose-Einstein-Kondensaten handelt es sich um ein sogenanntes makroskopisches Quantenphänomen. Hinter diesem widersprüchlich klingenden Begriff verbirgt sich eine Reihe an Phänomenen, bei denen durch kollektives Verhalten einer makroskopischen Anzahl an Quantenobjekten quantenmechanische Effekte, die normalerweise nur sehr schwer erfassbar sind, makroskopisch sichtbar werden. Weitere Beispiele solcher makroskopischen Quantenphänomene sind die Supraleitung, Suprafluidität und der Quanten-Hall-Effekt.

Die Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten stellt eine Schnittstelle zwischen der Quantenmechanik, Thermodynamik und Statistik dar. Dies bietet eine Vielzahl an Möglichkeiten zur Untersuchung quantenmechanischer Effekte, aber auch zu Forschungen in anderen Bereichen der Physik. So können mittels eines Analogons Experimente an ultrakalten Quantengasen zur Erforschung schwarzer Löcher genutzt werden. Es gibt auch schon Ideen zur technischen Anwendung von Bose-Einstein-Kondensaten, wie beispielsweise Atomlaser. 2010 wurde sogar erstmals ein Bose-Einstein-Kondensat aus Photonen erzeugt, das andere Eigenschaften als Laserlicht besitzt.

In meiner Arbeit werde ich mich mit der Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten auseinandersetzen. Hierbei sollen die Fragen geklärt werden, was ein Bose-Einstein-Kondensat ist, unter welchen Bedingungen es existiert, welche Eigenschaften es hat und wie sich ein Bose-Einstein-Kondensat experimentell umsetzen lässt. Da das Thema der Bose-Einstein-Kondensation sehr umfangreich ist, habe ich bei meiner Arbeit einen Schwerpunkt auf die Betrachtung eindimensionaler, nichtwechselwirkender Bose-Einstein-Kondensate in harmonischen Fallen gelegt. Ich habe mich speziell auf diesen Bereich konzentriert, da die Rechnungen und die mathematische Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten ohne Einschränkungen das Schulniveau weit überschreitet und sich durch die Eindimensionalität und das begrenzende harmonische Potenzial sowie die Vernachlässigung einer Wechselwirkung einfacher zu beschreibende Bedingungen ergeben.

Das erste Kapitel der Arbeit setzt sich mit der allgemeinen theoretischen Grundlage und Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten und dem Vorgang der Kondensation auseinander. Das folgende Kapitel behandelt speziell eindimensionale Bose-Einstein-Kondensate in harmonischen Fallen. Der darauf folgende Abschnitt erläutert gängige Formen der experimentellen Umsetzung von Bose-Einstein-Kondensaten. Aufbauend auf diese Kapitel werde ich im letzten Abschnitt des Hauptteils numerisch die Abhängigkeiten einzelner Parameter in eindimensionalen Bose-Gasen in harmonischen Fallen mittels eigens angefertigter Graphen untersuchen. Daraufhin folgt in einem Fazit eine Zusammenfassung der in den vorangegangenen Kapiteln erlangten Ergebnisse und eine Diskussion dieser. Letztlich werde ich noch einen Ausblick geben, welche weiteren Arbeiten auf Grundlage dieser Arbeit durchgeführt werden könnten.

Teil 2

Hauptteil

2.1 Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel befasst sich mit der theoretischen Grundlage von Bose-Einstein-Kondensaten. Der erste Abschnitt erläutert die Quantenstatistik der Bosonen, die dem Konzept der Bose-Einstein-Kondensation zu Grunde liegt. Der zweite Abschnitt befasst sich mit der Realisierung des Bose-Einstein-Kondensats, dem Vorgang der Kondensation sowie grundlegenden Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten.

2.1.1 Bose-Einstein-Verteilung

Die theoretische Grundlage für Bose-Einstein-Kondensate bildete eine Arbeit des indischen Physikers S. N. Bose über die Quantenstatistik von Photonen aus dem Jahre 1924. Hierbei leitete Bose die Planck'sche Strahlungsformel statistisch her. Dabei beschrieb er Photonen als ununterscheidbare, masselose Teilchen.

Bei Photonen handelt es sich um sogenannte Bosonen. Heute unterscheidet man im Standardmodell der Teilchenphysik zwischen zwei Arten von Teilchen, den nach Bose benannten Bosonen und die auf Enrico Fermi zurück gehenden Fermionen. Bosonen zeichnen sich durch einen ganzzahligen Spin in Einheiten von $\hbar$ ($\frac{h}{2\pi}$) beziehungsweise eine symmetrische Wellenfunktion aus, Fermionen hingegen besitzen einen halbzahligen Spin beziehungsweise eine antisymmetrische Wellenfunktion. Die Symmetrie der Wellenfunktionen hat zur Folge, dass das Vertauschen zweier identischer Bosonen sich nicht auf die Gesamtwellenfunktion eines Systems auswirkt, während das Vertauschen zweier Fermionen das Vorzeichen der Wellenfunktion ändert. Fermionen unterliegen dem Pauli-Prinzip, nach welchem sich in einem Vielteilchensystem nie zwei Teilchen in demselben Quantenzustand befinden können. Dies ist jedoch die Definition identischer Teilchen (vgl. Pater (2007): 3f.). Für Bosonen gilt das Pauli-Prinzip nicht. Es können sich beliebig viele Bosonen innerhalb eines Vielteilchensystems im gleichen Quantenzustand befinden. Es kann also innerhalb eines Vielteilchensystems beliebig viele identische Bosonen geben (weitere Informationen zu Bosonen und Fermionen siehe Pater (2007): 4ff.).

Bose hatte in seiner Arbeit die Photonen als masselose Teilchen beschrieben. Einstein erweiterte Boses Quantenstatistik der Photonen im folgenden Jahr auf massereiche Bosonen. Das Ergebnis dieser Arbeit war die Bose-Einstein-Verteilung, auch Bose-Einstein-Statistik genannt, mittels derer sich ein ideales Bose-Gas, also ein ideales Gas aus ununterscheidbaren Bosonen, statistisch beschreiben lässt. Bei der Bose-Einstein-Verteilung handelt es sich um die allgemeine Quantenstatistik der Bosonen. Die Verteilungsfunktion (2.1) beschreibt die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, dass ein Boson innerhalb eines Bose-Gases bei einer bestimmten Temperatur T und einem bestimmten chemischen Potenzial μ die Energie E aufweist. Ferner bezeichnet k_B die Boltzmann-Konstante.

$$P(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} - 1} \quad (2.1)$$

Die Quantenstatistik für Fermionen wird durch die Fermi-Dirac-Verteilung (2.2) beschrieben. Diese bezieht sich auf sogenannte Fermi-Gase, die aus ununterscheidbaren Fermionen bestehen.

$$P(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1} \quad (2.2)$$

Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Quantenstatistiken besteht darin, dass die Fermi-Dirac-Verteilung das Paulische Ausschlussprinzip berücksichtigt, und sich deshalb nach der Fermi-Dirac-Verteilung nie zwei oder mehr Fermionen im gleichen Quantenzustand befinden können, wohingegen nach der Bose-Einstein-Verteilung die makroskopische Besetzung eines einzigen Quantenzustandes möglich ist. Das -1 beziehungsweise +1 im Nenner der Bose-Einstein- beziehungsweise der Fermi-Dirac-Verteilung repräsentiert die Ununterscheidbarkeit der Teilchen, wobei -1 die symmetrische Wellenfunktion der Bosonen und +1 die antisymmetrische Wellenfunktion der Fermionen widerspiegelt (vgl. Pelster (2004): 45).

Für hohe Temperaturen über einigen Grad Kelvin können diese Terme jedoch vernachlässigt werden und man erhält dann als Näherung für die Bose-Einstein- und die Fermi-Dirac-Verteilung die Maxwell-Boltzmann-Verteilung (2.3).

$$P(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}}} \quad (2.3)$$

Mittels der Maxwell-Boltzmann-Verteilung, die der klassischen Statistik zuzuordnen ist, lassen sich alle makroskopischen Größen eines idealen Gases bei Zimmertemperatur beschreiben. Diese stellt jedoch nur einen Spezialfall der Quantenstatistiken für hohe Temperaturen dar. Bei niedrigen Temperaturen - nur knapp über dem absoluten Nullpunkt - lassen sich quantenmechanische Effekte, wie die Ununterscheidbarkeit der Teilchen und das Pauli-Prinzip für Fermionen, nicht mehr vernachlässigen und die klassische Statistik liefert keine hinreichenden Ergebnisse mehr. Diese Abweichung zwischen den Verteilungsfunktionen wird durch Abbildung 1 schematisch verdeutlicht. Hieran kann abgelesen werden, dass die Maxwell-Boltzmann

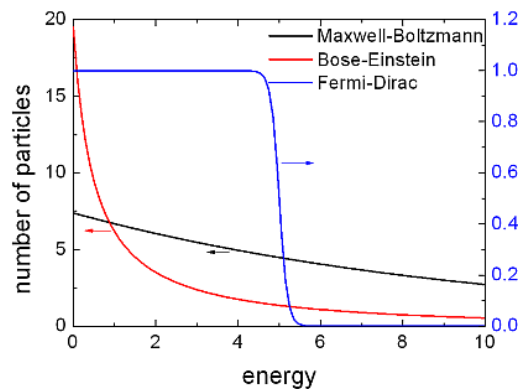


Abbildung 1: Schematischer Vergleich der Teilchenverteilungen über die Energien der Bose-Einstein-, der Fermi-Dirac- und Maxwell-Boltzmann-Verteilung. [4]

und die Bose-Einstein-Verteilung Mehrfachbesetzungen eines Energieniveaus zulassen, während bei der Fermi-Dirac-Verteilung jedes Energieniveau nur einfach besetzt werden kann, was dem Paulischen Ausschlussprinzip für Fermionen geschuldet ist. Zudem wird deutlich, dass die Bose-Einstein-Verteilung für niedrige Energien einen steileren Anstieg aufweist als die Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Hieraus lässt sich schließen, dass die Maxwell-Boltzmann-Verteilung für die Angabe der Besetzung niedriger Energieniveaus ungeeignet ist.

Bose-Gase aus Atomen Obwohl Atome nur aus Fermionen zusammengesetzt sind, können bestimmte Isotope auch Bose-Gase bilden. Dies ist möglich, sofern ihr Gesamtspin ganzzahlig ist. Da bei einem nach außen elektrisch neutralen Atom die Anzahl an Protonen der an Elektronen entspricht, weisen nur Isotope mit einer geraden Anzahl an Neutronen einen ganzzahligen Gesamtspin und damit bosonische Eigenschaften auf. Diese Isotope können somit Bose-Gase bilden.

2.1.2 Bose-Einstein-Kondensation

Einstein postulierte anhand der Bose-Einstein-Statistik, dass es bei niedrigen Temperaturen nahe des absoluten Nullpunktes in einem idealen Bose-Gas zu einem Phasenübergang kommen würde, bei dem die Materie in einen neuen Zustand übergeht, in dem es zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustandes kommen würde. Der Grundzustand bezeichnet den Energiezustand eines Teilchens, in dem es seine minimal mögliche Energie aufweist. Eine solche makroskopische Besetzung des Grundzustandes nannte er Kondensat. Heute spricht man von Bose-Einstein Kondensaten oder kurz BECs, nach dem englischen *Bose-Einstein condensate*.

Eine anschauliche Erklärung dieses Vorgangs erhält man über die Welle-Teilchen-Dualität von Quantenobjekten, welche bei geringer Temperatur besonders zum Tragen kommt. Die de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} ist ein Maß für die Ausdehnung der Wellenpakete eines Teilchens und wird durch die Formel

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{m v} \quad (2.4)$$

beschrieben, wobei mv den Impuls beschreibt. Daraus folgt, dass ein höherer Impuls zu einer kleinen de Broglie-Wellenlänge führt. Setzt man die Energie eines idealen Gases mit der kinetischen Energie gleich, so erhält man durch Umformung für den Impuls:

$$\pi k_B T = \frac{1}{2} m v^2 \implies (2 \pi k_B T m)^{\frac{1}{2}} = m v \quad (2.5)$$

Einsetzen von (2.5) in (2.6) ergibt für die thermische de Broglie-Wellenlänge (vgl. Richter (2008) : 8)

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{(2 \pi m k_B T)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.6)$$

Dadurch wird der Zusammenhang zwischen Temperatur und de Broglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} \sim T^{-\frac{1}{2}}$ deutlich. (vgl. Pater 2007: 7) Bei hohen Temperaturen über einigen Grad Kelvin ist somit die Wellenlänge von Teilchen gegenüber ihrem mittleren Abstand d vernachlässigbar $\lambda_{dB} \lll d$. Eine makroskopische Grundzustandswellenfunktion beginnt genau dann zu entstehen, wenn sich die Wellenpakete der Teilchen zu überlagern beginnen. In diesem Moment beginnen die

Teilchen zu interferieren und eine makroskopische Grundzustandswellenfunktion auszubilden. Dies ist genau dann der Fall, wenn die de Broglie-Wellenlänge den mittleren Teilchenabstand zu überschreiten beginnt. Der mittlere Teilchenabstand d ist im dreidimensionalen Raum in einem Gas der Teilchendichte n gegeben durch $d = n^{-\frac{1}{3}}$. Für die kritische Temperatur entspricht der mittlere Teilchenabstand etwa der de Broglie-Wellenlänge. Somit erhält man für die kritische Temperatur den Zusammenhang (vgl. Pater 2007: 7):

$$\lambda_{\text{dB}} \approx d = n^{-\frac{1}{3}} \quad (2.7)$$

zwischen de Broglie-Wellenlänge und der Teilchendichte. Durch Einsetzen von (2.7) in (2.6) und Umformen ergibt sich für die kritische Temperatur T_c , ab der ein freies Bose-Gas im dreidimensionalen Raum zu kondensieren beginnt in Abhängigkeit von der Teilchendichte n :

$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi m k_B} n^{\frac{2}{3}} \quad (2.8)$$

Das bei Temperaturen kleiner gleich der kritischen Temperatur entstehende Kondensat kann als ein einziges makroskopisches Quantenobjekt angesehen werden. Das besondere an diesem Phasenübergang ist, dass er der einzige, mir bekannte Phasenübergang in der Physik ist, der ohne direkte Wechselwirkung der Teilchen stattfindet. Obwohl die Wechselwirkung für den Phasenübergang nicht notwendig ist, kann die Wechselwirkung zwischen den Teilchen bei der Beschreibung von BECs, zum Beispiel ihrer thermodynamischen und dynamischen Eigenschaften, nicht vernachlässigt werden. Da bei Beschreibung und experimenteller Umsetzung von Bose-Einstein-Kondensaten jedoch kleine Teilchendichten notwendig sind, kann man die Zwei-Teilchenwechselwirkung häufig näherungsweise vernachlässigen.

Neben der sehr anschaulichen Erklärung der Kondensation anhand der thermischen de Broglie-Wellenlänge kann man die makroskopische Besetzung des Grundzustandes auch anhand der Bose-Einstein-Verteilung (2.1) herleiten, wenn man den Grenzwert von T gegen 0 betrachtet. Nähert sich die Temperatur von oben der kritischen Temperatur, so nähert sich das chemische Potenzial μ mit sinkender Temperatur immer stärker der Grundzustandsenergie E_0 , die ein Teilchen im Grundzustand hat. Es kommt für $E = E_0$ zu einem exponentiellen Wachstum der Exponentialfunktion im Nenner von (2.1). Dies hat zur Folge, dass die Verteilungsfunktion für $E = E_0$ stark divergiert, wenn man sich der kritischen Temperatur von oben nähert. Daraus folgt, dass die Bose-Einstein-Verteilung nicht mehr alle Teilchen aufnehmen kann. Alle überschüssigen Teilchen gehen in den Grundzustand über, was eine makroskopische Besetzung des Selben zur Folge hat. Je niedriger die Temperatur ist, desto mehr Teilchen befinden sich im Grundzustand (vgl. Richter (2008): 8). Bei Experimenten ist der Regelfall, dass nur ein Teil des Gases in den Grundzustand übergeht und kondensiert, wohingegen der größere Teil der Atome sich in thermisch angeregten Zuständen befindet. Bei einer Temperatur von 0 Grad Kelvin befinden sich alle Teilchen im Grundzustand.

Da das Konzept des Bose-Einstein-Kondensats auf der makroskopischen Besetzung eines Quantenzustandes beruht, können nur Bosonen ein Solches bilden. Für Fermionen ist dies durch das Paulische Ausschlussprinzip nicht möglich. Zusammenfassend ist ein BEC ein Zusammenschluss ununterscheidbarer Bosonen in einem idealen Bose-Gas, die sich im Grundzustand befinden und sich wie ein einziges makroskopisches Quantenobjekt verhalten.

2.2 Eindimensionale BECs in harmonischen Potenzialen

Nachdem im letzten Kapitel die allgemeinen theoretischen Grundlagen zu BECs erläutert wurden, thematisiert dieses Kapitel BECs in harmonischen Potenzialen. Speziell werden hierbei eindimensionale BECs untersucht.

Da aktuell BECs gängiger Weise innerhalb von harmonischen Potenzialen experimentell umgesetzt werden, beschränkt man sich auch bei der theoretischen Betrachtung oft auf die Beschreibung von BECs innerhalb von harmonischen Potenzialen. Ein solches harmonisches Potenzial erzeugt eine ortsabhängige Rückstellkraft, die dafür sorgt, dass ein Teilchen eine vom Grad der Auslenkung aus dem Potenzialminimum abhängige Kraft in Richtung des Potenzialminimums erfährt. Das harmonische Potenzial $U(\vec{x})$ einer dreidimensionalen magnetischen Falle wird zum Beispiel beschrieben durch (vgl. Kienzle 2013: 7):

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.9)$$

Dadurch, dass die Potenzialhöhe in jeder Raumrichtung j immer nur von der jeweiligen Fallenkreisfrequenz ω_j abhängt, kann die Potenzialhöhe in jeder Raumachse unabhängig voneinander variiert werden. So ist es in der Theorie denkbar, dass die Fallenkreisfrequenz in eine oder zwei Raumachsen gegenüber der Energie der Teilchen derartig hoch gewählt wird, dass es quasi keine Ausdehnung des Gases beziehungsweise Kondensates in diese Raumrichtung gibt. Auf diese Weise sind 1D oder 2D Bose-Einstein-Kondensate in der Theorie vorstellbar. Es ist tatsächlich möglich, niederdimensionale, also eindimensionale oder zweidimensionale BECs, experimentell zu erzeugen. Hierfür müssen allerdings bestimmte Bedingungen erfüllt sein.

Die Bose-Einstein-Kondensation ist bei einem freien Gas in einem homogenen System im 1D oder 2D unmöglich, wird aber in Atomfallen wie einer Magnetfalle möglich, da das begrenzende Potenzial die Dichte an Zuständen verändert (vgl. Görlitz et al.: 1). Axialsymmetrische harmonische Fallen werden durch vier Größen gekennzeichnet. Ihren Radius $R_\perp$, ihre axiale Halblänge R_z , die sogenannte Streulänge a , die die Stärke der Zwei-Teilchen-Wechselwirkung wiedergibt und die sogenannte healing-length $\xi = (4\pi n a)^{-\frac{1}{2}}$, wobei n die Dichte des Gases beschreibt. Im Normalfall gilt bei der Erzeugung eines BEC $R_\perp, R_z \gg \xi \gg a$. Um ein 1D BEC experimentell umzusetzen, muss aber $R_z > \xi > R_\perp$ gelten. Damit ein niederdimensionales BEC in einer harmonischen Falle realisiert werden kann, muss für die Wechselwirkungsenergie μ_{3D} eines schwach wechselwirkenden BEC, die im 3D mit dem chemischen Potenzial zusammenhängt, gelten $\mu_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2 a n}{m} < \hbar\omega_\perp$, wobei m die Masse des Kondensats und $\omega_\perp$ die transversale Frequenz der Falle beschreibt. Der Übergang zu einem eindimensionalen BEC ist demnach definiert durch $\mu_{3D} = \hbar\omega_\perp$.

Die maximale Anzahl an wechselwirkenden Teilchen ist in 1D BECs begrenzt. Dies hat zur Folge, dass es unter bestimmten Bedingungen jeweils eine Maximalanzahl an Teilchen gibt, die ein 1D BEC bilden können. So muss in der Praxis die Zahl an Teilchen in der Falle auf dieses Niveau herabgesenkt werden, um ein 1D BEC erzeugen zu können. Die Maximalzahl an Teilchen in einem 1D BEC N_{1D} ist gegeben durch

$$N_{1D} = \sqrt{\frac{32\hbar}{225ma^2}} \sqrt{\frac{\omega_t}{\omega_z^2}} \quad (2.10)$$

Die Formel zeigt, dass die Maximalzahl an Teilchen von der Streulänge a , der Masse m des Kondensats und den Fallenfrequenzen ω_t und ω_z abhängt. Unter diesen Umständen erhält das BEC eine zigarrenförmige Form. Man könnte also auch von einem quasi eindimensionalen BEC sprechen (vgl. Chikkatur et al.: 1).

Die Eindimensionalität hat auch Auswirkungen auf die Eigenschaften und somit auf die Beschreibung des Kondensats. So lässt sich die Energie E_n , die ein Teilchen auf dem n -ten Energieniveau in einem 1D BEC in einer harmonischen Falle hat, ausdrücken durch die Formel:

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.11)$$

Die Gesamtzahl N an Teilchen erhält man über Summierung der Bose-Einstein-Verteilung (2.1) über alle Energien E_n .

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - \mu}{k_B T}} - 1} \quad (2.12)$$

Dies gilt allerdings nur für Temperaturen über der kritischen Temperatur T_c , da die Verteilungsfunktion für $E = E_0$ unterhalb der kritischen Temperatur stark divergiert (s.o.). Aus diesem Grund separiert man N_0 , also die Teilchen, welche sich im Grundzustand befinden, aus der Summe und summiert dafür nicht mehr von 0 sondern von 1 an. Dass die Summe nun mit dem Index 1 statt 0 beginnt, ist dem geschuldet, dass der Wert der Summe für $n = 0$, nämlich N_0 gesondert betrachtet wird. So erhält man für die Gesamtteilchenzahl N nach Separierung von N_0

$$N = N_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - \mu}{k_B T}} - 1} \quad (2.13)$$

Da die kritische Temperatur T_c definiert ist als die Temperatur, bei der die Teilchen beginnen in den Grundzustand überzugehen, kann man sagen, dass für $T > T_c$ gilt, $N_0 = 0$. Somit ergibt sich N für $T > T_c$ als

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - \mu}{k_B T}} - 1} \quad (2.14)$$

Für Temperaturen T kleiner gleich der kritischen Temperatur gilt $N_0 \neq 0$. Stellt man die Gleichung (2.13) nach N_0 um, so erhält man für N_0 bei Temperaturen $T \leq T_c$

$$\mu \rightarrow E_0 \quad N_0 = N - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - E_0}{k_B T}} - 1} \quad (2.15)$$

Da das chemische Potenzial bei Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur der Grundzustandsenergie entspricht, kann man diese anstatt des chemischen Potenzials in (2.15) einsetzen. Setzt man $E_0 = \hbar \omega \frac{1}{2}$ aus (2.11) in (2.15) ein, so ergibt sich für N_0

$$N_0 = N - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega (n + \frac{1}{2}) - (\hbar \omega \frac{1}{2})}{k_B T}} - 1} \quad (2.16)$$

Die Anzahl der Teilchen im Grundzustand lässt sich somit bei bekannter Fallenfrequenz und bekannter Gesamtteilchenzahl berechnen, indem man die Aufsummierung der Bose-Einstein-Verteilung über alle angeregten Zustände von der Gesamtteilchenzahl abzieht. Um zu wissen, ob man sich bei einer bestimmten Temperatur tendenziell eher im Bereich des thermischen Gases oder des Kondensates befindet, ob also Teilchen im Grundzustand vorliegen oder nicht, kann man die Formel (2.17) nutzen.

$$T_{\text{H.O.}} = \frac{\hbar\omega}{k_{\text{B}}} \quad (2.17)$$

$T_{\text{H.O.}}$ stellt dabei eine Näherung für die kritische Temperatur dar. Dies ist keine genaue Angabe aber ein guter Richtwert für den gilt: Wenn $T \gg T_{\text{H.O.}}$, dann ist $N_0 = 0$. Man befindet sich in diesem Fall im thermischen Bereich. Ferner findet $T_{\text{H.O.}}$ eine Anwendung, wenn es darum geht, eine geeignete Skalierung für die Temperatur zu wählen, wenn man in einem kalten Bose-Gas die Abhängigkeit einer Größe von der Temperatur abbilden möchte.

Zusammenfassend werden BECs üblicherweise in einem harmonischen Potenzial umgesetzt. Es ist möglich dieses Potenzial so zu gestalten, dass unter bestimmten Umständen 1D BECs erzeugt werden können. In einem 1D BEC lässt sich die Energie der diskreten Energieniveaus, auf denen sich ein Teilchen befinden kann, genau beschreiben. Schließlich lässt sich unter diesen Umständen die Anzahl an kondensierten Teilchen in Abhängigkeit von Temperatur, Teilchenzahl und chemischem Potenzial berechnen, indem man die Bose-Einstein-Verteilung über alle angeregten Zustände summiert und dies von der Gesamtteilchenzahl abzieht.

2.3 Experimentelle Umsetzung

Die in den vorangegangenen Kapiteln theoretisch beschriebenen Bose-Einstein-Kondensate lassen sich auch experimentell erzeugen und nachweisen. Da diese allerdings, wie zuvor dargestellt wurde, nur unter bestimmten Bedingungen existieren können, bedarf es für ihre Erzeugung und den Nachweis der Erzeugung einiger spezieller Experimentalmethoden. Aus diesem Grund gelang es erst im Jahr 1995, also knapp 70 Jahre nachdem Einstein das Konzept der Bose-Einstein-Kondensate entwarf, Ketterle am MIT sowie Wiemann und Cornell am JILA (University of Colorado) mit ultrakalten Alkaligasen ein BEC experimentell zu erzeugen und nachzuweisen. Hierbei kühlten sie das Gas bis auf etwa 100nK ab. Alle drei erhielten dafür 2001 den Nobelpreis der Physik (vgl. Pater 2007: 3).

2.3.1 Erzeugung

Um ein BEC erzeugen zu können, bedarf es sowohl einer sehr geringen Teilchendichte als auch einer sehr geringen Temperatur. Aus diesem Grund muss bei der Erzeugung eines BECs ein Bose-Gas immer weiter abgekühlt werden, bis es zu einer Kondensation kommt. Um eine effektive Kühlung des Gases zu gewährleisten, darf keine Wechselwirkung zwischen Teilchen der Gaswolke und übrigen Teilchen aus der Umgebung stattfinden, die nicht Teil des ursprünglichen Bose-Gases waren. Bei einer solchen Wechselwirkung würden die Teilchen aus der Umgebung, die deutlich mehr Energie haben als die Teilchen im gekühlten Bose-Gas, ihre Energie teilweise an die Gasteilchen abgeben, was die Temperatur des Gases erhöhen wür-

de. Dies würde eine Abkühlung des Gases bis auf kritische Temperatur, also die Erzeugung eines BEC, unmöglich machen. Um diese Bedingungen zu gewährleisten, muss das Bose-Gas zunächst in sogenannten Atomfallen gefangen werden, bevor man mit der Kühlung des Gases beginnen kann. Diese halten das Gas von der übrigen Umgebung getrennt und sorgen zusätzlich dafür, dass das Gas als Ganzes sich während des Kühlungsprozesses nicht bewegen kann. Auch das würde ein effektives Kühlen des Gases nahezu unmöglich machen. Es wurden im Laufe der Zeit verschiedene Typen von Atomfallen entwickelt. Darunter die einfachere und kostengünstigere magneto-optische-Falle, nach dem englischen Magneto-Optical Trap kurz MOT genannt und die Gravito-Optical Surface Trap kurz GOST. Die ersten erzeugten BECs wurden in MOTs erzeugt, weswegen ich mich auf die Beschreibung der MOT beschränken werde.

2.3.1.1 Magneto-optische Falle

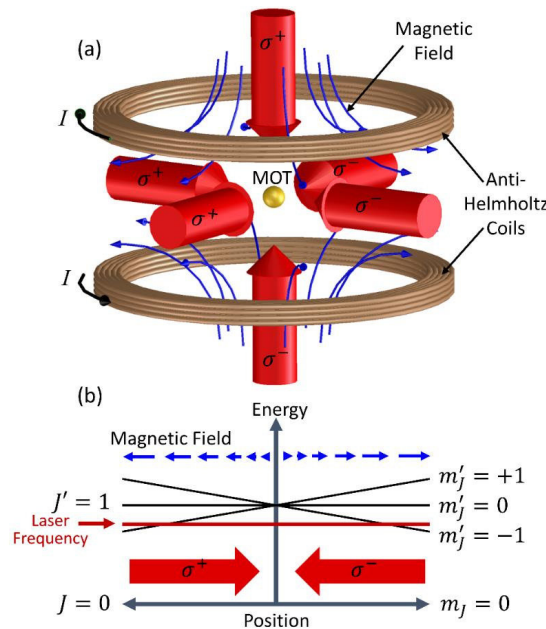


Abbildung 2: Schematische Darstellung einer magneto-optischen Falle. [3]

Eine MOT besteht im Wesentlichen aus drei Hauptkomponenten: Dem Vakuumsystem, sechs orthogonalen, polarisierten Laserstrahlen und einem Quadrupol Magnetfeld. Das Vakuumsystem dient dazu, Wechselwirkungen zwischen den Gasatomen in der Falle und den Atomen der Umgebung zu verhindern (Girodias 2015: 9). Das Magnetfeld dient dazu, die Gasatome in der Falle zu halten. Eine Anti-Helmholtz-Anordnung der Spule erzeugt ein punktförmiges harmonisches Potenzial im Zentrum der Spule, wie bereits durch (2.9) beschrieben. Durch den Zeemann-Effekt werden die Atome nicht nur durch eine ortsabhängige Rückstellkraft innerhalb der Falle gehalten, sondern sie werden auch ortsabhängig nach ihren Energieniveaus aufgespalten. Die Laserstrahlen dienen der Kühlung der Gaswolke. Es gibt in der MOT zwei Magnetfelder, ein schwaches, um den Druck der Laserstrahlen zu steuern, und ein stärkeres, um die Atome in der Falle zu halten.

2.3.1.2 Kühlungsverfahren

Bei den beiden vorgestellten Kühlungsverfahren handelt es sich um einfache und in der Praxis gängige, aber keineswegs um die einzigen oder besten Kühlmethoden in Zusammenhang mit BECs.

Laserkühlung Bei der Laserkühlung macht man sich den Vorgang der spontanen Emission zunutze, bei dem ein Elektron in einem Atom beim Zurückfallen aus einem angeregten Zustand ein Photon in beliebige Richtung emittiert. Hierzu bestrahlt man die Gaswolke mit resonantem, polarisiertem Laserlicht. Um zu verhindern, dass auf diese Weise langsame Atome wieder beschleunigt werden, wird eine Laseranordnung wie in Abbildung 2 verwendet. Zudem wird sich die ortsabhängige Separation der Energieniveaus zunutze gemacht. Das von den Lasern emittierte Licht ist gegenüber der Resonanzfrequenz der Atome leicht rotverschoben (vgl. Girodias 2015: 9). Bedingt durch den Doppler-Effekt entspricht es so aber genau der Resonanzfrequenz derjenigen Atome, die sich schnell auf den Strahl zubewegen. Alle anderen Atome werden durch das Licht nicht angeregt. Um die drei Raumrichtungen abzudecken, werden sechs orthogonale Strahlen verwendet, von denen je zwei gegenläufig sind. Es kommt zur Absorption und Emission eines Photons. Da die Photonen je aus nur einer Richtung absorbiert werden, aber durch den Prozess der spontanen Emission in alle Richtungen emittiert werden können, wird das Atom durch den Impuls des emittierten Photons in Absorptionsrichtung abgebremst. Dieser Abkühlungsprozess nennt sich optische Melasse (Girodias 2015:9, vgl. Pater 2007: 8f.). Die Frequenz der Laser muss die ganze Zeit angepasst werden, um immer tiefere Temperaturen zu erreichen, da eine geringere Rotverschiebung notwendig ist, um langsamere Atome anzuregen. Durch den Rückstoß bei der spontanen Emission, der dem Impuls des emittierten Photons entspricht, sind durch die Laserkühlung allerdings keine Temperaturen unter 10^{-4}K erreichbar. Um ein BEC erzeugen zu können, benötigt man jedoch in der Regel Temperaturen im Nanokelvinbereich oder darunter.

Evaporative Kühlung Um die Atome weiter zu kühlen, greift man auf das sogenannte evaporative Kühlen zurück, das auch als Verdampfungskühlen bezeichnet wird (Pater 2007: 9). Hierbei wird die Potenzialhöhe der Falle langsam reduziert, sodass die schnellsten der Teilchen eine höhere Energie als die Potenzialhöhe haben. Diese Teilchen verlassen die Falle und werden durch das Vakuumierungssystem abgesaugt. Auf diese Weise bleiben nur die langsamsten Atome, weniger als 0,1%, in der Falle zurück. Auf diese Weise wird gleichzeitig eine sehr geringe Teilchendichte des Gases erreicht. Zu vergleichen ist dies mit dem Abkühlen eines heißen Kaffeebechers, der auch Wärme verliert, indem er heiße, oberflächennahe Atome in Form von Dampf abgibt. Durch evaporative Kühlung lassen sich Temperaturen in der Größenordnung 10^{-9}K erreichen. (vgl. Pater 2007: 9)

2.3.2 Nachweis

Der Nachweis eines BEC erfolgt mittels sogenannter Absorptionsbilder. Hierfür wird die Falle, in der das BEC eingefangen ist, geöffnet. Nach einer kurzen Flugzeit von meist nur wenigen Millisekunden wird die Wolke mit fast resonantem Laserlicht beschossen. Wo ein Photon auf ein Atom der richtigen Geschwindigkeit stößt, wird es absorbiert und das Atom geht in einen

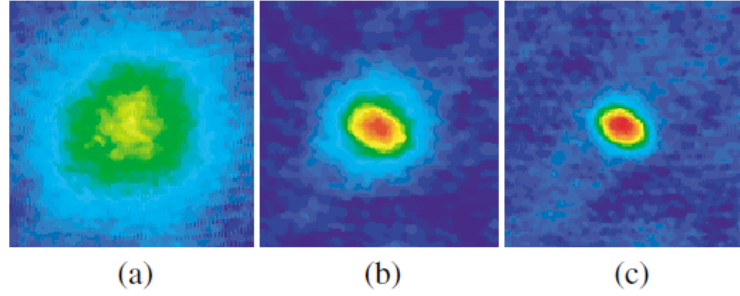


Abbildung 3: Absorptionsbilder ultrakalter Atomwolken aus ^{87}Rb a) thermisches Gas vor dem Kondensationsprozess (endgültige Laserleistung $P=280\text{ mW}$); b) Mischung aus Kondensat und thermischem Gas ($P=260\text{ mW}$); c) reines Kondensat ($P=190\text{ mW}$); der Bildausschnitt zeigt $350\text{ }\mu\text{m}$. [2]

höheren Energiezustand über. Dies hat zur Folge, dass das BEC, sofern eines bestand, durch den Nachweis zerstört wird, da die darin enthaltenen Bosonen durch energetische Anregung den Grundzustand verlassen. Ein BEC zeichnet sich durch eine wesentlich höhere Dichte aus als das thermische Gas. Zudem breitet es sich anders als das thermische Gas anisotrop aus. Wo eine höhere Teilchendichte vorliegt, wird ein größerer Anteil des Laserlichts absorbiert als an weniger dichten Stellen. Das Licht wird von einer hochempfindlichen CCD-Kamera (charge-coupled device camera) aufgefangen. Auf Grund des Doppler-Effekt und der Bestrahlung aus verschiedenen Richtungen lässt sich anhand dieser Absorptionsraten auf die Geschwindigkeitsverteilung im bestrahlten Bereich schließen. Anhand der Dichte- und Geschwindigkeitsverteilungen kann man genau erkennen, ob ein BEC vorhanden war oder nicht und auch wie hoch dessen Anteil im Verhältnis zu dem thermischen Gas war. Abbildung 3 zeigt deutlich den Unterschied zwischen Absorptionsbildern, auf denen BECs enthalten sind und solchen, auf denen kein BEC vorhanden ist. Bei den in der Abbildung dargestellten Atomwolken wurde die Leistung des Lasers während des Kühlungsprozesses immer weiter reduziert; so entspricht eine niedrigere endgültige Laserleistung auch einer niedrigeren Temperatur. Auf Bild (a), auf dem kein BEC aufgezeichnet wurde, ist die Teilchenwolke viel breiter verteilt als auf den Bildern (b) und (c), die je ein BEC enthalten. Zudem ist die Absorptionswertdifferenz zwischen dem Rand der Gaswolke und deren Zentrum viel kleiner, als das bei den beiden anderen Bildern der Fall ist. Bild (b) enthält einen Kondensat- und einen beträchtlichen Gasanteil, was durch den vergleichsweise breiten Rand mit geringen Absorptionswerten deutlich wird. Im Vergleich dazu liegt in Bild (c) ein fast reines Kondensat vor. Die gesamte Teilchenmenge ist auf einen kleinen Bereich in der Mitte konzentriert. Dies ist typisch für ein BEC.

Abbildung 4 zeigt im Vergleich dazu die, aus den Absorptionswerten abgeleitete, Geschwindigkeitsverteilung einer Menge von Rubidiumatomen. Auch hier liegt in der linken Graphik kein BEC, in der mittleren zum Teil ein BEC und in der rechten Graphik ein fast vollständiges BEC vor. Es wird deutlich, dass alle Teilchen fast die gleiche Geschwindigkeit haben und die Geschwindigkeitsverteilung parabelförmig aussieht. Diese spitze Parabel bei der Geschwindigkeitsverteilung, wie sie in der rechten Graphik zu sehen ist, ist durch die Eigenschaften eines BEC bedingt und sehr typisch für dieses. Im Vergleich dazu gibt es in der linken Graphik eine wesentlich breitere Verteilung der Teilchen auf verschiedene Geschwindigkeiten.

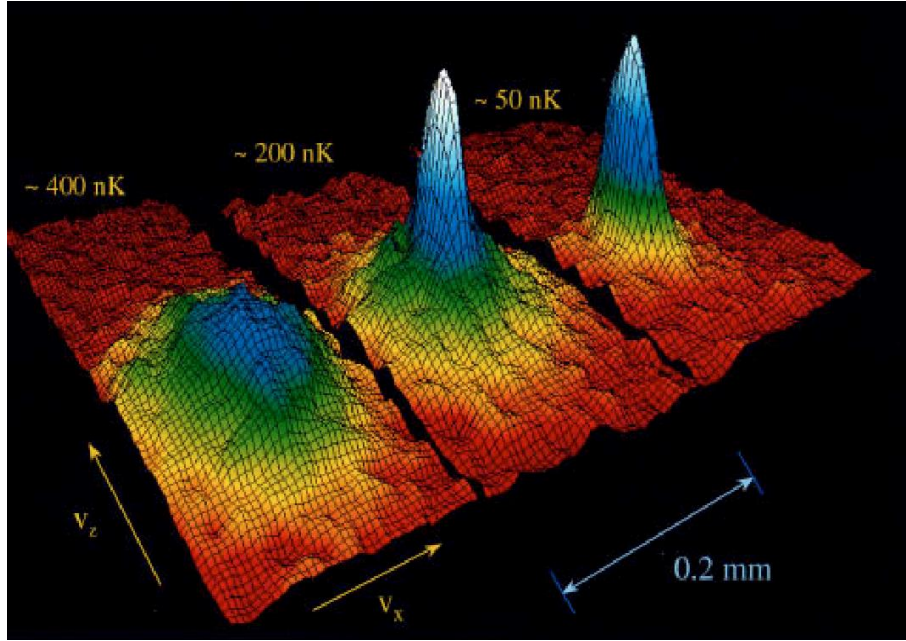


Abbildung 4: Geschwindigkeitsverteilung von Rubidiumwolken mit verschiedenem Kondensatanteil. Die Achsen stehen für die Geschwindigkeit in x - und y -Richtung und der Wert an einer Stelle für die Teilchenzahl mit dieser Geschwindigkeit. [1]

2.4 Rechenbeispiele

Im Folgenden werde ich die Eigenschaften von 1D Bose-Gasen in harmonischen Fallen, wie in Kapitel 2.2 beschrieben, mittels einiger Beispielrechnungen untersuchen. Hierbei werde ich die Abhängigkeit verschiedener Größen - wie dem chemischen Potenzial, der Teilchenzahl oder der Temperatur - voneinander je unter bestimmten Bedingungen betrachten. Hierfür habe ich mittels der Programmiersprache Python einige Rechnungen durchgeführt und diese in Form von Graphen dargestellt. Theoretische Feinheiten, wie die spezifische Maximalzahl an Teilchen, die noch ein eindimensionales BEC bilden können, werden bei diesen Rechnungen vernachlässigt, da diese nur einen allgemeinen Überblick über die Abhängigkeiten der einzelnen Parameter voneinander schaffen soll.

Chemisches Potenzial in Abhängigkeit von der Teilchenzahl Wie bereits in den Kapiteln 2.1 und 2.2 gezeigt wurde, hängt der Übergang von einem thermischen Gas zu einem BEC nicht nur von der Temperatur sondern auch von der Teilchenzahl und dem chemischen Potenzial ab. Zwar hängt das chemische Potenzial von der Temperatur ab, aber es ändert sich auch mit der Teilchenzahl. Wie das chemische Potenzial von der Teilchenzahl abhängt, kann man untersuchen, wenn man in die Gleichung (2.12) eine feste Temperatur einsetzt und in der Gleichung für verschiedene Teilchenzahlen das chemische Potenzial berechnet. Hierbei wird das chemische Potenzial in Einheiten von $\hbar\omega$ angegeben. Dadurch ergibt sich die Grundzustandsenergie als $\frac{1}{2}$. Bei einer Temperatur von 10^{-5}K und einer anfänglichen Teilchenzahl von 1000 Teilchen habe ich die Teilchenzahl immer um ein Fünftel erhöht. Eine Auftragung der Ergebnisse für das chemische Potenzial bei 90 Rekursionszyklen zeigt Abbildung 4. Darin erkennt man, dass eine höhere Teilchenzahl zu einem Anstieg des chemischen Potenzials führt,

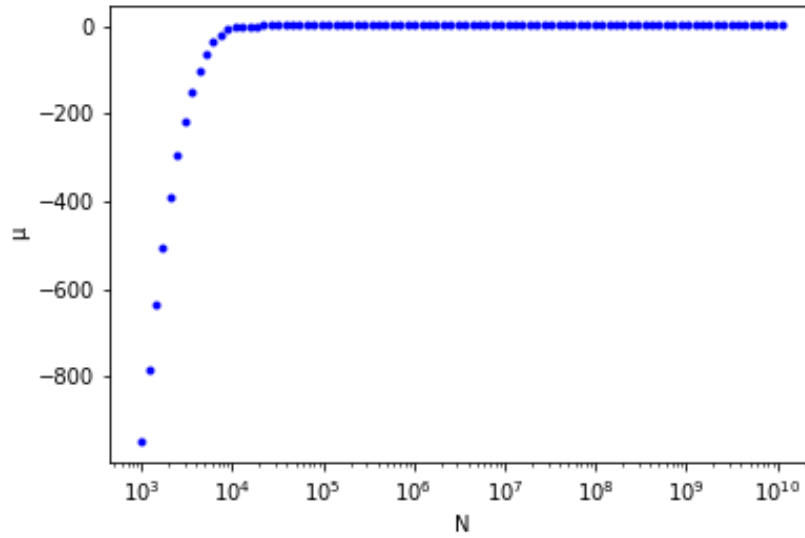


Abbildung 5: Das chemische Potenzial μ in Abhängigkeit von der Teilchenzahl N bei einer Temperatur von 10^{-5}K bei einer Anfangsteilchenzahl von 1000.

wobei die Änderung zwischen 10^3 und 10^4 Teilchen erheblich ist, wohingegen der Wert für das chemische Potenzial bei noch höheren Teilchenzahlen stabil zu sein scheint. Betrachtet man den Abschnitt ab 10^4 Teilchen wie in Abbildung 5 dargestellt genauer, so erkennt man, dass sich der Wert für das chemische Potenzial abgesehen von Rechenungenauigkeiten, die bei dem Auflösen der Funktion mit Python zustande kommen, immer mehr $\frac{1}{2}$ annähert. Durch die Vereinfachung des Terms für die Energie der einzelnen Energieniveaus entspricht $\frac{1}{2}$ auch genau der Grundzustandsenergie. Wie bereits in Kapitel 2.1 gezeigt, kommt es zum Kondensationsprozess, wenn sich das chemische Potenzial der Grundzustandsenergie annähert. Daraus lässt sich schließen, dass es nicht nur eine kritische Temperatur gibt, sondern für jede Temperatur auch eine kritische Teilchenzahl. Dementsprechend kann die kritische Temperatur durch höhere Teilchenzahlen angehoben werden. Hierbei gibt es allerdings mehrere Probleme. Zum einen geht bei dem Vorgang der evaporativen Kühlung die größte Zahl an ursprünglichen Teilchen in der Falle verloren. Andererseits führt eine höhere Teilchenzahl und eine damit einhergehende höhere Teilchendichte auch zu einer stärkeren Wechselwirkung zwischen den Teilchen in der Falle. Dies will man allerdings in der Regel vermeiden, da auf diese Weise die Annäherung einer Zwei-Teilchen-Wechselwirkung ungenau wird. Im Spezialfall des 1D Bose-Gases in der harmonischen Falle kommt noch dazu, dass eine maximale Zahl an Teilchen gegeben ist, die nicht überschritten werden darf, da sonst die Ausbildung eines 1D BEC nicht möglich ist. Deshalb muss immer eine ideale Teilchenzahl gefunden werden.

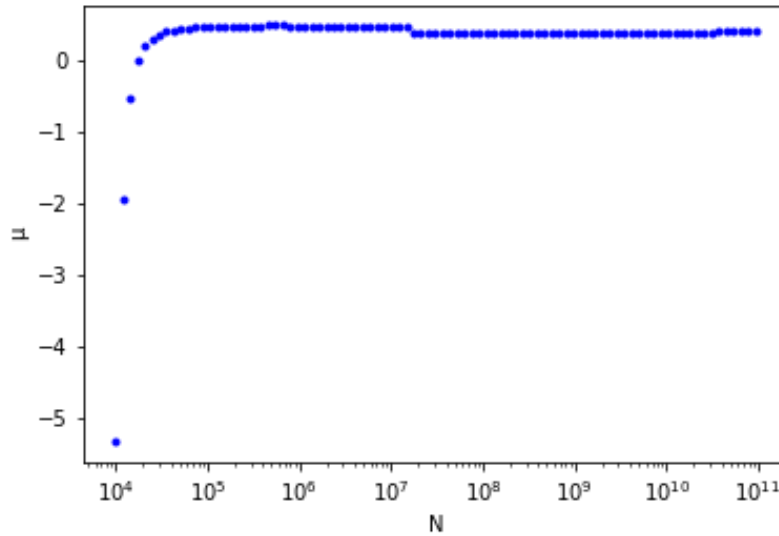


Abbildung 6: Das chemische Potenzial μ in Abhängigkeit von der Teilchenzahl N bei einer Temperatur von 10^{-5}K bei einer Anfangsteilchenzahl von 10000.

Chemisches Potenzial in Abhängigkeit von der Temperatur Dass sich das chemische Potenzial mit der Temperatur ändert und sich der Grundzustandsenergie annähert, wenn man sich von oben der kritischen Temperatur nähert, wurde in Abschnitt 2.1 zwar vorausgesetzt, dieser Zusammenhang lässt sich jedoch auch numerisch nachweisen. Hierfür setzt man eine konstante Teilchenzahl fest. Im Folgenden ändert man die Temperatur von einem Startwert ausgehend kontinuierlich und löst die Gleichung (2.12) nach dem chemischen Potenzial auf, genau wie im vorherigen Abschnitt. Hierbei ergab sich das Problem, dass Python in vielen Fällen den extrem kleinen Nenner des Exponenten der Exponentialfunktion einfach auf 0 abrundet, wodurch sich für die Exponentialfunktion e^∞ ergibt. Dies ergibt für den ganzen Bruch $\frac{1}{\infty}$, was Python einfach als 0 ausgibt. Hierdurch wird eine Vielzahl an Rechenpunkten unbrauchbar. Diesen hohen Verlust an Rechenpunkten kann man durch mehr Rekursionszyklen ausgleichen, um wenigstens einige verwertbare Rechenpunkte zu erhalten. Wann Python abrundet und wann nicht, scheint vollkommen willkürlich zu sein. Allerdings häufen sich die Fehler mit sinkender Temperatur an, weswegen es so scheint, als würde sich der Graph dem Wert 0 und nicht dem Wert der Grundzustandsenergie, also $\frac{1}{2}$ annähern.

Abbildung 7 zeigt das Ergebnis für eine Temperatur von 5K bei 300 Rekursionszyklen. Bei jedem Zyklus wurde die Temperatur um ein 30-stel verringert. Trotz der Vielzahl an unbrauchbaren Punkten im Graphen, die auf Rundungsfehler von Python zurückzuführen sind, ist doch zu erkennen, dass mit sinkender Temperatur das chemische Potenzial ansteigt, und sich einem festen Wert annähert.

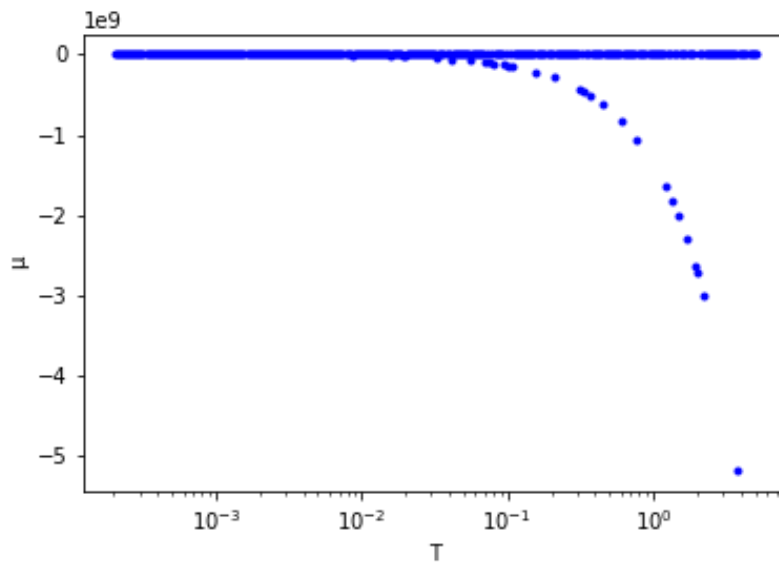


Abbildung 7: Das chemische Potenzial μ in Abhängigkeit von der Temperatur T bei einer Teilchenzahl von 10000 und einer Anfangstemperatur von 5K.

Das Ergebnis dieser Rechnung ist allerdings aus genannten Gründen wenig aussagekräftig. Python scheint für genaue, numerische Rechnungen mit Zahlen im zweistelligen negativen Potenzbereich von 10 nicht ausgelegt zu sein. Dieses Problem zeigte sich auch schon bei der Wahl geeigneter Parameter im vorherigen Abschnitt. Abbildung 8 zeigt schematisch den tatsächlichen Verlauf des chemischen Potenzials in Abhängigkeit von der Temperatur. Die Ähnlichkeit zu meinem Rechenergebnis ist deutlich erkennbar abgesehen von den ganzen Fehlerpunkten. Zunächst steigt der Graph steil an und geht bei Näherung an die kritische Temperatur in ein logarithmisches Wachstum über. Unterhalb der kritischen Temperatur entspricht das chemische Potenzial dann der Grundzustandsenergie.

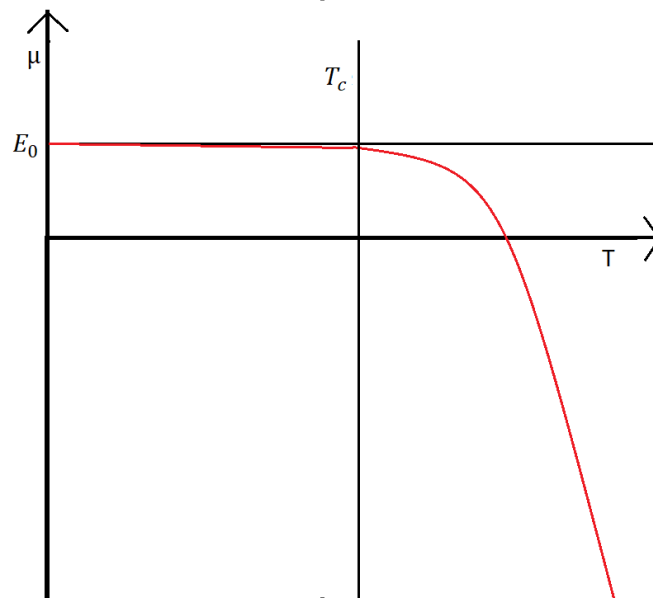


Abbildung 8: Schematische Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Temperatur und dem chemischen Potenzial (selbst erstellte Abbildung).

Herausforderungen bei weiteren Rechnungen Bis jetzt konnte ich Korrelationen nachweisen, indem ich alle Parameter bis auf zwei konstant hielt, und bei kontinuierlicher Änderung eines Kontrollparameters die Änderung des anderen flexiblen Parameters untersucht habe. Da das chemische Potenzial sich jedoch mit der Temperatur und der Teilchenzahl ändert, kann man das chemische Potenzial nicht als konstant annehmen, wenn man zum Beispiel die kritische Temperatur in Abhängigkeit von der Teilchenzahl untersuchen möchte. Und wenn sich das chemische Potenzial ändert, dann ändert sich auch die kritische Temperatur. Um eine eindeutige Korrelation zwischen Teilchenzahl und kritischer Temperatur zu erhalten, müsste man die Änderung des chemischen Potenzials in Abhängigkeit von Temperatur und Teilchenzahl in die Rechnung integrieren und im Nachhinein die Ergebnisse von diesem Effekt bereinigen. Dies würde nicht nur zu ungenauen Ergebnissen führen, sondern bedürfte auch weitreichender Programmierkenntnisse und einen Programmieraufwand, der im Rahmen einer Facharbeit nicht umsetzbar wäre. Zudem wäre auf Grund der Rechenungenauigkeit von Python bei solch kleinen Zahlen und der Komplexität der Rechnungen mehr Rechenleistung und ein genaueres Rechenprogramm notwendig, um gute Ergebnisse zu erzielen.

Teil 3

Fazit und Ausblick

Der folgende Abschnitt wird abschließend die wichtigsten Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel zusammenfassen und resümieren. Des weiteren werden Herausforderungen beim Erstellen der Arbeit erörtert und sich kritisch mit den Ergebnissen auseinandergesetzt. Letztlich wird ein Ausblick gegeben, welche weiteren Arbeiten und Forschungen auf Grundlage dieser

Arbeit durchgeführt werden könnten.

Die Arbeit setzte sich mit dem Konzept, der Entstehung, den Eigenschaften und der experimentellen Umsetzung von Bose-Einstein-Kondensaten auseinander, wobei ein Hauptaugenmerk auf eindimensionalen nicht wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensaten in harmonischen Fallen lag. Zunächst wurde auf Grundlage der Bose-Einstein-Verteilung gezeigt, dass es in Abhängigkeit weiterer Parameter bei niedrigen Temperaturen in einem Bose-Gas zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustandes kommt, was als Bose-Einstein-Kondensat bezeichnet wird. Des Weiteren wurde dargelegt, dass sich dieses wie ein makroskopisches Quantenobjekt verhält und durch eine Wellenfunktion exakt beschrieben werden kann. Es wurde eine gängige Methode erläutert, um ein Bose-Einstein-Kondensat experimentell zu erzeugen, indem ein Bose-Gas in einer Atomfalle gefangen und bis zum Erreichen der kritischen Temperatur abgekühlt wird. Es wurde gezeigt, dass unter gewissen Konfigurationen der Falle und bei einer geringen Anzahl an Teilchen ein quasi eindimensionales Bose-Einstein-Kondensat entstehen kann und dass sich diese Eindimensionalität auf die Eigenschaften und Beschreibung des Kondensats auswirkt. Schließlich wurde mittels numerischer Computersimulationen dargelegt, dass in einem eindimensionalen Bose-Einstein-Kondensat in einer harmonischen Falle das chemische Potenzial sowohl von der Teilchenzahl, als auch der Temperatur abhängt und aus diesem Grund eine direkte Korrelation von Teilchenzahl und kritischer Temperatur schwer überprüfbar ist.

Bei der Recherche zu meinem theoretischen Teil waren neben den Informationen, die ich direkt von Dr. Pelster vermittelt bekam, wissenschaftliche Arbeiten und Veröffentlichungen meine Hauptinformationsquellen. Da diese sich jedoch meist mit sehr speziellen Forschungsfragen auseinandersetzen und teilweise Grundlagenwissen über Bose-Einstein-Kondensate voraussetzen, konnte ich von vielen Arbeiten nur einzelne Kapitel für meine Arbeit gebrauchen. Dies verkomplizierte die Recherche meiner Informationen. Auch waren einige meiner Quellen, besonders die Primärquelle, die sich mit der experimentellen Umsetzung von eindimensionalen Bose-Einstein-Kondensaten auseinandersetzt, in komplexem Fachenglisch geschrieben, was ebenfalls die Recherche erschwerte. Bei dem praktischen Teil der Arbeit bestand das Problem vor allem darin, dass Python für derartig genaue, numerische Rechnungen ungeeignet zu sein scheint. Im Nachhinein gesehen wäre dieses Problem durch die Wahl einer anderen Rechenoberfläche, die für derartig genaue numerische Berechnungen geeignet ist, vermieden werden können. Dennoch sind die Ergebnisse nach Abgleich mit der Theorie qualitativ richtig. Jedoch lassen sich damit nur qualitative, keine quantitativen Aussagen über die Abhängigkeiten der einzelnen Parameter treffen.

Allerdings könnten auf Grundlage dieser Arbeit vertiefende Forschungen zur Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten in harmonischen Fallen durchgeführt werden. So wäre es möglich, mittels komplexerer Rechnungen und Modelle quantitative Korrelationen zwischen den einzelnen Parametern in eindimensionalen harmonischen Fallen zu berechnen und weitere Parameter, wie die Frequenz der Falle in diese Rechnungen zu integrieren. Auch wäre es möglich, zweidimensionale und dreidimensionale Bose-Einstein-Kondensate in harmonischen Fallen auf die gleiche Weise mittels numerischer Computersimulation zu untersuchen und die Ergebnisse zu vergleichen. So könnte man qualitativ und quantitativ die Auswirkung der Niederdimensionalität auf die einzelnen Parameter und deren Abhängigkeiten erforschen.

Teil 4

Anhang

4.1 Verwendete Programme

Texmaker Diese Arbeit habe ich mittels Texmaker angefertigt. Hierbei handelt es sich um einen LaTeX Editor, der das Schreiben von LaTeX Dokumenten vereinfacht. Ich entschied mich für die Nutzung dieses Programms, da LaTeX über einen umfassenden Mathematikmodus verfügt, der das Schreiben und die Formatieren von Formeln gegenüber anderen Textverarbeitungsprogrammen wie Microsoft Word erheblich vereinfacht. Außerdem verfügt LaTeX über eine gute vorgefertigte Formatierung, die zum Beispiel die Gliederung der Arbeit und eine einheitliche Formatierung von Überschriften, Unterüberschriften und Absätzen vereinfacht. Anders als bei Word ist die Ausgabedatei nicht unmittelbar sichtbar, sondern muss zunächst mittels einer Transformationsanwendung wie PDFLaTeX erstellt werden. Mittels PDFLaTeX erhält man jedoch direkt nach der Umformung ein pdf-Dokument und somit bei der Übertragung zwischen Nutzern und Rechnern keine Formatierungsfehler.

JupyterLab Meine Rechnungen zum Erstellen der Abbildungen 5-7 habe ich mit JupyterLab durchgeführt. Hierbei handelt es sich um eine benutzerfreundliche Oberfläche zur Erstellung von Python Dateien. Ich nutzte Python, da ich bereits Grundlagen in der Programmiersprache Python besaß, was mir das Durchführen der, den Abbildungen 5-7 zu Grunde liegenden, Rechnungen vereinfachte.

4.2 Quellcodes

Ad Abbildung 5: Chemisches Potenzial in Abhängigkeit von der Teilchenzahl bei anfangs 1000 Teilchen

```
from scipy import optimize
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *

E = [1+0.5 for l in range(0,1000)]
c = 5*10**-9
T = (10**-5)
b = c/T
N = 10**3
for i in range(1,90):
    def f(μ):
        return N - sum(array([1/(exp((b)*(E[l]-μ))-1) for l in range(0,1000) ]))
    optimize.fsolve(f,0,)
    semilogx (N,optimize.fsolve(f,0.,),'.-b')
    xlabel('N')
    ylabel('μ')
    N += N/5
savefig("muevonNfestesT")
```

Ad Abbildung 6: Chemisches Potenzial in Abhängigkeit von der Teilchenzahl bei anfangs 10000 Teilchen

```
from scipy import optimize
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *

E = [1+0.5 for l in range(0,1000)]
c = 5*10**-9
T = (10**-5)
b = c/T
N = 10**4
for i in range(1,90):
    def f(μ):
        return N - sum(array([1/(exp((b)*(E[l]-μ))-1) for l in range(0,1000) ]))
    optimize.fsolve(f,0,)
    semilogx (N,optimize.fsolve(f,0.,),'.-b')
    xlabel('N')
    ylabel('μ')
    N += N/5
savefig("muevonNfestesT")
```

Ad Abbildung 7: Chemisches Potenzial in Abhängigkeit von der Temperatur bei anfangs 5K

```
from scipy import optimize
from numpy import *
from matplotlib.pyplot import *

E = [1+0.5 for l in range(0,1000)]
c = 7*10**-11
T = (5*10**0)
b = c/T
N = 10**4
for i in range(1,300):
    def f(μ):
        return N - sum(array([1/(exp((b)*(E[l]-μ))-1) for l in range(0,1000) ]))
    optimize.fsolve(f,0,)
    semilogx (T,optimize.fsolve(f,0.),'-.b')
    xlabel('T')
    ylabel('μ')
    T-= T/30
    b = c/T
savefig("muevonTfestesN")
```


Literaturquellen

Girodias, B. (2015). Ultracold Atoms in Line-World: Bose-Einstein Condensates in a Quasi-One Dimensional Gravitational Surface Trap. Bachelorarbeit. Claremont: Pomona College, URL: <http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Bachelor/girodias.pdf>

Görlitz, A., Vogels, J.M., Leanhardt, A.E., Raman, A.E., Gustavson, T.L., et al. (2001). Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. Physical Review Letters, Ausgabe 87, Nummer 13, 130402-1 - 130402-4
URL: https://www.rle.mit.edu/cua_pub/ketterle_group/Projects_2001/Pubs_01/gor101_lowD.pdf

Kienzle, S. (2013). Bose-Einstein-Condensation. Präsentation. München: TU München, URL: https://www.mpg.de/5020878/0522a_bec.pdf

Pater, M. (2007). Bose-Einstein-Kondensation. Vortragsskript. Essen: Universität Duisburg-Essen,
URL: <http://users.physik.fu-berlin.de/~pelster/Talks/ausarbeitung.pdf>

Pelster, A. (2004). Bose-Einstein-Kondensation. Vorlesungsskript. Essen: Universität Duisburg-Essen,
URL: http://www.theo-phys.uni-essen.de/tp/ags/pelster_dir/SS04/skript.pdf

Richter, E. (2008). Simulation der Dynamik mehrkomponentiger Bose-Einstein Kondensate. Diplomarbeit. Hamburg: Universität Hamburg,
URL: http://photon.physnet.uni-hamburg.de/fileadmin/user_upload/ILP/Sengstock/Research/SpinorBEC/Theses/DiplomaRichter.pdf

Abbildungsquellen

- [1] Anderson, M. H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wiemann, C. E. Cornell, E. A. (1995). Science Magazine, Ausgabe 275
gefunden in Wiemann, C., Pritchard, D., Wineland, D. (1999). Atom Cooling, Trapping, and Quantum Manipulation. Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS, Ausgabe 71, S.257
URL: <https://tf.nist.gov/general/pdf/1346.pdf>
- [2] Chapman Research Lab (Hrsg.)(2016). Many-Body Physics Explored in a Spin-1 Bose-Einstein Condensate. Atlanta: Georgia Institute of Technology URL: <http://chapmanlabs.gatech.edu/?page=bec>
- [3] Mcclelland, J., Steele, A., Knuffman, B. Twedt, K., Schwarzkopf, A. Wilson, T. (2015). Bright focused ion beam sources based on laser-cooled atoms. Applied Physics Reviews, Ausgabe 3
- [4] Nowik-Boltyk, P. (2012). Quanten-Thermodynamik von Magnonen. Onlineveröffentlichung der Universität Münster.
URL: <https://www.uni-muenster.de/Physik.AP/Demokritov/Forschen/Forschungsschwerpunkte/mBECwatdfimps.html>

Alle Onlinequellen wurden am 12. Mai 2020 zuletzt überprüft.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche kenntlich gemacht habe.

Dannenfeldt, den 12.05.2020

F. Grulich
(Unterschrift)