

Der Weg ins Chaos am logistischen Wachstum

-

BLL

Niklas Römer

20.06.2017

MSS – Jahrgang 2015

JAHRESARBEIT (BLL)

=====

Name des/der Schülers/in: Niklas Römer

Jahresarbeit im (Leit-)Fach: Physik

Betreuende/r Fachlehrer/in: Frau Anke Hecking, StD'

Thema der Arbeit: Der Weg ins Chaos am
logistischen Wachstum

Ausgabetermin: 2.9.2016

Abgabetermin: 20.06.2017

Niklas Römer
Unterschrift des/der Schülers/in

Anke Hecking, StD'
Unterschrift des/der Lehrers/in

Ich danke allen, die mich beim Erstellen der BLL unterstützt haben.
Besonders möchte ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Pelster danken, der mir
während der ganzen Arbeit als Ansprechpartner jederzeit zur
Verfügung stand und mich mit dem Thema vertraut machte. Auch
zeigte er mir Grenzen des schulischen Wissens auf und motivierte
mich, einige von diesen zu überschreiten.
Des Weiteren danke ich meinen Lehrerinnen Frau StD' Hecking und
Frau StR' Schupp-Jacksteit für ihre Unterstützung

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	5
2	Aufbau	6
3	Chaotisches Verhalten	7
3.1	Dynamische Systeme	7
3.2	Deterministische Systeme	7
3.3	Deterministisches Chaos	7
3.4	Fixpunkte	8
3.5	Bifurkation	8
4	Die logistische Abbildung	9
5	Computerprogramme	11
5.1	Python	11
5.2	QtiPlot	11
5.3	Texmaker	11
6	Analytischer Weg	12
6.1	Ermittlung der ersten Fixpunkte	12
6.2	Stabilität eines Fixpunktes	14
6.3	Überprüfung von x_1 und x_2	17
6.4	Weitere Fixpunkte	18
6.4.1	x_3 und x_4	20
6.4.2	$x_{(5-8)}$	22
7	Numerischer Weg	23
7.1	Theorie zur numerischen Bestimmung von Fixpunkten	23
7.2	Bestimmung der Fixpunkte bei $\sigma = 3,5$	24
7.3	Numerische Bestätigung der analytischen Ergebnisse	25
8	Besondere Merkmale des Bifurkationsdiagrammes	27
8.1	Selbstähnlichkeit	27
8.2	Feigenbaum-Konstanten	28
8.3	Periodische Fenster	29
9	Zusammenfassung und Ausblick	30
10	Anhang	31
10.1	Rechnungen	32
10.2	Python-Programme	41
11	Abbildungsverzeichnis	44
12	Literaturverzeichnis	45

1 Motivation

Die Physik hat mich schon seit den ersten Stunden in Klasse 7 fasziniert. Mit ihr bekam man einen völlig neuen Blickwinkel auf Vorgänge im Alltag. Auch konnte man nun einige alltägliche Phänomene erklären und als Formeln darstellen. All dies führte dazu, dass ich Physik als Leistungskurs wählte, wodurch ich einen nur noch tieferen Einblick in verschiedene Teilgebiete der Physik erhielt. Allerdings reichte mir teilweise dieses Wissen, was ich in der Schule vermittelt bekam, nicht aus oder ich hatte Fragen, die wir erst später behandeln sollten, weshalb ich versuchte, mir dieses Wissen selbst anzueignen. Dabei kam ich zum Beispiel mit der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie sowie chaotischem Verhalten in Kontakt. Beide Disziplinen interessierten und interessieren mich sehr.

Da es in dieser Arbeit ausschließlich um chaotisches Verhalten gehen soll, werde ich mich hier darauf beschränken. In Verbindung mit chaotischem Verhalten kam ich erstmals mit dem relativ populären Schmetterlingseffekt, der veranschaulichen soll, dass bereits kleine Systemänderungen große Auswirkungen haben können. Später lernte ich dann die Mandelbrot-Menge kennen, aus der das sehr bekannte Apfelmännchen resultiert.

Wegen dieses Interesses, und schon vorhandenem oberflächlichem Vorwissen, schlug meine Physiklehrerin, Frau StD' Hecking, vor, diese Arbeit im Bereich der Chaosforschung zu schreiben. Das genaue Thema der BLL legte ich dann in Zusammenarbeit mit Herrn Priv.-Doz. Dr. Pelster von der Technischen Universität Kaiserslautern fest, der mich während der ganzen Arbeit unterstützte und mir als Ansprechpartner zur Verfügung stand. Wir entschieden uns für das Thema:

Der Weg ins Chaos am logistischen Wachstum.

Das logistische Wachstum wählten wir aus, da es durch Periodenverdopplung ein für chaotische Systeme typisches Verhalten aufweist. Zudem ist es der mathematisch einfachste Weg, sich mit chaotischem Verhalten auseinanderzusetzen, da die meisten anderen Wege weitergehende mathematische Fähigkeiten, wie zum Beispiel das Lösen von Differenzialgleichungen, erfordern. Mein Ansprechpartner für mathematische Probleme war Frau StR' Schupp-Jacksteit.

2 Aufbau

Im folgenden Kapitel möchte ich zunächst einen Einstieg in chaotisches Verhalten geben. In diesem Abschnitt der Arbeit stelle ich verschiedene Systeme vor, die Charakteristika von chaotischem Verhalten aufzeigen. Daraufgehend werde ich die logistische Abbildung einführen und auf ihre Verwendung eingehen. Zudem werde ich eine kurze Einführung in die Programmiersprache 'Python', das Plot-Programm 'QtiPlot', sowie 'Texmaker', einen Latex-Editor, geben. Dies ist die Software, die ich für die Umsetzung dieser Arbeit benutzte.

In Kapitel 6 und 7 leite ich das Bifurkationsdiagramm der logistischen Funktion her. Zuerst werde ich mich dieser Aufgabe analytisch annehmen. Dann möchte ich das Bifurkationsdiagramm numerisch vervollständigen. Nach der Vervollständigung des Bifurkationsdiagrammes widme ich mich noch besonderen Zusammenhängen, welche beim Bifurkationsdiagramm auftreten.

Nach diesem Kernstück meiner Arbeit werde ich in Kapitel 9 das in den vorigen Abschnitten Erarbeitete zusammenfassen. Anschließend gebe ich noch einen Ausblick, wie man die Inhalte dieser Arbeit als Ausgangspunkt für weitere Forschung verwenden könnte und in welche Richtung eine solche Forschung gehen könnte.

Im Anhang befinden sich Rechnungen, die zu umfangreich sind, um sie direkt in diese Arbeit einzubinden, meine Python-Programme, ein Bildverzeichnis und das Quellenverzeichnis.

3 Chaotisches Verhalten

In diesem Kapitel sollen einige Begrifflichkeiten, welche für die folgende Arbeit wichtig sind, eingeführt und definiert werden.

3.1 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System steht mit anderen Systemen, wie zum Beispiel der Umwelt, in Wechselwirkung. Dabei haben sowohl andere Systeme Einfluss auf das dynamische System, als auch das dynamische System auf die anderen. Dies impliziert, dass alle involvierten Systeme auch dynamische Systeme sein müssen.

3.2 Deterministische Systeme

Deterministische Systeme sind Systeme, denen zu jedem Zeitpunkt t ein eindeutiger Zustand zugeordnet werden kann. Diese eindeutige Zuordnung ist zudem für jedes Experiment bei gleicher Präparation identisch. Das Wort 'deterministisch' kommt von dem lateinischen 'determinare', was so viel heißt wie festlegen.

3.3 Deterministisches Chaos

Zuerst scheint dieser Titel ein Widerspruch in sich zu sein. Denn in Abschnitt 3.2. habe ich definiert, dass wenn ein System deterministisch ist, dessen Zustand zu jedem Zeitpunkt t eindeutig festgelegt ist. Chaos jedoch bedeutet im normalen Sprachgebrauch das etwas nicht vorhersagbar ist beziehungsweise willkürlich geschieht. Dennoch ergibt der Begriff 'deterministisches Chaos' Sinn. Dies ist so, da durch den deterministischen Charakter alle Systeme, die der Stochastik unterliegen, also rein zufälliges Verhalten aufweisen, abgegrenzt werden. Außerdem werden komplexe mathematische Systeme von Anfang an ausgeschlossen und es bleiben nur mathematisch relativ einfache Systeme zur Betrachtung über. Diese können sogar so einfach sein, dass sie lediglich eine Variable benötigen. Ein Beispiel für ein solch einfaches System ist die logistische Abbildung, welche in Kapitel 4 hergeleitet wird.

Trotzdem ist es auch in solch einfachen Systemen nach einer gewissen Zeit nicht mehr möglich, den Zustand des Systems eindeutig vorherzusagen. Hier kommt der chaotische Charakter der Systeme zum Vorschein, der verhindert, dass bei gleichem Versuchsaufbau das gleiche Ergebnis entsteht.

In Computersimulationen kann man anders als in der Realität bei gleichen Anfangsbedingungen auf gleiche Endzustände eines solchen Systems kommen. Hier zeigt sich der chaotische Charakter darin, dass schon sehr kleine Änderungen an einzelnen Parametern zu sehr großen Systemänderungen führen können. Dieses Verhalten liegt zum Beispiel beim logistischen Wachstum vor, aus dem sich die logistische Abbildung ableitet.

3.4 Fixpunkte

Fixpunkte sind ein mathematisches Phänomen. Man bezeichnet einen Punkt als einen Fixpunkt, wenn die Gleichung

$$g(x) = x \quad (3.1)$$

erfüllt ist. Mit anderen Worten ist ein Punkt ein Fixpunkt, wenn er auf sich selbst abgebildet wird.

In der Physik beschreibt ein Fixpunkt eine stabile Dynamik in einem Zustandspunkt. Diese Stabilität muss jedoch nicht von bleibender Dauer sein, sondern besteht nur für jeweils spezifische Intervalle.

3.5 Bifurkation

Eine Änderung in der Dynamik eines Systems nennt man Bifurkation. Eine solche Änderung kann zum Beispiel durch einen Zuwachs oder Wegfall von einigen Fixpunkten entstehen. In einem Bifurkationsdiagramm werden solche Systemänderungen deutlich.

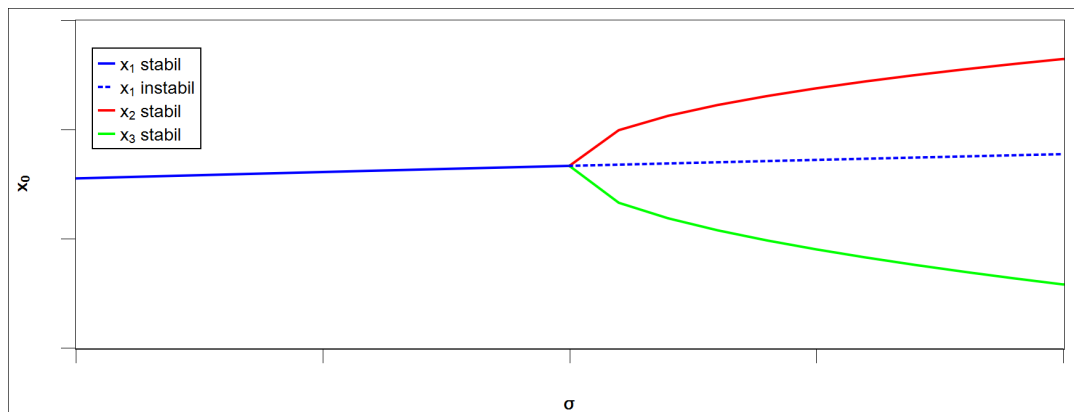


Abbildung 3.1: Schematisches Bifurkationsdiagramm - ein Fixpunkt (blau) verliert seine Stabilität und zwei andere Fixpunkte (rot und grün) werden stabil.

In Abbildung 3.1 ist dies gut zu erkennen. Die blaue Linie beschreibt einen stabilen Fixpunkt x_1 . Dieser ist ab einem gewissen Punkt instabil. Eine durchgezogene Linie besagt, dass ein Fixpunkt stabil ist. Eine gestrichelte steht für einen instabilen Fixpunkt. Aus diesem Grund wird x_1 danach gestrichelt gezeichnet. In dem Punkt, in dem der Fixpunkt x_1 seine Stabilität verliert, beginnen zwei andere Fixpunkte (x_2 in rot und x_3 in grün) stabil zu sein. Auf der x -Achse werden in diesem Fall, wie auch im restlichen Teil der Arbeit, die σ -Werte aufgetragen. Dabei ist σ in dieser Arbeit der einzige Kontrollparameter und somit alleine für Stabilitätsänderungen verantwortlich. Auf der y -Achse werden die x_0 -Werte aufgetragen. Diese beschreiben sowohl die Lage des Fixpunktes auf der y -Achse als auch auf der x -Achse, da (3.1) gilt.

4 Die logistische Abbildung

In diesem Kapitel soll das logistische Wachstum erläutert werden. Anschließend soll es in einer Formel, der logistischen Abbildung, die Grundlage der Arbeit liefern. Auch werden in diesem Kapitel die Intervalle für das Bifurkationsdiagramm festgelegt.

Die logistische Abbildung wurde um 1838 von Verhulst entwickelt [Eckhardt, 2004, S. 123]. Ihr ursprüngliches Anwendungsgebiet liegt in der Biologie. Mit der logistischen Abbildung wird versucht, Populationsgrößen abhängig von der Zeit näher zu beschreiben. Hierfür geht man davon aus, dass die Populationsgröße einer Art immer von der Populationsgröße des Vorjahres abhängt. Wenn es im Vorjahr viele Individuen einer Art gab, können sich auch viele paaren und somit der Population zu einem Wachstum verhelfen. Um dies mathematisch zu beschreiben, stellt man eine Folge auf:

$$N_{a_1} = f(N_{a_0}). \quad (4.1)$$

In dieser Folge steht N für die Anzahl der Individuen der Population. a_0 steht für das Jahr 0 und a_1 für das Folgejahr 1. Wenn man dieses Verhältnis zwischen Jahr 0 und 1 verallgemeinert, ergibt sich:

$$N_{a+1} = f(N_a). \quad (4.2)$$

Diese Gleichung beschreibt ein deterministisches System, solange die Funktion $f(N_a)$ für festgelegte Jahre a Gültigkeit besitzt. Diese Funktion f möchte ich im Folgenden näher definieren.

Um die Funktion f möglichst einfach zu gestalten, stelle ich zuerst ein paar Voraussetzungen auf. Erstens lege ich fest, dass es eine Wachstumsrate σ gibt. Diese artspezifische Wachstumsrate beschreibt, wie schnell sich die Population vermehrt. Dabei setze ich auch voraus, dass jeweils der gleiche Prozentsatz der Population Nachkommen erhält. Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich folgende Funktion:

$$f(N_a, \sigma) = \sigma N_a. \quad (4.3)$$

An dieser Stelle muss nun der Parameter σ eingeschränkt werden. Denn bei einem negativen σ würde auch die Populationsgröße N negativ werden, was nicht möglich ist. Dementsprechend muss gelten:

$$\sigma > 0. \quad (4.4)$$

Auf die Realität übertragen würde bei $\sigma < 1$ die Population aussterben, bei $\sigma > 1$ unendlich wachsen. Dies ist allerdings aufgrund von begrenzten Ressourcen wie Lebensraum oder Futter nicht möglich. Aus diesem Grund erweitere ich die Funktion f um den limitierenden Faktor $1 - N_a$. Diese Erweiterung sorgt dafür, dass die Population bei einer Überpopulation schrumpft und bei einer Unterpopulation wächst. Damit dieser Kontrollparameter jedoch funktioniert, muss vorher definiert werden, dass N kein absoluter Wert ist, sondern die Populationsgröße relativ zu einem Mittelwert ist. Ansonsten würden die Werte der Populationsgröße sehr schnell $N < 0$

werden, was in der Realität nicht möglich ist. Dies ist ein Nachteil dieses stark vereinfachten Systems und liegt daran, dass nur ein Parameter σ Verwendung findet. Für diese Arbeit genügt jedoch diese reduzierte Form. Mit dieser Vereinfachung ergibt sich eine neue Funktion f :

$$f(N_a, \sigma) = \sigma N_a(1 - N_a). \quad (4.5)$$

Als nächstes wird die Gleichung (4.2) aktualisiert, da auch in ihr die Populationsgröße abhängig von meinem eingeführten Parameter σ ist:

$$N_{a+1} = f(N_a, \sigma). \quad (4.6)$$

Anschließend setzt man die Funktion f aus (4.5) in die Gleichung (4.6) ein:

$$N_{a+1} = \sigma N_a(1 - N_a). \quad (4.7)$$

Dies ist die logistische Gleichung, an welcher ich nur noch eine kleine Veränderung vornehmen werde. Ich ersetze N durch x um diese Folge besser auf ein Koordinatensystem übertragen zu können. Die daraus resultierende Gleichung sieht folgendermaßen aus:

$$x_{a+1} = \sigma x_a(1 - x_a). \quad (4.8)$$

Aus dieser Folge ergibt sich nun die Funktion:

$$f(x) = \sigma x(1 - x), \quad (4.9)$$

oder ausmultipliziert:

$$f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x. \quad (4.10)$$

Diese Funktion wird auch logistische Abbildung genannt. Mit ihr beschäftigt sich Kapitel 6 noch genauer. Dennoch soll an dieser Stelle sowohl x als auch σ noch eingeschränkt werden. Dafür betrachtet man zuerst die Funktion $f(x)$ aus (4.9) ohne den Parameter σ . Diese Gleichung soll $J(x)$ sein:

$$J(x) = x(1 - x). \quad (4.11)$$

Diese Funktion hat ihre Nullstellen bei 0 und 1 und das Extremum bei $x = \frac{1}{2}$ mit dem Funktionswert $J(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Der Parameter σ hat in (4.9) im Vergleich zu (4.11) eine streckende Wirkung. Auf die Nullstellen hat σ keine Auswirkung. Um somit das Intervall $[0, 1]$ auf der x -Achse auf das Intervall $[0, 1]$ der y -Achse abzubilden, muss das Extremum von (4.10) bei 1 sein. Dies wird bei $\sigma = 4$ erreicht. Diese Abbildung möchte man erreichen, da somit Gleichung (3.1) Gültigkeit besitzt. Auch ermöglicht dieser Zusammenhang die grafische Bestimmung von Fixpunkten, welche in Kapitel 6.1. vorgestellt wird. Somit gilt:

$$0 \leq \sigma \leq 4, \quad (4.12)$$

und:

$$0 \leq x \leq 1. \quad (4.13)$$

5 Computerprogramme

Nachfolgend sind die Computerprogramme aufgelistet, welche für diese Arbeit immens wichtig waren. Einerseits verwendete ich sie zum Erstellen von Grafiken und andererseits für eine klare Strukturierung der fertigen Arbeit. Auch boten die Ergebnisse, welche diese Programme lieferten, einen anderen Blickwinkel auf schon Erarbeitetes beziehungsweise halfen, sich in neue Gebiete einzuarbeiten.

5.1 Python

Python ist eine Programmiersprache, die zu den 'höheren Programmiersprachen' gezählt wird. Sie ist sehr vielseitig, da sie einerseits projektorientiert programmiert werden kann und andererseits auch als Skriptsprache benutzt werden kann. Für diese Arbeit habe ich Python ausschließlich als Skriptsprache benutzt.

Alle meine Programme, welche eigens für diese Arbeit angefertigt wurden, sind mit kurzer Erklärung im Anhang zu finden.

5.2 QtiPlot

Das Programm 'QtiPlot' ist ein Plot-Programm. Das bedeutet, dass man mit diesem Programm Grafiken aus Funktionen oder Wertepaaren erstellen kann. Die Grafiken 3.1, 6.3, 6.6, 7.1 und 7.2 wurden mit diesem Programm erstellt.

5.3 Texmaker

Texmaker ist ein Programm zur Erstellung von LaTeX-Dokumenten, mit einer sehr einsteigerfreundlichen Umgebung. Es gibt einige Argumente für den Einsatz von LaTeX. Eines von diesen ist, dass LaTeX sehr gut mit Formeln umgehen kann. Zudem ist es mit LaTeX relativ einfach, ein Schriftstück zu erstellen, welches strengen formalen Anforderungen entspricht. Anders als zum Beispiel bei Word oder Writer sieht man in LaTeX nicht sofort die fertige Ausgabe der Datei. Man sieht das fertige Layout erst, nachdem man eine Ausgabedatei erstellt hat.

6 Analytischer Weg

In diesem Abschnitt der Arbeit soll begonnen werden, das Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung zu erstellen. Um dies zu erreichen, werden die ersten Fixpunkte bestimmt und ein Kriterium zur Bestimmung der Stabilität eines Fixpunktes hergeleitet.

6.1 Ermittlung der ersten Fixpunkte

Um die ersten Fixpunkte der logistischen Abbildung $f(x)$, die in Kapitel 4 hergeleitet wurde, zu bestimmen, muss man diese Gleichung mit der Winkelhalbierenden $g(x)$ gleichsetzen. Daraus ergibt sich:

$$f(x) = g(x). \quad (6.1)$$

Mit:

$$f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x, \quad (6.2)$$

und:

$$g(x) = x, \quad (6.3)$$

wird aus (6.1):

$$-\sigma x^2 + \sigma x = x, \quad (6.4)$$

oder:

$$0 = -\sigma x^2 + \sigma x - x. \quad (6.5)$$

Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen für x . Diese kann man zum Beispiel durch mehrfaches Ausklammern ermitteln. Hierfür formt man (6.5) um:

$$0 = -\sigma x^2 + (\sigma - 1)x, \quad (6.6)$$

und klammert als nächstes x aus:

$$0 = x(-\sigma x + (\sigma - 1)). \quad (6.7)$$

Aus (6.7) kann man nun die erste Lösung ablesen. Denn das Multiplikationsgesetz besagt, dass wenn das Produkt 0 ist, einer der beiden Faktoren auch 0 sein muss. Daraus ergibt sich, dass der erste Fixpunkt $x_1 = 0$ ist. Den zweiten Fixpunkt erhält man nun, wenn man den anderen Faktor von (6.7), $-\sigma x + (\sigma - 1)$, gleich 0 setzt. Die dabei entstehende Gleichung ist:

$$0 = -\sigma x + (\sigma - 1). \quad (6.8)$$

Diese kann nun nach x umgeformt werden:

$$x = \frac{\sigma - 1}{\sigma}, \quad (6.9)$$

oder:

$$x = 1 - \frac{1}{\sigma}. \quad (6.10)$$

Dies ist der zweite Fixpunkt x_2 . Bevor man nun den ersten Teil des Bifurkationsdiagramms erstellen kann, muss man noch prüfen, bei welchen σ -Werten die Fixpunkte stabil sind. Diese Überprüfung findet in Kapitel 6.3. statt.

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Fixpunkte von $f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x$ zu bestimmen. Bei dieser grafischen Methode zeichnet man $f(x)$ aus (6.2) und die Winkelhalbierende $g(x)$ aus (6.3) in ein kartesisches Koordinatensystem. Nun wählt man einen beliebigen x -Wert zwischen 0 und 1, da diese Einschränkung in Kapitel 4 festgelegt wurde. Dieser Punkt wird hier nun als x_0 definiert und hat, wie die folgenden Punkte, nichts mit den schon aufgestellten Fixpunkten x_1 und x_2 gemein. Nun geht man von diesem Punkt parallel zur y -Achse nach oben, bis man auf den Graphen von $f(x)$ trifft. Dieser Punkt hat nun den y -Wert $f(x_0)$. Von diesem Punkt aus geht man parallel zur x -Achse zur Winkelhalbierenden. Der daraus resultierende Punkt hat nun den x -Wert x_1 sowie den y -Wert $f(x_0)$. Diese beiden Schritte wiederholt man nun immer abwechselnd. Nach kurzer Zeit wird für $\sigma \leq 1$ der Wert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Dies beschreibt exakt den vorher aufgestellten Fixpunkt x_1 , welcher zwischen 0 und 1 stabil ist und den x -Wert 0 besitzt. Nach dieser Theorie müsste also für $1 \leq \sigma \leq 3$ dieses Verfahren zu dem zweiten Fixpunkt x_2 führen, was auch so ist.

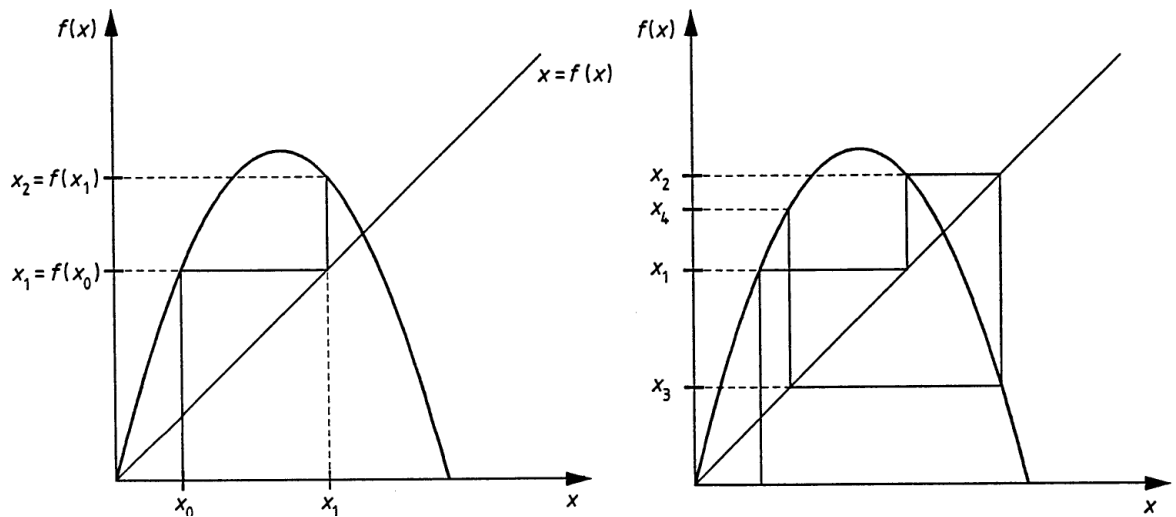


Abbildung 6.1: Grafische Methode zur Ermittlung von Fixpunkten $1 \leq \sigma \leq 3$ [Haken and Wunderlin, 1991, S. 389].

Abbildung 6.1 veranschaulicht die vorher beschriebene Methodik für $1 \leq \sigma \leq 3$. In Abbildung 6.2 ist diese Methodik für $1 \leq \sigma \leq 3$ zu Ende geführt. Man erkennt, wie der Fixpunkt, Schnittpunkt der beiden Graphen, immer stärker angenähert wird. Diese Annäherung ist am Ende genau.

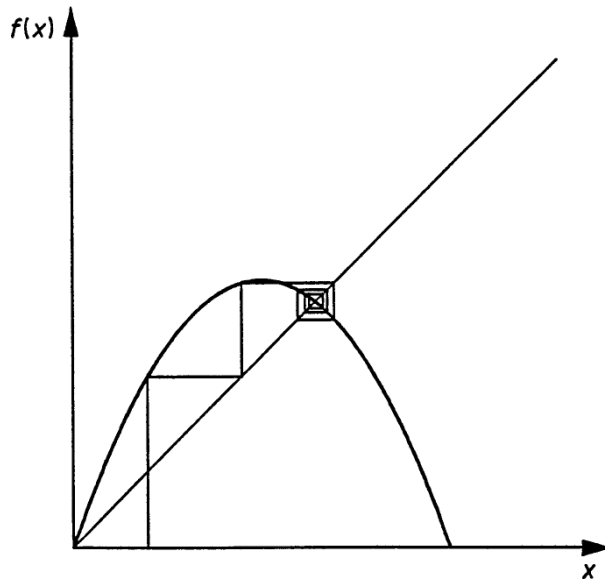


Abbildung 6.2: Anwendung der grafischen Methode zur Bestimmung eines Fixpunktes im σ -Intervall $[1, 3]$ [Haken and Wunderlin, 1991, S. 391].

6.2 Stabilität eines Fixpunktes

Im folgenden Abschnitt soll ein Kriterium zur Bestimmung der Stabilität eines Fixpunktes hergeleitet werden. Dieses Kriterium soll allgemeingültig sein, um zu erlauben, dass man es für die restliche Arbeit ausnahmslos benutzen kann.

Da in Abschnitt 3.4. festgelegt wurde, dass ein Fixpunkt die Gleichung (3.1) erfüllen muss, gilt für einen allgemeinen Fixpunkt x^* :

$$f(x^*) = x^*. \quad (6.11)$$

Um nun herauszufinden, für welche Werte dieser Fixpunkt stabil ist, definiert man jeden abweichenden Wert als eine Abweichung von x^* :

$$x_n = x^* + q_n. \quad (6.12)$$

x_n steht dabei für einen beliebigen Wert und q_n für die dazugehörige Entfernung von x^* . Dementsprechend muss auch gelten:

$$x_{n+1} = x^* + q_{n+1}. \quad (6.13)$$

Mit Gleichung (4.2) und $N = x$, sowie $a = n$ ergibt sich:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (6.14)$$

Aus Gleichung (6.12) folgt nun:

$$x_{n+1} = f(x^* + q_n). \quad (6.15)$$

Aus (6.13) und (6.15) ergibt sich dann der Zusammenhang:

$$x^* + q_{n+1} = f(x^* + q_n). \quad (6.16)$$

Da die Funktion der logistischen Abbildung eine Gleichung zweiter Ordnung ist, ist diese Funktion (4.10) eine Parabel. Ein Weg, um sich einem beliebigen Punkt auf

dieser Parabel anzunähern, ist, eine Gerade an die Parabel zu legen, welche die Parabel nur in einem Punkt schneidet. Dieser Schnittpunkt ist der allgemeine Fixpunkt x^* und die Gerade die Tangente an diesen. Die allgemeine Geradengleichung ist:

$$y = mx + b. \quad (6.17)$$

Daraus ergibt sich einerseits:

$$t(x) = mx + b, \quad (6.18)$$

und andererseits:

$$f(x^*) = mx^* + b. \quad (6.19)$$

Zuerst sollen sowohl m , als auch b für Funktion (6.19) ermittelt werden. Hierbei beschreibt m in der allgemeinen Geradengleichung die Steigung. Dies ist dieselbe Steigung, welche die Parabel im Schnittpunkt mit der Geraden besitzt. Dadurch, dass die Steigung einer Funktion immer durch ihre Ableitung beschrieben wird und dieser Schnittpunkt x^* ist, ergibt sich für m :

$$m = f'(x^*). \quad (6.20)$$

Ferner legt b den Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse fest. Hierfür muss man miteinbeziehen, dass sowohl der Abstand des Punktes von der y -Achse, als auch die Steigung Einfluss auf diesen Wert hat:

$$b = f(x^*) - f'(x^*)x^*. \quad (6.21)$$

Anschließend setzt man nun (6.20) und (6.21) in (6.19) ein:

$$f(x^*) = f'(x^*)x^* + f(x^*) - f'(x^*)x^*. \quad (6.22)$$

An dieser Gleichung kann man erkennen, dass m und b richtig berechnet wurden, da eine offensichtliche Identität vorliegt.

Setzt man nun die für den Fixpunkt ermittelte Steigung und den y -Achsenabschnitt in (6.18) ein, kommt man auf:

$$t(x) = f'(x^*)x + f(x^*) - f'(x^*)x^*. \quad (6.23)$$

Diese Gleichung kann man noch zusammenfassen in:

$$t(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*). \quad (6.24)$$

Dies entspricht der Funktion:

$$f(x^* + (x - x^*)) = t(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*). \quad (6.25)$$

(6.12) kann man umformen in:

$$x_n - x^* = q_n. \quad (6.26)$$

Aus (6.25) und (6.26) ergibt sich:

$$f(x^* + q_n) = f(x^*) + f'(x^*)q_n. \quad (6.27)$$

Nun kann man (6.27) in (6.16) einsetzen und erhält:

$$x^* + q_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*)q_n. \quad (6.28)$$

Wenn man nun (6.11) berücksichtigt, erhält man:

$$q_{n+1} = f'(x^*)q_n. \quad (6.29)$$

Diese Folge will man nun umformen. Dafür ersetzt man zuerst q_n durch eine von n abhängige Variable und das Startglied der Iteration, $\lambda^n \cdot Z$:

$$q_n = \lambda^n Z. \quad (6.30)$$

Dies setzt man nun in (6.29) ein:

$$\lambda^{n+1} Z = f'(x^*) \lambda^n Z. \quad (6.31)$$

Mit $\lambda^{n+1} = \lambda^n \cdot \lambda$ ergibt sich:

$$\lambda^n \lambda Z = f'(x^*) \lambda^n Z, \quad (6.32)$$

und gekürzt:

$$\lambda = f'(x^*). \quad (6.33)$$

Wenn man nun (6.33) in (6.30) einsetzt erhält man:

$$q_n = [f'(x^*)]^n Z. \quad (6.34)$$

Mit $n = 0$:

$$q_0 = [f'(x^*)]^0 Z. \quad (6.35)$$

Die Mathematik schreibt vor, dass $K^0 = 1$ ist für $0 \notin K$. Somit ergibt sich:

$$[f'(x^*)]^0 = 1, \quad (6.36)$$

und:

$$q_0 = Z. \quad (6.37)$$

Diese Gleichung beweist die Gültigkeit der vorher getätigten Aussage, wonach Z das Startglied der Iteration ist.

Wenn man nun (6.33) und (6.37) in (6.30) einsetzt erhält man:

$$q_n = [f'(x^*)]^n q_0. \quad (6.38)$$

An dieser Gleichung kann nun ein Kriterium erarbeitet werden, mit welchem man den Bereich, in dem der Fixpunkt stabil ist, berechnen kann. Hierfür muss man sich in Erinnerung rufen, wofür q_n steht. Nämlich für die Abweichung des Wertes x_n von x^* . Wenn diese Abweichung gegen 0 geht, also $x_n \approx x^*$ ist, ist der Fixpunkt im Wert x_n stabil. Um dies zu berechnen, lässt man n gegen ∞ laufen. Hierfür muss man vorher noch eine Differenzierung vornehmen. Denn $|f'(x^*)|$ kann kleiner, größer oder gleich 1 sein. Für $|f'(x^*)| < 1$ ergibt sich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0. \quad (6.39)$$

Dies bedeutet, dass für jeden Wert, für den $|f'(x^*)| < 1$ ist, gilt, dass der Fixpunkt x^* stabil ist.

Als nächstes wird der Fall getestet, wenn $|f'(x^*)| > 1$ ist. Hierfür gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \pm \infty. \quad (6.40)$$

Dies bedeutet, dass bei jedem Wert, für den $|f'(x^*)| > 1$ gilt, der Fixpunkt x^* instabil ist.

Anschließend wird noch berechnet, was passiert, wenn $|f'(x^*)| = 1$ ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0. \quad (6.41)$$

Das dabei entstehende Ergebnis beschreibt einen Grenzfall. Denn wenn $|f'(x^*)| = 1$ ist, befindet man sich an der Grenze zwischen stabilem und instabilem Verhalten, da sich die Abweichung von x_n zu x^* nicht ändert. Somit geht sie weder gegen 0 noch gegen ∞ . Da q_0 jedoch auf jeden Fall kleiner als 1 ist, wird in der folgenden Arbeit dieser Fall als stabil bezeichnet, auch wenn er ein Grenzfall ist.

Somit ist festzuhalten, dass nur solange der Betrag der Ableitung kleiner gleich 1 ist, der Fixpunkt stabil ist. Das Kriterium für die Stabilität wird wie folgt aufgestellt:

$$|f'(x^*)| \leq 1 \Rightarrow \text{Fixpunkt stabil.} \quad (6.42)$$

6.3 Überprüfung von x_1 und x_2

Mit diesem Kriterium (6.40) kann man nun untersuchen, wann die Fixpunkte x_1 und x_2 stabil sind. Da für die Überprüfung der Stabilität die Ableitung der Funktion $f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x$ benötigt wird, wird diese als Erstes ermittelt:

$$f'(x) = -2\sigma x + \sigma. \quad (6.43)$$

In diese Ableitung setzt man nun wegen des Kriteriums für die Stabilität von Fixpunkten (6.42) den ersten Fixpunkt $x_1 = 0$ ein und erhält:

$$f'(0) = -2\sigma(0) + \sigma, \quad (6.44)$$

$$f'(0) = \sigma. \quad (6.45)$$

Anschließend muss noch ermittelt werden, für welchen Wert der Betrag dieser Gleichung kleiner gleich 1 ist. Dies ist der Fall für $|\sigma| \leq 1$. Da das Bifurkationsdiagramm aber von $0 \leq \sigma \leq 4$ gehen soll, kann σ nicht kleiner als 0 sein. Dementsprechend ist der Fixpunkt x_1 für $0 \leq \sigma \leq 1$ stabil.

Als nächstes wird der Fixpunkt x_2 betrachtet. Hierbei geht man nach dem gleichen Schema vor wie bei x_1 . Zunächst erhält man:

$$f'(1 - \frac{1}{\sigma}) = -2\sigma(1 - \frac{1}{\sigma}) + \sigma, \quad (6.46)$$

was sich durch Umformung:

$$f'(1 - \frac{1}{\sigma}) = -2\sigma + 2 + \sigma, \quad (6.47)$$

reduziert auf:

$$f'(1 - \frac{1}{\sigma}) = 2 - \sigma. \quad (6.48)$$

Mit der Einschränkung, dass $|f'(1 - \frac{1}{\sigma})| \leq 1$ sein muss, ergibt sich $1 \leq \sigma \leq 3$.

Nachdem man sowohl die Fixpunkte als auch die Stabilität dieser berechnet hat, kann man nun beginnen, das Bifurkationsdiagramm gemäß Abbildung 6.3 zu erstellen. Auf der x -Achse wird dabei der Wert σ aufgetragen, da σ die einzige Variable ist, welche Einfluss auf die Stabilität der Fixpunkte hat. Auf der y -Achse wird x_0 aufgetragen. Dies ist der x -Wert, den der Fixpunkt innehat. Man berechnet ihn mit $f(x^*)$.

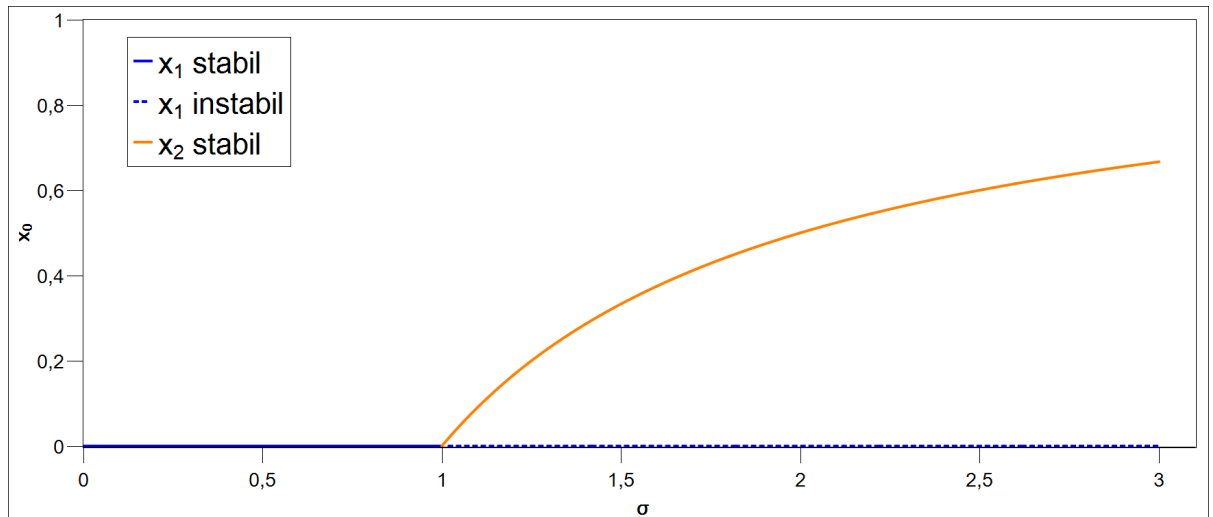


Abbildung 6.3: Bifurkationsdiagramm für x_1 und x_2 .

6.4 Weitere Fixpunkte

Bisher wurde das System $f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x$ nur für $\sigma \leq 3$ betrachtet. Was ist jedoch, wenn man σ größer als 3 wählt? Um dies zu überprüfen wird zuerst einmal die graphische Herangehensweise gewählt, welche in Kapitel 6.1. vorgestellt wurde. Bei einer diskreten Erhöhung von σ -jeweils um 0,1- stellt man folgendes fest:

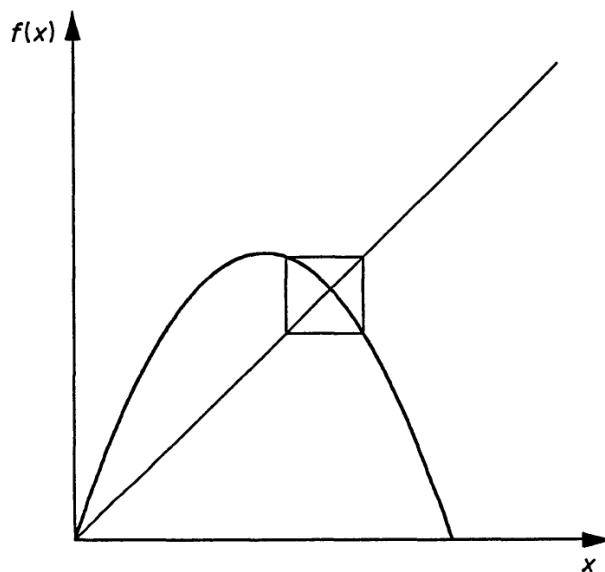


Abbildung 6.4: Grafische Bestimmung der Fixpunkte für $3 < \sigma \leq 3,2$ [Haken and Wunderlin, 1991, S. 393]).

Anstatt wie vorher auf einen Punkt zuzulaufen, pendelt man nun zwischen zwei Punkten hin und her. Demzufolge ist anzunehmen, dass es zwei stabile Fixpunkte geben muss. Dies sind die Fixpunkte x_3 und x_4 . Wenn man σ nun noch weiter erhöht, kommt man auf folgendes Diagramm:

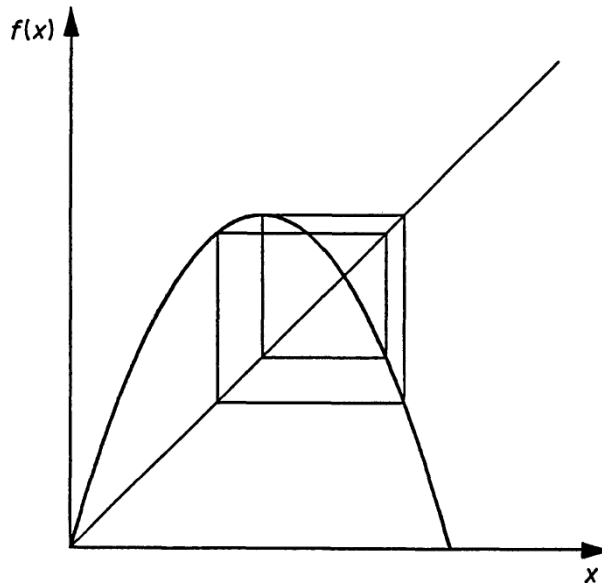


Abbildung 6.5: Grafische Bestimmung der Fixpunkte für $\sigma = 3, 5$ [Haken and Wunderlin, 1991, S. 393].

Hier pendelt man zwischen vier Punkten. Dies bedeutet, dass es bei $\sigma = 3, 5$ vier stabile Fixpunkte geben muss (x_{5-8}). Wenn man nun kontinuierlich σ erhöhen würde, würde man herausfinden, dass die Anzahl der Fixpunkte immer zur Basis 2 wächst. Ein solches Wachstum im Bezug auf eine Bifurkation nennt man auch Periodenverdopplung. Die Periodenverdopplung beschreibt einen wichtigen Weg in Richtung chaotisches Verhalten. Weitere Wege ins chaotische Verhalten werden in Abschnitt 9, dem Ausblick, genannt.

Fixpunkte höherer Ordnung als x_2 können nicht mehr mit $f(x)$ ermittelt werden, da $f(x)$ nur zwei Lösungen besitzt. Da die Anzahl der Fixpunkte zur Basis 2 wächst, muss die Funktion jedoch vier Lösungen aufweisen. Zudem müssen die bisherigen Lösungen erhalten bleiben. Aus diesem Grund iteriert man die Funktion $f(x)$. Denn diese Iteration erfüllt alle Bedingungen, die vorher aufgestellt wurden. Eine solche Iteration von $f(x)$ wird im Folgenden so dargestellt:

$$f^{(n)}(x). \quad (6.49)$$

(6.49) beschreibt die n te Iteration von $f(x)$.

Die zweite Iteration zum Beispiel lautet:

$$f^{(2)}(x) = f(f(x)). \quad (6.50)$$

Mit dieser Formel kann man nun x_3 und x_4 berechnen, was im folgenden Abschnitt vorgeführt wird.

Mit dem Hintergrundwissen, dass es sich bei dem logistischen Wachstum um eine Periodenverdopplung handelt, kann man nun die Formel für die Fixpunkte 5 – 8 bestimmen. Denn diese Periodenverdopplung führt dazu, dass man nur jede zweite Iteration betrachten muss. Dies bedeutet, dass für diese Fixpunkte nicht $f^{(3)}(x)$ sondern $f^{(4)}(x)$ benötigt wird. Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = f(f(f(f(x)))). \quad (6.51)$$

6.4.1 x_3 und x_4

Um x_3 und x_4 zu bestimmen, wird zuerst (6.50) näher definiert. Denn mit $f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x$ ergibt sich:

$$f^{(2)}(x) = -\sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)^2 + \sigma(-\sigma x^2 + \sigma x), \quad (6.52)$$

und ausmultipliziert:

$$f^{(2)}(x) = -\sigma^3 x^4 + 2\sigma^3 x^3 - \sigma^3 x^2 - \sigma^2 x^2 + \sigma^2 x \quad (6.53)$$

Da für die Ermittlung der Fixpunkte die Schnittpunkte von $f^{(2)}(x)$ und $g(x) = x$ gesucht sind, wird die Differenzfunktion $d(x) = f^{(2)}(x) - g(x)$ gebildet:

$$d(x) = -\sigma^3 x^4 + 2\sigma^3 x^3 - \sigma^3 x^2 - \sigma^2 x^2 + \sigma^2 x - x. \quad (6.54)$$

Dies ist sinnvoll, da nun die Schnittpunkte von $f^{(2)}(x)$ und $g(x)$ die Nullstellen von $d(x)$ sind.

Eigentlich ist diese Gleichung analytisch nicht lösbar, da sie ein Polynom vierter Ordnung ist und nur Gleichungen zweiter Ordnung ohne weiteres Wissen lösbar sind. Jedoch erhält man durch Ausklammern von x :

$$d(x) = x(-\sigma^3 x^3 + 2\sigma^3 x^2 - \sigma^3 x - \sigma^2 x + \sigma^2 - 1) \quad (6.55)$$

Aufgrund des Produktsatzes, der besagt, dass wenn ein Faktor 0 ist, das Produkt auch 0 ist, kann $x_1 = 0$ als Fixpunkt bestätigt werden. Denn Fixpunkte hören nicht einfach auf zu existieren, sondern werden ab gewissen Werten instabil. Da $x_1 = 0$ ist, muss im folgenden Teil nur $-\sigma^3 x^3 + 2\sigma^3 x^2 - \sigma^3 x - \sigma^2 x + \sigma^2 - 1$ berücksichtigt werden. Da der Fixpunkt x_1 eine Nullstelle von $d(x)$ ist, liegt nahe, dass auch x_2 eine Nullstelle von $d(x)$ ist. Wäre dies der Fall, könnte man durch Polynomdivision $d(x)$ in eine Gleichung zweiten Grades umformen. Die Polynomdivision ist im Anhang zu finden (S. 36). Das Ergebnis der Polynomdivision ist:

$$d(x) = x(x - 1 + \frac{1}{\sigma})(-\sigma^3 x^2 + (\sigma^3 + \sigma^2)x - (\sigma^2 + \sigma)) \quad (6.56)$$

Die beiden ersten Faktoren von (6.56) beschreiben x_1 und x_2 . Somit müssen x_3 und x_4 im dritten Faktor definiert sein. Auf diese beiden Fixpunkte kommt man mit Hilfe der Mitternachtsformel. Die Rechnung hierfür befindet sich ebenfalls im Anhang (S. 37). Das Ergebnis ist:

$$x_3 = \frac{\sigma + 1 + \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma - 3}}{2\sigma}, \quad (6.57)$$

sowie:

$$x_4 = \frac{\sigma + 1 - \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma - 3}}{2\sigma}. \quad (6.58)$$

Als nächstes muss die Stabilität der beiden neuen Fixpunkte bestimmt werden. Damit die Fixpunkte stabil sind, muss Gleichung (6.42) erfüllt sein. Als erstes benötigt man die Ableitung von $f^{(2)}(x)$. Es kann nicht $f'(x)$ verwendet werden, da x_3 und x_4 keine Lösungen von $f(x)$ sind. Die Ableitung von $f^{(2)}(x)$ aus (6.53) ist:

$$\frac{df^{(2)}(x)}{dx} = -4\sigma^3 x^3 + 6\sigma^3 x^2 - 2\sigma^3 x - 2\sigma^2 x + \sigma^2. \quad (6.59)$$

In diese Ableitung setzt man nun zunächst x_3 ein und formt die Gleichung um. Man erhält:

$$\frac{df^{(2)}(x_3)}{dx} = -\sigma^2 + 2\sigma + 4. \quad (6.60)$$

Die Rechnung hierfür befindet sich im Anhang (S. 38 - 40).

Mit der Bedingung (6.42) ergibt sich dann:

$$|-\sigma^2 + 2\sigma + 4| \leq 1. \quad (6.61)$$

(6.61) kann nun in zwei Bedingungen aufgeteilt werden:

$$1. \quad -\sigma^2 + 2\sigma + 4 \leq 1, \quad (6.62)$$

sowie:

$$2. \quad \sigma^2 - 2\sigma - 4 \leq 1. \quad (6.63)$$

Für Gleichung (6.62) ergibt sich dann:

$$\sigma_1 = -1, \quad (6.64)$$

sowie:

$$\sigma_2 = 3. \quad (6.65)$$

Mit (4.12) kann man (6.64) ausschließen. Somit ist eine Grenze von x_3 bei $\sigma = 3$. Dieses Ergebnis ist logisch, da x_2 bei genau diesem σ -Wert instabil wird. Für die zweite Grenze wird (6.63) aufgelöst. Dabei erhält man:

$$\sigma_1 = 1 - \sqrt[3]{6}, \quad (6.66)$$

und:

$$\sigma_2 = 1 + \sqrt[3]{6}. \quad (6.67)$$

Auch hier kann man mit (4.12) eine Gleichung ausschließen. Dies ist in diesem Fall (6.66). Somit beschreibt (6.67) die zweite Grenze für die Stabilität von x_3 . Das Intervall, in dem x_3 stabil ist, lautet damit $3 \leq \sigma \leq 1 + \sqrt[3]{6}$.

Zu den exakt gleichen Ergebnissen wie für x_3 kommt man auch für x_4 . Damit gilt, dass auch x_4 im Intervall $3 \leq \sigma \leq 1 + \sqrt[3]{6}$ stabil ist.

Anschließend kann man das Bifurkationsdiagramm, welches in Abbildung 6.3 angefangen wurde, gemäß Abbildung 6.6 mit x_3 und x_4 ergänzen.

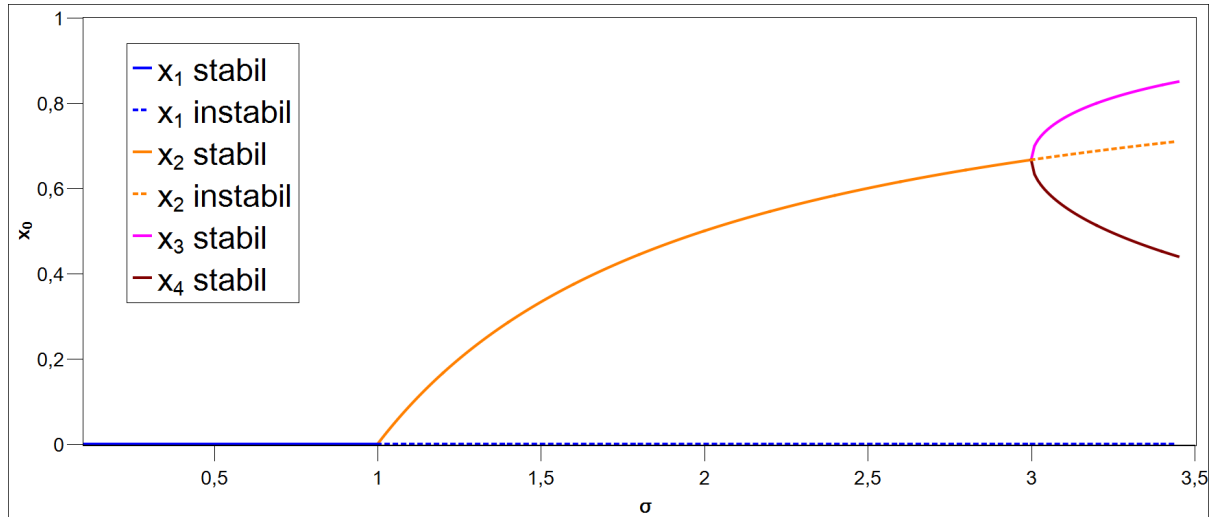


Abbildung 6.6: Bifurkationsdiagramm für x_1 , x_2 , x_3 und x_4 .

6.4.2 $x_{(5-8)}$

Nach der Bestimmung der ersten vier Fixpunkte sollen nun die nächsten bestimmt werden. Da in Abschnitt 6.4. beschrieben wurde, dass die Anzahl der Fixpunkte zur Basis 2 zunimmt, sollen in diesem Schritt weitere 4 Fixpunkte ermittelt werden. Diese Fixpunkte sind in Abbildung 6.5 grafisch ermittelt worden, im Folgenden sollen sie rechnerisch ermittelt werden.

Dafür wird zuerst die Funktion $f(x)$ nach Vorschrift von (6.51) gebildet:

$$f^4(x) = -\sigma(-\sigma(-\sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)^2 + \sigma(-\sigma x^2 + \sigma x))^2 + \sigma(-\sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)^2 + \sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)))^2 + \sigma(-\sigma(-\sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)^2 + \sigma(-\sigma x^2 + \sigma x))^2 + \sigma(-\sigma(-\sigma x^2 + \sigma x)^2 + \sigma(-\sigma x^2 + \sigma x))) \quad (6.68)$$

Diese Funktion (6.68) ist eine Funktion achter Ordnung. Mit den vier bisher bekannten Fixpunkten $x_{(1-4)}$ kann die Funktion (6.68) auf eine Funktion vierter Ordnung gebracht werden. Diese kann jedoch nicht weiter vereinfacht werden. Da nur Gleichungen zweiter Ordnung analytisch lösbar sind, folgt daraus, dass die Fixpunkte $x_{(5-8)}$ nicht analytisch bestimmbar sind. Auch alle weiteren Fixpunkte können nicht analytisch bestimmt werden, da die Anzahl der weiteren Fixpunkte zur Basis zwei zunimmt. Dementsprechend werden auch die Ordnungen der Funktionen immer größer.

7 Numerischer Weg

In Abschnitt 6.4.2. wurde beschrieben, dass alle Fixpunkte ab x_5 nicht mehr analytisch bestimmbar sind. Aus diesem Grund soll hier beschrieben werden, wie man Fixpunkte numerisch bestimmen kann.

7.1 Theorie zur numerischen Bestimmung von Fixpunkten

Die numerische Bestimmung von Fixpunkten ist an die grafische Bestimmung angelehnt. Denn genau wie bei der grafischen Methode benötigt auch die numerische Methode nur die Funktion $f(x) = -\sigma x^2 + \sigma x$. Mit dieser wird dann die Folge $x_{a+1} = \sigma x_a(1 - x_a)$ aus (4.8) gebildet. Für dieses Kapitel wird a , die Anzahl der Jahre, durch n , die Anzahl an Iterationen ersetzt. Somit erhält man:

$$x_{n+1} = \sigma x_n(1 - x_n). \quad (7.1)$$

Anschließend wählt man einen beliebigen Startpunkt auf der x -Achse, welcher als $x_{n=0}$ bezeichnet wird. Dieser Punkt hat nichts mit Fixpunkten gemein. Für eine bessere Unterscheidung zwischen Fixpunkten und anderen Punkten werden Fixpunkte in diesem Kapitel mit einem Stern gekennzeichnet. Der erste Fixpunkt wird somit folgendermaßen beschrieben: x_1^* .

Den beliebigen Punkt $x_{n=0}$ setzt man nun in (7.1) ein. Um nun auf $x_{n=1}$ zu kommen, muss man vorher noch definieren, für welches σ man stabile Fixpunkte berechnen will, da man bei der numerischen Methode nur stabile Fixpunkte bestimmen kann. Zudem erhält man für diese Fixpunkte nicht eine Gleichung wie zum Beispiel (6.57), sondern den x_0 - beziehungsweise $f(x)$ -Wert von jedem Fixpunkt, der bei diesem σ stabil ist. Wenn man nun σ und $x_{n=0}$ definiert hat, kann man $x_{n=0+1}$ ausrechnen. Mit $x_{n=0+1} = x_{n=1}$ kann man dann $x_{n=1+1}$ ausrechnen. Dies wiederholt man bis gilt:

$$x_{n+1} = x_n \quad (7.2)$$

Wenn (7.2) gültig ist, wird x_n auf sich selbst abgebildet. Dies beschreibt die Definition eines Fixpunktes, wie sie in Abschnitt 3.4. gegeben wurde. Wenn es mehrere Fixpunkte bei einem σ -Wert gibt, gilt:

$$x_{n+s} = x_n \quad (7.3)$$

Hierbei steht s für die Anzahl der stabilen Fixpunkte bei dem gewählten σ -Wert. Das heißt, dass man ab einer bestimmten Anzahl an Iterationen nur noch zwischen den stabilen Fixpunkten hin und her springt.

7.2 Bestimmung der Fixpunkte bei $\sigma = 3,5$

Beispielhaft sollen nun die stabilen Fixpunkte bei $\sigma = 3,5$ bestimmt werden.

n	x_n	x_{n+1}
0	0,1	0,315
1	0,315	0,7552125
2	0,7552125	0,647033029453
3	0,647033029453	0,799334508874
4	0,799334508874	0,561395981289
5	0,561395981289	0,861806867185
$\vdots$	-	-
52	0,826940706592	0,500884210307
53	0,500884210307	0,874997263602
54	0,874997263602	0,382819683017
55	0,382819683017	0,826940706591
56	0,826940706591	0,500884210307
57	0,500884210307	0,874997263602
58	0,874997263602	0,382819683017
59	0,382819683017	0,826940706591

Tabelle 7.1: Bestimmung der Fixpunkte bei $\sigma = 3,5$ mit Python-Programm 2.

Ab $n = 52$ wechselt sich immer 0,500884210307, 0,874997263602, 0,382819683017 und 0,826940706591 für x_{n+1} ab. Somit sind diese vier Punkte die stabilen Fixpunkte bei $\sigma = 3,5$.

Mit dieser Methode kann man nun alle stabilen Fixpunkte für $\sigma > 1 + \sqrt[3]{6}$ berechnen.

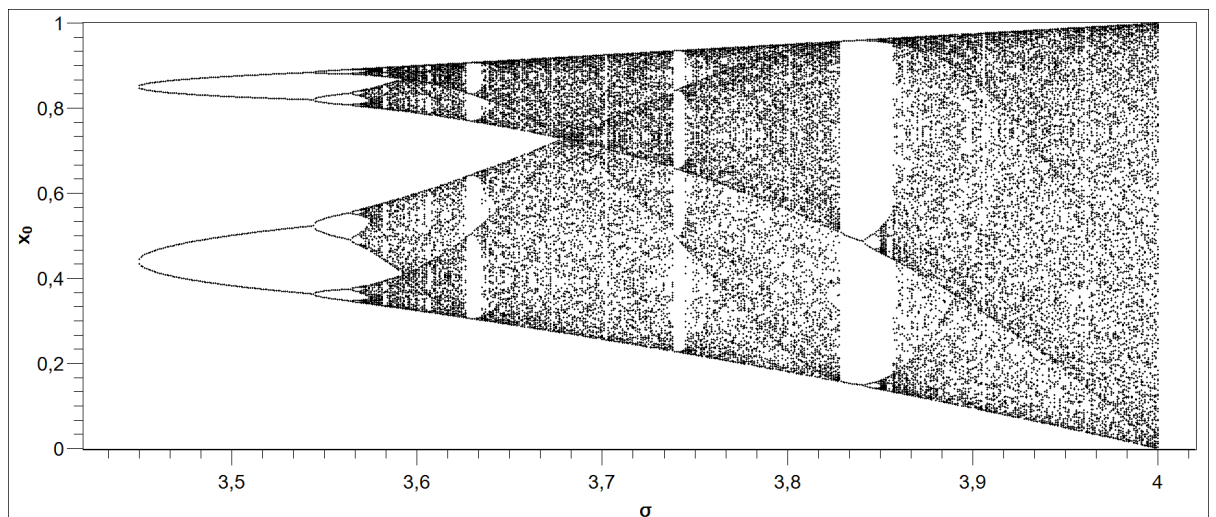


Abbildung 7.1: Bifurkationsdiagramm für $\sigma > 1 + \sqrt[3]{6}$.

In dieser Abbildung 7.1 kann man gut erkennen, wie ähnlich sich die einzelnen Periodenverdopplungen sind. Zudem ist zu sehen, wie die einzelnen σ -Intervalle der stabilen Fixpunkte immer kleiner werden. Auch erkennt man Bereiche, in denen die logistische Abbildung stabiler ist als in ihrer Umgebung. All diese Beobachtungen werden in Kapitel 8 genauer diskutiert.

7.3 Numerische Bestätigung der analytischen Ergebnisse

Mit der numerischen Methode kann man aber nicht nur neue stabile Fixpunkte berechnen, sondern auch die vorher analytisch bestimmten Fixpunkte und deren Intervalle, in denen sie stabil sind, bestätigen wie zum Beispiel das Ende des Intervalles $[3, 1 + \sqrt[3]{6}]$ der Fixpunkte x_3 und x_4 . Hierfür lässt man sich die stabilen Fixpunkte von zwei verschiedenen σ -Werten ausrechnen. Der eine Wert muss dabei etwas kleiner als $1 + \sqrt[3]{6}$ sein, der andere etwas größer. Da $1 + \sqrt[3]{6} \approx 3,449$ ist, ist in diesem Beispiel die kleinere Zahl 3,448 und die größere Zahl 3,45. Nun kann man für beide σ -Werte berechnen, wie viele stabile Fixpunkte es gibt. Für $\sigma = 3,448$ erhält man die stabilen Fixpunkte:

1. 0,440308631089,
2. 0,849714570767.

Somit existieren bei $\sigma = 3,448$ zwei stabile Fixpunkte. Dieses numerische Ergebnis stimmt mit dem analytischen Ergebnis überein.

Als nächstes müssen noch die stabilen Fixpunkte von $\sigma = 3,45$ bestimmt werden. Dabei erhält man die stabilen Fixpunkte:

1. 0,433991660954,
2. 0,847468002159,
3. 0,445967656792,
4. 0,852427745312.

Dieses numerische Ergebnis bestätigt das analytische Ergebnis, dass es bei $\sigma = 3,45$ vier stabile Fixpunkte gibt, also eine Periodenverdopplung stattgefunden hat. Außerdem ist ersichtlich, dass die vier Fixpunkte aus den vorherigen zwei entstanden sind aufgrund der nur leicht in positive und negative Richtung abweichenden x_0 -Werte.

In dieser Weise kann man nun alle analytischen Berechnungen numerisch überprüfen. Hilfreich ist dabei Python-Programm 2 (S. 42), mit dem auch die vorherigen Werte berechnet wurden. Für diese σ -Werte musste im Programm jedoch die Anzahl der Iterationen erhöht werden. Ein sicheres Ergebnis lieferten 10000 Iterationsschritte. Anschließend kann man nun noch das gesamte Bifurkationsdiagramm mit Python-Programm 3 (S. 43) berechnen, mit welchem schon Abbildung 7.1 berechnet wurde:

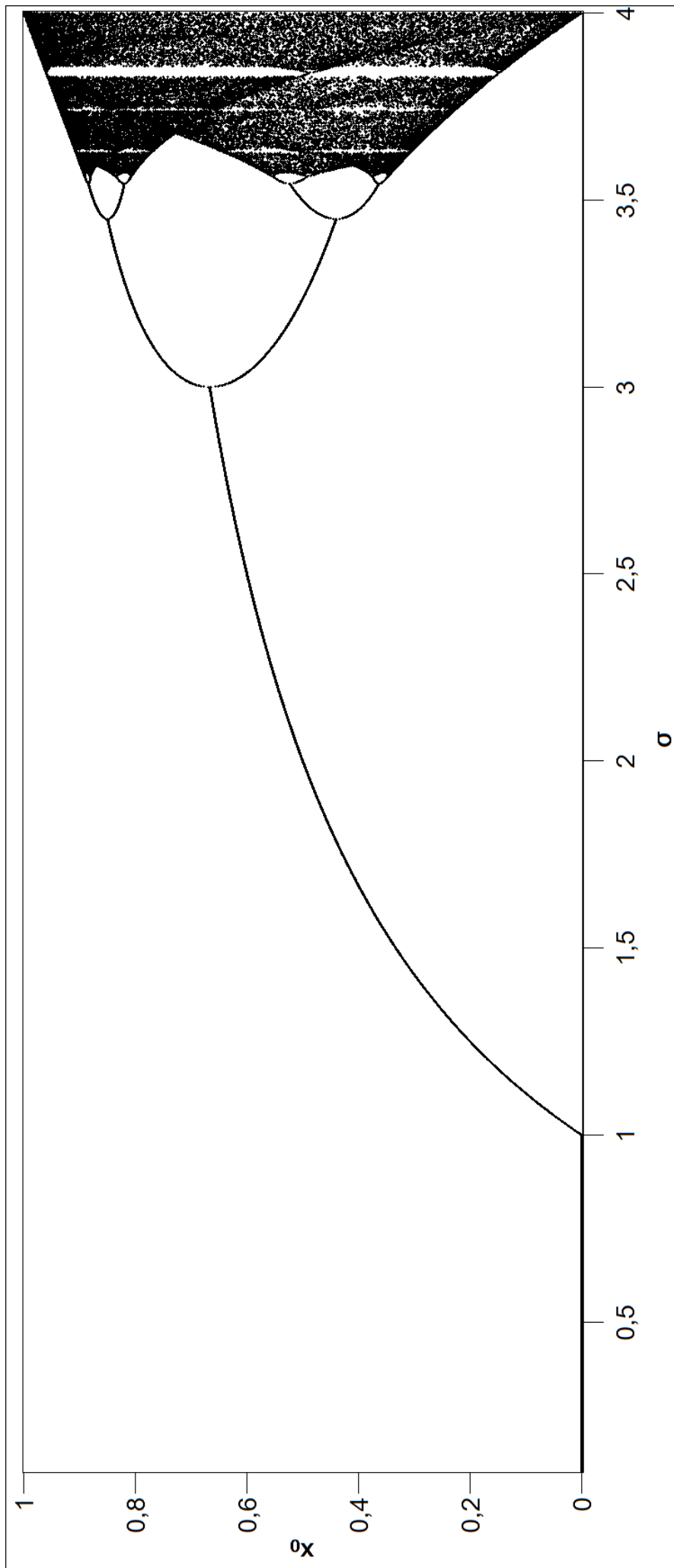


Abbildung 7.2: Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung.

8 Besondere Merkmale des Bifurkationsdiagrammes

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Besonderheiten des Bifurkationsdiagrammes, welche schon im vorigen Kapitel genannt wurden. Diese Auffälligkeiten sollen hier näher erläutert werden.

8.1 Selbstähnlichkeit

Eine Besonderheit des Bifurkationsdiagramms ist eine Ähnlichkeit in der Periodenverdopplung. Als Periodenverdopplung bezeichnet man, wenn aus einem stabilem Fixpunkt zwei andere stabile hervorgehen. Die erste Periodenverdopplung findet man bei $\sigma = 3$, die zweite bei $\sigma = 1 + \sqrt[3]{6}$. Wenn man nun diese beiden Periodenverdopplungen übereinanderlegt und die erste Periodenverdopplung um einen Faktor u verkleinert, erkennt man, dass beide Periodenverdopplungen sich sehr ähneln. Dies ist dargestellt in Abbildung 8.1.

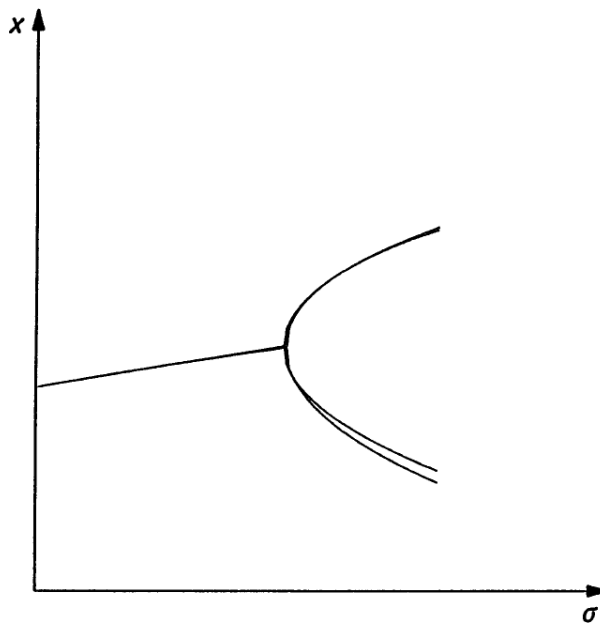


Abbildung 8.1: Verkleinerte erste Periodenverdopplung auf zweiter Periodenverdopplung [Haken and Wunderlin, 1991, S. 397].

Dennoch ist es auffällig, dass vor allem die unteren Äste relativ verschieden sind. Diese Abweichung der einzelnen Äste kann jedoch verkleinert werden, wenn man zum Beispiel Periodenverdopplung 9 und 10 übereinanderlegt. Somit nimmt die Ähnlichkeit der Periodenverdopplungen mit der Anzahl der Periodenverdopplungen zu und die Periodenverdopplung σ_n und σ_{n-1} für $n \Rightarrow \infty$ müssten perfekt selbstähnlich sein, wie in Abbildung 8.2. dargestellt.

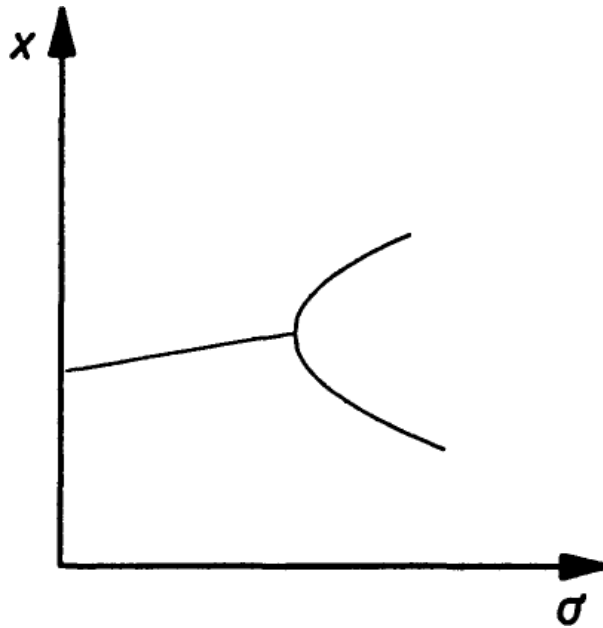


Abbildung 8.2: Perfekte Selbstähnlichkeit [Haken and Wunderlin, 1991, S. 398].

Dies kann mit der Feigenbaum-Konstanten α erklärt werden, mit der sich im folgenden Abschnitt beschäftigt wird.

8.2 Feigenbaum-Konstanten

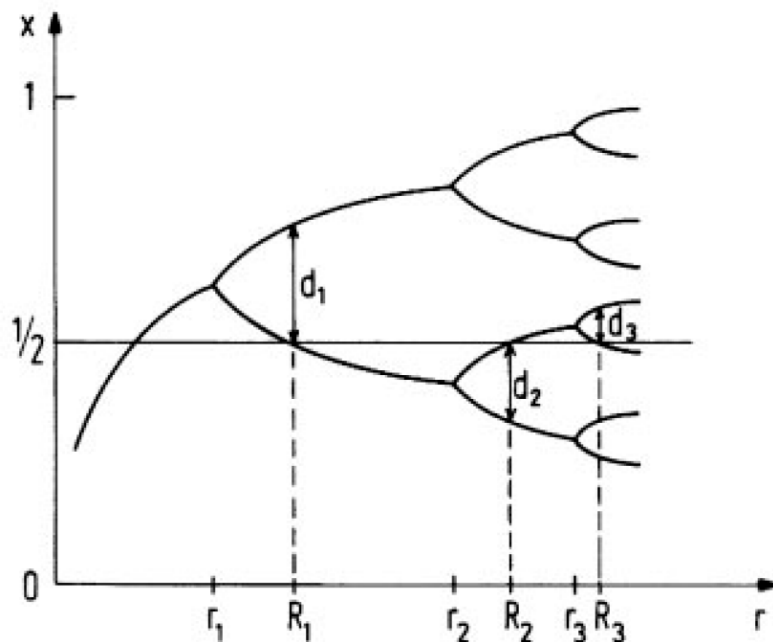


Abbildung 8.3: Schematische Darstellung der Distanz d welche für die Berechnung von α notwendig ist [Schuster and Just, 2006, S. 36].

Eine weitere Besonderheit, die man an dem Bifurkationsdiagramm auffinden kann, sind die Feigenbaum-Konstanten. Die erste Feigenbaum-Konstante $\delta \approx 4,6692$ [Feigenbaum, 1978] beschreibt die Änderung der Größe der Intervalle zwischen den einzelnen Verzweigungen auf der x -Achse. Somit gilt $\delta_n = \frac{\sigma_{n+1} - \sigma_n}{\sigma_n - \sigma_{n-1}}$ und $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n$ (vgl. [Haken and Wunderlin, 1991]). Hierbei ist σ_n der σ -Wert der n -ten Periodenverdopplung.

Die zweite Feigenbaum-Konstante $\alpha \approx 2,5029$ [Feigenbaum, 1978] beschreibt die Veränderung der Größe der Intervalle zwischen den einzelnen Ästen auf der y -Achse. Diese Konstante wird durch die Formel $\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha_n$ beschrieben [Schuster and Just, 2006, S. 36]. Dabei gilt $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ [Haken and Wunderlin, 1991, S. 408]. Aufgrund dieses Zusammenhangs ist die Selbstähnlichkeit bei Periodenverdopplungen höherer Ordnung größer. Beide Konstanten sind universell und in vielen chaotischen Systemen wiederzufinden. Entdeckt wurden sie 1977 von S. Grossmann und S. Thomae [Großmann and Thomae, 1977] und von M.J. Feigenbaum [Feigenbaum, 1978] wurden sie im Jahr 1978 als universale Größen für diskrete Abbildungen definiert, bei denen das Maximum quadratisch ist.

8.3 Periodische Fenster

Des Weiteren sind die so genannten periodischen Fenster auffällig. Sie sind stabilere Umgebungen, die auftreten, wenn das System chaotisches Verhalten aufweist. Chaotisches Verhalten existiert ab $\sigma > 3,56$ [Horner, 2011, S. 4]. Einen solchen Bereich kann man zum Beispiel bei $\sigma = 3,84$ beobachten. In Abbildung 7.1 kann man zudem noch mehr periodische Fenster sehen. Das Besondere an den periodischen Fenstern ist zudem, dass in diesen stabileren Umgebungen wieder selbstähnliche Periodenverdopplungen stattfinden, deren Verhältnisse auch den Feigenbaum-Konstanten entsprechen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Weg ins Chaos am logistischen Wachstum diskutiert. Zur Veranschaulichung war deshalb das Ziel, ein Bifurkationsdiagramm zu erstellen. Zu Beginn wurde das logistische Wachstum in eine Formel

$$f(x) = \sigma x(1 - x)$$

zusammengefasst mit σ als Kontrollparameter. Als nächstes wurden die zu betrachtenden Intervalle auf $0 \leq x_0 \leq 1$ und $0 \leq \sigma \leq 4$ definiert. Hierbei ist x_0 durch $f(x^*)$ gegeben, wobei x^* den Fixpunkt beschreibt.

Anschließend wurden im ersten Analyseschritt zuerst die ersten zwei Fixpunkte analytisch bestimmt. Auch wurde ein Kriterium für die Stabilität von Fixpunkten hergeleitet. Dieses Kriterium lautet $|f'(x^*)| \leq 1$. Mit diesem Kriterium konnte anschließend das Bifurkationsdiagramm im σ -Intervall $[0, 3]$ erstellt werden.

Die Bestimmung der nächsten zwei Fixpunkte folgte dann, indem man $f(x)$ iterierte. Dies ist möglich, da es sich bei dem logistischen Wachstum um eine Periodenverdopplung handelt. Danach konnte das Bifurkationsdiagramm um das σ -Intervall $[3, (1 + \sqrt[3]{6})]$ ergänzt werden.

Weitere Fixpunkte können dann jedoch nicht mehr analytisch ermittelt werden, da hierfür das Lösen einer Gleichung vierter Ordnung nötig wäre. Aus diesem Grund wurde als zweiter Analyseschritt eine numerische Methode eingeführt. Mit dieser Methode konnte das bisherige Bifurkationsdiagramm bestätigt und auf das σ -Intervall $[0, 4]$ vervollständigt werden.

Am vollständigen Bifurkationsdiagramm können nun die universalen Feigenbaum-Konstanten nachgewiesen werden. Des Weiteren findet man eine Selbstähnlichkeit bei den Gabelungen der Bifurkationen und stabilere Bereiche inmitten des zum Chaos tendierenden Systems. Das vollständige Bifurkationsdiagramm findet sich auf S.26 Abbildung 7.2 wieder.

Diese Arbeit kann zudem als Grundlage einer vertieften Forschung im Bereich des Chaos mit Hilfe der logistischen Abbildung genutzt werden. So könnte man die universalen Feigenbaum-Konstanten numerisch für dieses Bifurkationsdiagramm berechnen.

Wenn man dies erreicht hat, kann man dann die Universalität dieser Konstanten bei diskreten Abbildungen, deren Maximum quadratisch ist, beweisen, indem man ein zweites Bifurkationsdiagramm erstellt. Ein Beispiel für eine Funktion, mit der man diesen Schritt durchführen könnte, ist $f(x) = \sigma x^2(1 - x^2)$.

Eine weitere Möglichkeit zur Vertiefung des Themas wäre das Ausrechnen der Feigenbaum-Konstanten für eine Abbildung deren Maximum nicht quadratisch ist. Denn eine solche Funktion besitzt auch Feigenbaum-Konstanten, auch wenn diese einen anderen Wert besitzen.

10 Anhang

Gymnasium Kirm
Turnstraße 2
55606 Kirm/Nahe

Erklärung

=====

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende
Jahresarbeit selbstständig und ohne fremde
Hilfe erstellt und keine anderen Hilfsmittel
als die angegebenen verwendet habe.

Insbesondere versichere ich, dass ich
alle wörtlichen und sinngemäßen Über-
nahmen aus anderen Werken als solche
kenntlich gemacht habe.

Meddersheim, den 20.06.17
Ort, Datum


Unterschrift des/der Schüler/in

10.1 Rechnungen

$$\begin{aligned}
 & f(x) = -6x^2 - 6x - 1 \\
 & f'(x) = -12x - 6 \\
 & f''(x) = -12 \\
 & f'''(x) = 0 \\
 & f^{(4)}(x) = 0 \\
 & f^{(5)}(x) = 0 \\
 & f^{(6)}(x) = 0 \\
 & f^{(7)}(x) = 0 \\
 & f^{(8)}(x) = 0 \\
 & f^{(9)}(x) = 0 \\
 & f^{(10)}(x) = 0 \\
 & f^{(11)}(x) = 0 \\
 & f^{(12)}(x) = 0 \\
 & f^{(13)}(x) = 0 \\
 & f^{(14)}(x) = 0 \\
 & f^{(15)}(x) = 0 \\
 & f^{(16)}(x) = 0 \\
 & f^{(17)}(x) = 0 \\
 & f^{(18)}(x) = 0 \\
 & f^{(19)}(x) = 0 \\
 & f^{(20)}(x) = 0 \\
 & f^{(21)}(x) = 0 \\
 & f^{(22)}(x) = 0 \\
 & f^{(23)}(x) = 0 \\
 & f^{(24)}(x) = 0 \\
 & f^{(25)}(x) = 0 \\
 & f^{(26)}(x) = 0 \\
 & f^{(27)}(x) = 0 \\
 & f^{(28)}(x) = 0 \\
 & f^{(29)}(x) = 0 \\
 & f^{(30)}(x) = 0 \\
 & f^{(31)}(x) = 0 \\
 & f^{(32)}(x) = 0 \\
 & f^{(33)}(x) = 0 \\
 & f^{(34)}(x) = 0 \\
 & f^{(35)}(x) = 0 \\
 & f^{(36)}(x) = 0 \\
 & f^{(37)}(x) = 0 \\
 & f^{(38)}(x) = 0 \\
 & f^{(39)}(x) = 0 \\
 & f^{(40)}(x) = 0 \\
 & f^{(41)}(x) = 0 \\
 & f^{(42)}(x) = 0 \\
 & f^{(43)}(x) = 0 \\
 & f^{(44)}(x) = 0 \\
 & f^{(45)}(x) = 0 \\
 & f^{(46)}(x) = 0 \\
 & f^{(47)}(x) = 0 \\
 & f^{(48)}(x) = 0 \\
 & f^{(49)}(x) = 0 \\
 & f^{(50)}(x) = 0 \\
 & f^{(51)}(x) = 0 \\
 & f^{(52)}(x) = 0 \\
 & f^{(53)}(x) = 0 \\
 & f^{(54)}(x) = 0 \\
 & f^{(55)}(x) = 0 \\
 & f^{(56)}(x) = 0 \\
 & f^{(57)}(x) = 0 \\
 & f^{(58)}(x) = 0 \\
 & f^{(59)}(x) = 0 \\
 & f^{(60)}(x) = 0 \\
 & f^{(61)}(x) = 0 \\
 & f^{(62)}(x) = 0 \\
 & f^{(63)}(x) = 0 \\
 & f^{(64)}(x) = 0 \\
 & f^{(65)}(x) = 0 \\
 & f^{(66)}(x) = 0 \\
 & f^{(67)}(x) = 0 \\
 & f^{(68)}(x) = 0 \\
 & f^{(69)}(x) = 0 \\
 & f^{(70)}(x) = 0 \\
 & f^{(71)}(x) = 0 \\
 & f^{(72)}(x) = 0 \\
 & f^{(73)}(x) = 0 \\
 & f^{(74)}(x) = 0 \\
 & f^{(75)}(x) = 0 \\
 & f^{(76)}(x) = 0 \\
 & f^{(77)}(x) = 0 \\
 & f^{(78)}(x) = 0 \\
 & f^{(79)}(x) = 0 \\
 & f^{(80)}(x) = 0 \\
 & f^{(81)}(x) = 0 \\
 & f^{(82)}(x) = 0 \\
 & f^{(83)}(x) = 0 \\
 & f^{(84)}(x) = 0 \\
 & f^{(85)}(x) = 0 \\
 & f^{(86)}(x) = 0 \\
 & f^{(87)}(x) = 0 \\
 & f^{(88)}(x) = 0 \\
 & f^{(89)}(x) = 0 \\
 & f^{(90)}(x) = 0 \\
 & f^{(91)}(x) = 0 \\
 & f^{(92)}(x) = 0 \\
 & f^{(93)}(x) = 0 \\
 & f^{(94)}(x) = 0 \\
 & f^{(95)}(x) = 0 \\
 & f^{(96)}(x) = 0 \\
 & f^{(97)}(x) = 0 \\
 & f^{(98)}(x) = 0 \\
 & f^{(99)}(x) = 0 \\
 & f^{(100)}(x) = 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 10.1: Iteration 2-6 von $f(x)$.

$$\begin{array}{r}
 -\sigma^3 x^3 + 2\sigma^3 x^2 - \sigma^3 x - \sigma^2 x + \sigma^2 - 1 : \left(x - 1 + \frac{1}{\sigma}\right) = -\sigma^3 x^2 + \sigma^3 x + \sigma^2 x - \sigma^2 \\
 -(-\sigma^3 x^3 + \sigma^3 x^2 - \sigma^2 x^2) \\
 \hline
 \sigma^3 x^2 + \sigma^2 x^2 \\
 -(\sigma^3 x^2 - \sigma^3 x + \sigma^2 x) \\
 \hline
 \sigma^2 x^2 - 2\sigma^2 x \\
 -(\sigma^2 x^2 - \sigma^2 x + \sigma x) \\
 \hline
 -\sigma^2 x - \sigma x \\
 -(-\sigma^2 x + \sigma^2 - \sigma) \\
 \hline
 -\sigma x + \sigma - 1 \\
 -(-\sigma x + \sigma - 1) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$-\sigma^3 x^2 + \sigma^3 x + \sigma^2 x - \sigma^2 - \sigma = -\sigma^3 x^2 + (\sigma^3 + \sigma^2)x - (\sigma^2 + \sigma)$$

Abbildung 10.5: Polynomdivision (S. 20).

$$x_{1/2} = \frac{-\sigma^3 \pm (\sigma^3 + \sigma^2) \pm \sqrt{(\sigma^3 + \sigma^2)^2 - 4(-\sigma^3)(-\sigma^2 - \sigma)}}{-2\sigma^3}$$

$$x_{1/2} = \frac{(\sigma^3 + \sigma^2) \pm \sqrt{(\sigma^3 + \sigma^2)^2 - 4(-\sigma^3)(-\sigma^2 - \sigma)}}{2\sigma^3}$$

$$x_{1/2} = \frac{(\sigma + 1) \pm \sqrt{\sigma^2 + (2\sigma - 4\sigma) + (1 - 4)}}{2\sigma}$$

$$x_{1/2} = \frac{\sigma + 1 \pm \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma - 3}}{2\sigma}$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma^2 \text{ für } \sigma \neq 0 \\ (\sigma^3 + \sigma^2)^2 \\ = \sigma^6 + 2\sigma^5 + \sigma^4 \end{array} \right|$$

Abbildung 10.6: Mitternachtsformel (S. 20).

$$\begin{aligned}
 \frac{df^{(2)}(x)}{dx} &= -(6^3 x^3 + 6^3 x^2 - 26^3 x - 26^3 x + 6^2) \\
 x &= \frac{6 + 1 + \sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26} = \frac{6}{26} + \frac{1}{26} + \frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{26} + \frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26} \\
 // \\
 (a+b+c)^3 &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \cdot (a+b+c) \\
 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc \\
 // \\
 x^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{26}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{26}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26}\right) + 2\left(\frac{1}{26}\right)\left(\frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{26^2} + \frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26} + \frac{\sqrt{6^2 - 26^2 - 3}}{26^2}
 \end{aligned}$$

Abbildung 10.7: Auflösen von $\frac{df^{(2)}(x_3)}{dx}$ Teil 1 (S. 21).

$$\begin{aligned}
 x^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{26}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{26}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{26}\right)^2\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right) + 3\left(\frac{1}{26}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &\quad + 3\left(\frac{1}{26}\right)^2\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right)^2\left(\frac{1}{26}\right) \\
 &\quad + 6\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{26}\right)\left(\frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26}\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6^3} + \frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26} + \frac{\sqrt{6^2-26-3}}{26} - \frac{3}{26^2}
 \end{aligned}$$

Abbildung 10.8: Auflösen von $\frac{df^{(2)}(x_3)}{dx}$ Teil 2 (S. 21)).

$$\begin{aligned}
 & x \text{ in } \frac{df^{(2)}(x)}{dx} : \\
 \Rightarrow & -4b^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2b} \right) - \frac{1}{b^3} + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b} + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b^2} + 6b^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b} \right) + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b} + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b^2} \\
 & -2b^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} \right) + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b} - 2b^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2b} \right) + \frac{\sqrt{b^2 - 2b - 3}}{2b} + b^2 \\
 & = 4 + 2b - b^2 \\
 & = -b^2 + 2b + 4
 \end{aligned}$$

Abbildung 10.9: Auflösen von $\frac{df^{(2)}(x_3)}{dx}$ Teil 3 (S. 21)).

10.2 Python-Programme

1. Programm - beliebige Iteration erstellen

```
import numpy as num # importiert das Paket numpy, was zum abspeichern benötigt wird

def ersetzen(balt, bneu, text): # definierter Befehl zur einmaligen Iteration
    textn = " "
    for zeichen in text: # text entspricht der Formel die iteriert werden soll
        if zeichen == balt:
            textn = textn + bneu # jedes x in der Formel wird durch 'iterieren'
                                #der Ausgangsformel, die nicht geändert wird) ersetzt
        else:
            textn = textn + zeichen
    return textn

formel = '((-a)*((x)**2)+(a*x))' #Variable, unter der die zu
                                #iterierende Formel abgespeichert wird
iterieren = '((-a)*((x)**2)+(a*x))' # Variable unter der immer
                                # die Ausgangsformel abgespeichert wird
n = 2 # Wert, der beschreibt, die wievielte Iteration man haben will (hier die zweite)
for i in range (n-1): # '-1', da für die zweite Iteration die Ausgangsformel nur
                    # ein mal für x eingesetzt werden muss (2-1=1)
    formel = ersetzen('x', iterieren, formel) # iterieren der Formel
a = [formel] # die fertig iterierte Formel wird als Liste gespeichert
b = num.array(a) # die Liste wird als array gespeichert (funktioniert nur mit Liste)
num.savetxt('iteration.txt', b, newline='\r\n', fmt='%s') # die iterierte Funktion
                    # wird unter dem Namen 'iteration' als Textdatei abgespeichert

#Die dabei entstehende Datei sieht folgendermaßen aus:
#((-a)*(((((-a)*((x)**2)+(a*x))**2)+(a*(((a)*((x)**2)+(a*x))))
```

Abbildung 10.10: Programm zur Erstellung einer beliebigen Iteration.

Mit diesem Programm kann man eine beliebige Iteration $f^{(n)}(x)$ bilden und in der Datei 'iteration.txt' abspeichern. Um zum Beispiel die vierte Iteration zu erhalten muss man im Quelltext nur 'n = 4' setzen. Bevor man eine neue Iteration bestimmt, muss man sich jedoch überlegen, ob man die vorherige Datei 'iteration.txt' behalten will. Wenn ja muss man entweder im Quelltext den Dateinamen ändern oder die schon bestehende Datei als eine andere abspeichern. Denn beim Speichern werden alle schon existierende Dateien überschrieben.

2. Programm - Bestimmung der stabilen Fixpunkte für ein σ

```
import numpy as num # importiert das Paket numpy, was zum abspeichern benötigt wird

formel = 'a*x*(1-x)' # die Formel, mit der gearbeitet wird, wird definiert
a = 3.5 # a entspricht sigma
x = 0.1 # x steht für den Startwert x0
l = [] # eine Liste zum Speichern wird definiert
l2 = [] # eine weitere Liste zum Speichern wird definiert
for i in range(100): # hier wird die Anzahl der Iterationen definiert
    x = eval(formel) # berechnet den Wert der Formel als Zahl
    l += [x] # fügt den berechneten Wert zur Liste 'l' hinzu
for i in range(len(l)): # jeder Wert der Liste 'l' soll einzeln verarbeitet werden
    l2 += [i] # in der Liste 'l2' wird eine beliebige Liste erstellt
    l2[i] = [i, l[i]] # in diese Liste in der Liste wird nun geschrieben, wie oft
                        # iteriert wurde und welches Ergebnis dabei zustande kam
speichern = num.array(l2) # die Liste wird als array gespeichert
num.savetxt('Attraktoren35.txt', speichern, newline='\n', fmt='%s') # die
#berechneten Werte werden unter dem Namen 'Attraktoren35' als Textdatei abgespeicher

#Die dabei entstehende Datei sieht folgendermaßen aus:
#0.0 0.315
#1.0 0.7552125
#2.0 0.647033029453
#...
#97.0 0.874997263602
#98.0 0.382819683017
#99.0 0.826940706591
```

Abbildung 10.11: Programm zur Bestimmung stabiler Fixpunkte bei vorher gewähltem σ .

Mit diesem Programm kann man die stabilen Fixpunkte bei einem beliebigen σ -Wert berechnen. Das Programm iteriert dabei die Folge $x_{n+1} = \sigma x_n(1 - x_n)$ und gibt für jeden Iterationsschritt das entsprechende Ergebnis aus. Den σ -Wert kann man über die Variable a regeln. Sollten die Iterationsschritte nicht ausreichen, muss die 100 in 'for i in range(100):' durch eine größere Zahl ersetzt werden. Bevor man die stabilen Punkte für ein anderes σ bestimmt, muss man sich jedoch überlegen, ob man die vorherige Datei 'Attraktoren35.txt' behalten will. Wenn ja muss man entweder im Quelltext den Dateinamen ändern oder die schon bestehende Datei als eine andere abspeichern. Denn beim Speichern werden alle schon existierende Dateien überschrieben.

3. Programm - Bestimmung des Bifurkationsdiagramms

```
import numpy as num # importiert das Paket numpy, was zum abspeichern benötigt wird

formel = 'a*x*(1-x)' # die Formel, mit der gearbeitet wird, wird definiert
a = 3.4493 # a entspricht sigma #0
speicher = [] # eine Liste zum Speichern wird definiert

for q in range(3): # beschreibt die Anzahl der Werte, die man haben will #40001
    x = 0.1 # x steht für den Startwert x0
    l = [] # eine weitere Liste zum Speichern wird definiert
    l2 = [] # eine weitere Liste zum Speichern wird definiert
    for i in range(1000100): # beschreibt die Anzahl an Iterationen die durchgeführt
        # werden - je größer der Wert, desto besser
        x = eval(formel) # berechnet den Wert der Formel als Zahl
        if i >= 1000000: # die letzten 1000 Werte sollen gespeichert werden
            l += [x] # in der Liste l
    l = list(set(l)) # alle doppelten Werte werden gelöscht (jeder Fixpunkt ist
        # dann nur noch ein mal vertreten)
    for i in range(len(l)): # jeder Wert der Liste 'l' soll einzeln verarbeitet werden
        l2 += [i] # in der Liste 'l2' wird eine beliebige Liste erstellt
        l2[i] = [a, l[i]] # in diese Liste in der Liste wird nun geschrieben, welches
            # sigma welche stabilen Fixpunkte besitzt
    speicher += l2 # diese Liste wird dann zu einer anderen Liste hinzugefügt
        # (am Ende sind alle Ergebnisse in dieser Liste)
    a = a + 0.0001 # sigma wird erhöht für den nächsten Durchgang
        # steht mit der Zahl 40001 in Verbindung damit man auf 4 kommt
speichern = num.array(speicher) # die Liste wird als array gespeichert
num.savetxt('Attraktoren.txt', speichern, newline='\r\n', fmt='%s') # die
#berechneten Werte werden unter dem Namen 'Attraktoren' als Textdatei abgespeichert

#Die dabei entstehende Datei sieht folgendermaßen aus:
#0.0 0.0
#0.0001 0.0
#0.0002 0.0
#...
#3.4493 0.440004509209
#3.4493 0.849909386364
#3.4493 0.44000450921
#3.4493 0.849909386364
#3.4494 0.439981139093
#3.4494 0.849924351716
#3.4494 0.439981139095
#3.4494 0.849924351716
#3.4495 0.439111493327
#3.4495 0.84958628836
#3.4495 0.440809628404
#3.4495 0.850289676441
#...
```

Abbildung 10.12: Programm zur Bestimmung stabiler Fixpunkte für das Bifurkationsdiagramm.

Mit diesem Programm kann man die stabilen Fixpunkte für das gesamte Bifurkationsdiagramm berechnen. Dabei kann, indem man '40001' und '0,0001' ändert, bestimmen, wie kleinschrittig σ vergrößert werden soll. Mit ändern von '1000100' und '1000000' kann man die Iterationsschritte einstellen. Je mehr Iterationsschritte das Programm ausführen muss oder wenn das Programm mehr σ -Werte ausrechnen soll, steigt die Länge der Berechnungszeit deutlich. Beim Abspeichern wird jede schon vorhandene Datei gleichen Namens überschrieben.

11 Abbildungsverzeichnis

3.1	Schematische Bifurkation	8
6.1	Grafische Methode zur Ermittlung von Fixpunkten	13
6.2	Anwendung der grafischen Methode	14
6.3	Bifurkationsdiagramm für $\sigma \in [0, 3]$	18
6.4	Grafische Bestimmung von x_3 und x_4	18
6.5	Grafische Bestimmung von x_5, x_6, x_7 und x_8	19
6.6	Bifurkationsdiagramm für $\sigma \in [0, (1 + \sqrt{6})]$	22
7.1	Bifurkationsdiagramm für $\sigma \in [(1 + \sqrt{6}), 4]$	24
7.2	Bifurkationsdiagramm der logistischen Abbildung.	26
8.1	Verhältnis von zwei Periodenverdopplungen	27
8.2	Perfekte Selbstähnlichkeit	28
8.3	Abbildung zur Berechnung der Feigenbaum-Konstanten α	28

12 Literaturverzeichnis

- [Eckhardt, 2004] Eckhardt, B. (2004). *Chaos: deterministisches Chaos, Vorhersagbarkeit, Schmetterlingseffekt, seltsame Attraktoren, Wetterprognosen, chemisches Chaos, Populationsmodelle, Chaoskontrolle, Quantenchaos, Billards, Apfelmännchen*. Fischer Kompakt. Fischer-Taschenbuch-Verlag.
- [Feigenbaum, 1978] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52.
- [Großmann and Thomae, 1977] Großmann, S. and Thomae, S. (1977). Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. *Zeitschrift für Naturforschung a*, 32(12):1353–1363.
- [Haken and Wunderlin, 1991] Haken, H. and Wunderlin, A. (1991). *Die Selbststrukturierung der Materie: Synergetik in der unbelebten Welt*. Vieweg+Teubner Verlag.
- [Horner, 2011] Horner, H. (Apr. 2011). Nichtlineare dynamik und chaos. <http://www.tphys.uni-heidelberg.de/horner/NLDC11.pdf>, page 25.
- [Schuster and Just, 2006] Schuster, H. and Just, W. (2006). *Deterministic Chaos: An Introduction, Fourth, Revised and Enlarged Edition*. Wiley.